MANOEL JAIRO BEZERRA

CURSO DE MATEMÁTICA

para os

CURSOS DE SEGUNDO GRAU

(Antigos cursos CLÁSSICO E CIENTÍFICO)

CURSO COMPLETO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

MANOEL JAIRO BEZERRA

CURSO DE MATEMÁTICA

para os

CURSOS DE SEGUNDO GRAU
(Antigos cursos CLÁSSICO E CIENTÍFICO)

CURSO COMPLETO

31.ª edição

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

Questões de Exame de Admissão (esgotada).
Curso de Matemática — 1.º ano colegial (esgotada).
Curso de Matemática — 2.º ano colegial (esgotada).
Curso de Matemática — 3.º ano colegial (esgotada).
Questões de Matemática (3.ª edição).
Iniciando a Matemática Moderna — 1.º ano do 1.º grau (esgotada).
Iniciando a Matemática Moderna — 2.º ano do 1.º grau.
Moderno Curso de Matemática — 1.º ano do 2.º grau.

EDIÇÕES DA
Companhia Editora Nacional

Publicações do MEC:

Didática Especial da Matemática (esgotada).
Apostilas de Didática Especial da Matemática (esgotada).
O Material Didático no Ensino da Matemática (esgotado).
Caderno de Aritmética (3.ª edição).
Caderno de Álgebra — em colaboração (2.ª edição).
Caderno de Geometria — em colaboração (2.ª edição).
Guia metodológico.

Publicações do próprio autor:

Problemas e Exercícios de Matemática (esgotada).
Recreações e Material Didático (esgotada).

Ilustrações de:
Umberto Cosentino Neto
Cláudio Perrota

Direitos reservados

1974
Impresso no Brasil

ÍNDICE

Apresentação 9

ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

(1.º, 2.º e 3.º Anos)

1. Noções sobre o cálculo aritmético aproximado. Erros (1.º ano) 13
2. Progressões (1.º ano) 39
3. Logaritmos (1.º ano) 63
4. Equações exponenciais (1.º ano) 88
5. Análise combinatória simples (2.º ano) 94
6. Binômio de Newton (2.º ano) 110
7. Determinantes (2.º ano) 118
8. Sistemas lineares (2.º ano) 137
9. Trinômio do 2.º grau 151
10. Números reais e complexos (3.º ano) 155
11. Funções (3.º ano) 165
12. Limites (3.º ano) 179
13. Derivadas (3.º ano) 203
14. Primitivas imediatas (3.º ano) 250
15. Polinômios (3.º ano) 264
16. Introdução à teoria das equações (3.º ano) 281

GEOMETRIA

(1.º Ano)

1. Retas e planos 333
2. Poliedros 368
3. Superfícies 377
4. Prismas 386
5. Pirâmides e Troncos 400
6. Cilindros 418
7. Cones 426
8. Esfera 439
9. Seções cônicas 465

TRIGONOMETRIA

(2.º Ano)

1. Noções sôbre vetores 479
2. Projeções 485
3. Relações trigonométricas 488
4. Transformações trigonométricas 518
5. Equações trigonométricas 545
6. Resolução trigonométrica de triângulos 553

GEOMETRIA ANALÍTICA

(3.º Ano)

1. Coordenadas cartesianas 581
2. Problemas importantes 584
3. A função linear e a linha reta 589
4. Problemas clássicos da reta 603
5. Circunferência 616

APRESENTAÇÃO

Esperamos que este nosso trabalho, contendo todo o programa de Matemática do 2.º Grau (antigo 2.º Ciclo), venha facilitar aos nossos colegas e ajudar aos estudantes. Além de estar menos sujeito às modificações de programas, facilitará a revisão da matéria nas vésperas dos vestibulares, auxiliará ao professor quando (numa série mais adiantada) desejar recordar um assunto da série anterior, e possibilitará ao estudante a compra dos livros do 2.º Grau por um preço mais acessível.

O Autor

TRIGONOMETRIA

(2.º Ano)

1. Noções sôbre vetores 479
2. Projeções 485
3. Relações trigonométricas 488
4. Transformações trigonométricas 518
5. Equações trigonométricas 545
6. Resolução trigonométrica de triângulos 553

GEOMETRIA ANALÍTICA

(3.º Ano)

1. Coordenadas cartesianas 581
2. Problemas importantes 584
3. A função linear e a linha reta 589
4. Problemas clássicos da reta 603
5. Circunferência 616

APRESENTAÇÃO

Esperamos que este nosso trabalho, contendo todo o programa de Matemática do 2.º Grau (antigo 2.º Ciclo), venha facilitar aos nossos colegas e ajudar aos estudantes. Além de estar menos sujeito às modificações de programas, facilitará a revisão da matéria nas vésperas dos vestibulares, auxiliará ao professor quando (numa série mais adiantada) desejar recordar um assunto da série anterior, e possibilitará ao estudante a compra dos livros do 2.º Grau por um preço mais acessível.

O Autor

ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

(1.º, 2.º e 3.º anos)

I — ARITMÉTICA

CAPÍTULO I

Noções sobre o cálculo aritmético aproximado. Erros.

1. Preliminares. Na medida de certas grandezas, ou no emprego prático das operações algébricas, é comum o aparecimento de certos números que não representam o seu valor exato mas, apenas, um valor aproximado desses números.

Assim, se uma pessoa colocar em seu carro 15 litros de gasolina, a Cr$ 0,775 o litro, terá de pagar Cr$ 11,625. Efetuará esse pagamento com Cr$ 11,62 ou Cr$ 11,63, por não existir moeda inferior a Cr$ 0,01.

Não será possível também, a um matemático, realizar ou efetuar cálculos exatos com os valores decimais dos números irracionais, tais como π, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ ou com dízimas periódicas como as de geratrizes $\frac{1}{3}$ ou $\frac{14}{23}$, em virtude de possuírem esses números, em sua representação decimal, uma infinidade de algarismos decimais.

Logo, na impossibilidade prática de obter valores exatos de certas medidas, ou, da representação decimal exata de certos números tomamos valores aproximados, o que em geral é obtido limitando as representações decimais desses números.

Procedendo assim estamos cometendo *erros*.

É, portanto, justo que se procure estudar a influência desses erros sobre o resultado das operações, e que se busque o processo de se efetuar as operações com um determinado erro.

Daí, pois, a necessidade do estudo dos *números aproximados*.

2. Problemas fundamentais do cálculo numérico aproximado. O objetivo da teoria dos erros é a resolução dos dois seguintes problemas:

1.º) Averiguar o erro que se comete no resultado de uma operação quando se conhece os erros dos números que figuram nessa operação (*Problema direto*).

2.º) Investigar com que aproximação ou erro se deve tomar os números que figuram numa operação, a fim de que o erro do resultado não exceda de um valor ou erro prefixado (*Problema inverso*).

3. Definições. Chama-se *número exato* (N) ao número que representa o valor inteiro ou completo de uma grandeza.

Chama-se *número aproximado* (A) ao número não exato que se emprega para representá-lo.

Denomina-se *erro absoluto* (E) a diferença entre o número exato e o número aproximado.

$$E = N - A \quad \therefore \quad N = A + E$$

Conforme o erro absoluto seja positivo ou negativo, diz-se, respectivamente, que o *erro absoluto* é *por falta* ou *por excesso*.

Se $E > 0$, $N > A$ pois $N = A + E$ e diz-se que A é um *número aproximado por falta*; se $E < 0$, $N < A$ pois $N = A - E$ e diz-se que A é um *número aproximado por excesso*. Exemplo:

Temos que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$

Neste caso, 3,14 é um número ou valor aproximado por falta e 3,15 é um número ou valor aproximado por excesso.

Limite superior de um erro absoluto (cota superior). O erro absoluto E nem sempre pode ser determinado, pois, geralmente, desconhecemos o valor do número exato, em virtude da impossibilidade da representação decimal dos números irracionais.

Esta dificuldade é sanada, todavia, introduzindo-se o que se chama *limite superior do erro absoluto* (L), que se define como sendo "uma unidade de uma ordem tal que o erro absoluto cometido seja inferior a ela".

Assim o limite superior ou cota superior de um erro absoluto nada mais é do que um valor maior do que esse erro.

Chama-se *grau de aproximação* de um número aproximado a ordem decimal a que corresponde a cota superior do erro absoluto. Exemplo:

O valor exato de π nos é desconhecido.

Se tomarmos $\pi = 3{,}14159\ldots$, o número aproximado $A = 3{,}14$ é um número aproximado por falta de π e temos:

$$E = 3{,}14159\ldots - 3{,}14 = 0{,}00159\ldots$$

não podemos determinar essa diferença por não termos todos os algarismos, após o 9, do resultado, poderemos contudo verificar que $0{,}00159 < 0{,}01$ ou $E < 0{,}01$ e, portanto, a cota superior é $L = 0{,}01$.

Logo, o grau de aproximação do número aproximado $A = 3{,}14$ é da ordem dos centésimos. Ou ainda 3,14 é um número aproximado de π a menos de um centésimo, por falta. 3,15 seria um número aproximado de π a menos de um centésimo, por excesso.

Porém, se disséssemos que $L = 0{,}01$ não significaria que o valor aproximado é por falta a menos de 0,01.

O que é fácil de ver pois para $L = 0{,}01$ o valor aproximado poderá ser 3,134, que não é aproximado a menos de 0,01.

Concluímos então, de um modo geral, se A é aproximado por falta a menos de $\frac{1}{10^n}$, $L = \frac{1}{10^n}$, mas, a recíproca nem sempre é verdadeira.

E representamos que um número A é aproximado do número N com erro inferior a L, assim:

1.º) Se por falta ou por excesso

$$A - L < N < A + L$$

2.º) Se por falta

$$A < N < A + L$$

3.º) Se por excesso

$$A - L < N < A$$

4. Algarismos exatos. Chamam-se algarismos exatos de um número aproximado aos algarismos da parte inteira e da parte decimal, desde o primeiro significativo da esquerda até aquele que nos dá o grau de aproximação do número aproximado.

Os algarismos que restarem à direita do último exato chamam-se *inexatos*. Exemplo:

Se o número 0,0799912 é um valor aproximado do número exato 0,08 temos:

$$N = 0{,}08$$
$$A = 0{,}0799912$$
$$E = 0{,}0000088 \quad \therefore \quad L = 0{,}00001$$

Como o grau de aproximação corresponde a ordem decimal de L, então temos quatro algarismos exatos.

Podemos, para melhor compreensão, dizer que *algarismos exatos* são aqueles que, a partir do primeiro significativo da esquerda dão, sem interrupção, zeros no número que representa o erro absoluto.

Apresentaremos a seguir um quadro, com 5 exemplos, a fim de melhor elucidar a maneira de determinar o número n de algarismos exatos.

N	3,141592	0,00037452	1,414	1,732	23,107
A	3,141581	0,0003736	1,4	1,731992	23,1068
E	0,000011	0,00000092	0,014	0,200008	0,0002
n	5	3	2	1	5
L	0,0001	0,000001	0,1	1	0,001

É importante não confundir o número de algarismos exatos, com o número de algarismos decimais exatos, que são aqueles, significativos ou não, que estão após a vírgula, até o grau de aproximação.

Assim, nos exemplos do quadro acima, o número de decimais exatas é, respectivamente: 4, 6, 1, 0 e 3.

5. Supressão dos algarismos inexatos (ilusórios). Este problema consiste em suprimir os algarismos inexatos de um número aproximado que possua certo grau de aproximação, sem perder esse grau de aproximação.

Temos dois casos a estudar.

PRIMEIRO CASO: *O número A é aproximado por falta.*

Neste caso basta suprimir os algarismos inexatos e aumentar de uma unidade o último algarismo exato. Exemplo:

Seja um número $A = 2{,}52486$ aproximado por falta, a menos de um milésimo, de um número N.

Se A tem 4 algarismos exatos e 2 inexatos, para se suprimir esses 2 algarismos inexatos sem alterar o grau de aproximação, basta que se tome $A = 2{,}525$.

SEGUNDO CASO: *O número A é aproximado por excesso.*

Neste caso basta suprimir os algarismos inexatos. Exemplo:

Se $A = 2{,}45736$ é aproximado por excesso, a menos de 0,001 de um número N. Se tem A 4 algarismos exatos e 2 inexatos, para se suprimir estes dois algarismos, basta então que se tome $A = 2{,}457$.

OBSERVAÇÃO: Convém notar que, nos dois casos, quando suprimimos os algarismos inexatos do número aproximado sem alterar o grau de aproximação desse número, deixamos de saber se essa aproximação, que não alterou o grau, permanece de mesmo sentido, isto é, se é por falta ou por excesso.

Como, na maioria dos casos, não se torna necessário saber do sentido da variação, este fato não terá grande importância.

Se, todavia, em virtude da natureza da grandeza medida e da espécie de experiência que se realiza, surgir a necessidade do conhecimento dessa variação, este problema poderá ser resolvido facilmente, bastando para isso que se diminua de uma unidade o grau de aproximação.

Assim, no exemplo do primeiro caso, para se ter o sentido de variação teremos de tomar 2,52 por falta e 2,53 por excesso, porém o grau de aproximação passa de 0,001 para 0,01.

6. Erro de arredondamento. Chama-se *erro de arredondamento* de um número decimal ao erro que se comete limitando-se a sua apresentação na decimal de ordem n, que deve ser aumentada de uma unidade se o primeiro algarismo desprezado é maior do que 4.

E dizemos que o erro de arredondamento cometido é menor ou no máximo igual a 5 unidades da ordem $n+1$, ou a meia unidade da ordem n. Exemplos:

1.º) Limitando o número 7,41258 nos centésimos, temos 7,41 cujo erro por falta é:

$$7{,}41258 - 7{,}41 = 0{,}00258$$

que verificamos ser menor do que 0,005, que é meia unidade de ordem $n = 2$ ou de 5 unidades de ordem $n+1 = 3$.

2.º) Se limitarmos o número 7,41258 na terceira decimal, aumentando essa decimal de uma unidade, teremos: 7,413.

E se cometeu um erro de arredondamento de:

$$7{,}413 - 7{,}41258 = 0{,}00042 < 0{,}0005$$

3.º) Se limitarmos o número 0,85 na primeira decimal, temos 0,9.

E se cometeu um erro de arredondamento de

$$0{,}9 - 0{,}85 = 0{,}05$$

que é igual a meia unidade de ordem $n=1$ ou de 5 unidades de ordem $n+1=2$.

Uma exceção à definição de erro de arredondamento é o caso da dízima 0,9999 . . . pois seu valor aproximado é a unidade, isto porque se desprezarmos uma decimal desprezaremos todas.

7. **Erro relativo** (ϵ). Denomina-se erro relativo de um número aproximado ao quociente da divisão de seu erro absoluto pelo seu valor exato.

$$\epsilon = \frac{E}{N}$$

Podemos dizer também que é o erro absoluto por unidade.

O erro relativo diz mais do que o erro absoluto. Este nos mostra simplesmente qual o erro cometido, e nada mais é do que a diferença entre o número exato e o aproximado. O erro relativo, pelo contrário, estabelece a comparação entre o erro que se comete (E) e a quantidade sobre a qual se comete esse erro, permite que se faça um conceito preciso sobre a maior ou menor precisão de uma medida, sobre o grau de aproximação entre o exato e o aproximado.

Na prática, entretanto, não se conhece geralmente o erro relativo, motivo pelo qual se toma então uma cota superior desse erro.

8. **Exercícios para resolver.**

1) Um número 1,7523 tem para valor aproximado 1,75. Qual o erro absoluto?

2) Qual o erro absoluto cometido quando se toma 0,45 para valor aproximado de $\frac{7}{16}$?

3) Qual o erro relativo cometido no número exato $\frac{7}{16}$ se o erro absoluto é $\frac{1}{80}$?

4) Qual o erro relativo cometido quando se toma 3,27 para valor aproximado do número 3,27125?

5) Qual o limite superior do erro absoluto do número π quando se toma um valor aproximado, por falta, a menos de 0,01?

6) Os números exatos

4,454609; 0,000084625 e 0,05

têm respectivamente para números aproximados

4,45452; 0,00008456 e 0,04999936

Quantos algarismos exatos têm, respectivamente, esses valores aproximados?

7) Dado o número 2,734856 aproximado, por falta, a menos de 0,001 e que tem 4 algarismos exatos e 3 inexatos, suprimir esses algarismos inexatos sem perder o grau de aproximação.

8) Dado o número 5,435678 aproximado, por excesso, a menos de 0,001 e que tem 4 algarismos exatos e 3 inexatos, suprimir esses algarismos inexatos, sem alterar o grau de aproximação.

9) Qual a cota superior do erro absoluto do número $\pi = 3{,}141592\ldots$ quando tomamos 3,141 para seu valor aproximado?

10) Com quantos algarismos exatos temos que tomar o número π para que seu erro seja menor do que $\frac{4}{1000}$?

11) Dado um número N aproximado a menos de 0,0001, achar uma aproximação por falta e uma aproximação por excesso com erro menor do que 0,01.

$$N = 13{,}3436343^{6}$$

e tem 6 algarismos exatos.

RESPOSTAS:

1) 0,0023
2) $\frac{1}{80}$
3) $\frac{1}{35}$
4) $\frac{1}{2\,617}$
5) 0,01
6) 5, 3 e 7
7) 2,735
8) 5,435
9) 0,001
10) 4
11) 13,34 e 13,35.

As quatro operações fundamentais com os números aproximados. Método dos erros absolutos

9. Preliminares. — Teremos de estudar, em particular, cada uma das operações fundamentais, com números aproximados resolvendo os dois problemas fundamentais do cálculo numérico aproximado (N.° 2). Para esses cálculos usaremos o método dos erros absolutos.

ADIÇÃO

10. Teorema.

> O módulo do erro absoluto de uma soma de n números aproximados é inferior a n vezes o maior (L) dos limites superiores dos erros absolutos desses números.

Sejam $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$, n números aproximados dos números $N_1, N_2, \ldots N_n$, com erros absolutos $E_1, E_2, \ldots E_n$ respectivamente inferiores a $L_1, L_2, \ldots\ldots L_n$.

Podemos escrever (n.° 3):

$$N_1 = A_1 + E_1$$
$$N_2 = A_2 + E_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_n = A_n + E_n$$

Somando:

$$S = S' + E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n$$

onde S e S' são, respectivamente, a soma dos n números exatos e dos n números aproximados.

Então (n.° 3):

$$S - S' = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n$$

e, portanto, o erro absoluto E da soma dos números aproximados S' é:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n \qquad (1)$$

Temos 3 casos a considerar em (1)

1.°) Se todos os números A_i são aproximados por falta, todos os erros E_i são positivos (n.° 3), logo $E > 0$ e S' é aproximado de S por falta.

$$E,\ E = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n$$

2.°) Se todos os números A_i são aproximados por excesso, todos os erros E_i são negativos, e a soma S' é aproximada de S por excesso.

E ainda,
$$E = E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n$$

3.°) Se alguns números A_i são aproximados por falta e outros por excesso, os erros E_i são positivos, uns, e negativos outros, o sentido do erro da soma S' não é determinado, mas,

$$|E| < |E_1| + |E_2| + \ldots\ldots + |E_n|$$

Nos três casos considerados podemos escrever

$$|E < L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_n$$

ou, sendo L, como foi considerado na hipótese, o maior dos limites do erro $|E < nL$

11. Problema direto da soma. Dados os limites superiores L_i dos erros absolutos de p parcelas aproximadas de uma adição, calcular sua soma com um limite superior do seu erro absoluto.

Seja $L = \frac{1}{10^n}$ o maior dos L_i e seja E o erro absoluto da soma.

De acordo com o teorema anterior (n.° 10), temos:

$$|E| < pL \text{ ou } |E| < \frac{p}{10^n}$$

Temos: $\frac{p}{10^n} = \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}$ (Se $p = 10$)

e $\frac{p}{10^n} < \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}$ (Se $p < 10$)

Então, se $p \leq 10$ $|E| < \frac{1}{10^{n-1}}$

De modo análogo veríamos que, se $10 < p \leq 100$, $|E| < \frac{1}{10^{n-2}}$

12. Exercícios.

1) Seja calcular a soma

$$S = \sqrt{11} + \sqrt{3} + \sqrt{17}$$

tomando os seguintes valores aproximados

$\sqrt{11} = 3{,}31662 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad L_1 = \frac{1}{10^5}$ (por falta)

$\sqrt{3} = 1{,}7320 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad L_2 = \frac{1}{10^4}$ (por falta)

$\sqrt{17} = 4{,}12310 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad L_3 = \frac{1}{10^5}$ (por falta)

$S = \overline{9{,}17172} \ldots\ldots\ldots\ldots$ (por falta)

Como neste exemplo $p=3$ e $L_m = \frac{1}{10^4}$ então $|E| < \frac{1}{10^4}$

e portanto a soma S terá 4 algarismos exatos ou 3 algarismos decimais exatos (n.º 4).

Logo, de acordo com o n.º 5 (primeiro caso), temos.

$S = 9{,}172$ com $E < \frac{1}{10^3}$ (sentido desconhecido)

Ou (n.º 5), $S = 9{,}17$ (por falta) e $S = 9{,}18$ (por excesso) mas, em ambos os casos, com aproximação $E < \frac{1}{10^2}$.

2) Calcular a soma

$$S = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \pi$$

com o menor erro possível, sabendo que seus valores aproximados, por excesso, todos com $L_m = 0{,}0001$, são:

$\sqrt{2} = 1{,}4143$
$\sqrt{3} = 1{,}7321$
$\sqrt{5} = 2{,}2361$
$\pi = 3{,}1416$
$S = \overline{8{,}5241}$ (aproximado por excesso)

Então, de acordo com o n.º 11, $|E| < 0{,}001$ e, tendo em vista o n.º 5 (segundo caso):

$S = 8{,}524$ com $|E| < 0{,}001$ (sentido desconhecido)

3) Calcular a soma anterior com a menor aproximação possível.

a) por falta; *b*) por excesso.

Sabendo que seus valores são aproximados por falta ou por excesso, temos, conforme a *observação* feita anteriormente (n.º 5):

a) por falta: $S = 8{,}52$ com $|E| < 0{,}01$
b) por excesso: $S = 8{,}53$ com $|E| < 0{,}01$

13. Regra. O módulo do erro absoluto E, da soma de várias parcelas aproximadas, tem para limite ou cota superior L, o maior dos limites superiores das parcelas, L_m, multiplicado por 10, se o número de parcelas não excede 10, por 100, se está compreendido entre 10 e 100, e assim sucessivamente.

14. Observações referentes à soma encontrada e seu limite de erro. (Ver exercícios n.º 12).

1) Se $L_m = \frac{1}{10^{n+1}}$, $L = \frac{1}{10^n}$ e a soma tem n algarismos na parte decimal;
2) Se todas as parcelas da soma são aproximadas por falta, a soma também o será, e, o último dos n algarismos decimais encontrados deverá ser aumentado de uma unidade. (Exercício 1).
3) Se todas as parcelas da soma são aproximadas por excesso, a soma também o será, e o último dos n algarismos encontrados não deverá ser alterado. (Exercício 2).
4) Se algumas parcelas são aproximadas por falta e outras por excesso, não se sabe o sentido da soma. Neste caso despreza-se o último dos n algarismos decimais e se obtém a soma com $n-1$ algarismos com $|E| < \frac{1}{10^{n-1}}$ por falta.

   Se aumentarmos o último dos $n-1$ algarismos, de uma unidade, $|E| < \frac{1}{10^{n-1}}$ por excesso.
5) Na prática, quando se pede o limite de erro do resultado de uma operação, caso não se especifique o contrário, só interessa calcular o grau de aproximação do erro e não o seu sentido.

15. Problema inverso da soma. Determinar com quantos algarismos decimais devemos tomar cada uma das p parcelas de uma adição para que sua soma S esteja a menos $\frac{1}{10^n}$.

De acordo com o teorema n.º 10, se L é o maior dos limites superiores das parcelas,

$$|E| < pL \quad \text{mas,} \quad pL \leq \frac{1}{10^n} \quad \therefore \quad |E| < \frac{1}{10^n}$$

Temos também $L \leq \frac{1}{p.\,10^n}$ (1)

Se $p=10$, $\frac{1}{p.\,10^n}=\frac{1}{10^{n+1}}$

Se $p<10$, $\frac{1}{p.\,10^n}>\frac{1}{10^{n+1}}$

Então se $p \leq 10$ para $L=\frac{1}{10^{n+1}}$ a (1) se verifica.

Analogamente, se $10<p\leq 100$ $L=\frac{1}{10^{n+2}}$

16. Regra. Pelo que acabamos de ver (n.º 15):

Para calcular uma soma de menos de 10 parcelas, a menos de $\frac{1}{10^n}$ $\left(|E|<\frac{1}{10^n}\right)$ é suficiente que se tome cada um dos números com $n+1$ algarismos decimais exatos $\left(L=\frac{1}{10^{n+1}}\right)$.

Se o número de parcelas da soma está compreendido entre 10 e 100, é suficiente que se tomem as parcelas com $n+2$ algarismos decimais exatos.

Devem-se tomar as parcelas aproximadas no mesmo sentido. (Pois,em contrário,não se teria a aproximação pedida). Exemplo:

Calcular a soma $S=\pi+e+0{,}00$ [35] com erro menor que 0,001.

Basta que se tome cada parcela com 4 algarismos decimais exatos; temos:

3,1415	(por falta)
2,7182	(por falta)
0,0035	(por falta)
5,8632	(por falta)

E a soma $S=5{,}864$ com $|E|<0{,}001$ (sentido desconhecido), como já vimos no n.º 11.

17. Observação. Se quiséssemos efetuar a soma S com erro menor do que 0,001 por falta ou por excesso, teríamos de considerar cada parcela com $5=(n+2)$ algarismos decimais, e teríamos

3,14159	(por falta)
2,71828	(por falta)
0,00353	(por falta)
5,86340	(por falta)

E a soma será 5,8635 com $|E|<0{,}0001$
Ou 5,863 com $|E|<0{,}001$ por falta, e
5,864 com $|E|<0{,}001$ por excesso

18. Exercícios resolvidos.

1) Calcular a soma

$$S = 4{,}57+25{,}368+0{,}74123$$

cujas parcelas possuem, respectivamente, dois, três e cinco algarismos decimais exatos.

Temos:

4,57	$L_1 = 0{,}01$
25,368	$L_2 = 0{,}001$
0,74123	$L_3 = 0{,}00001$

$S=30{,}67023$ e a soma tendo todos seus algarismos exatos é 30,7 com $|E|<0{,}1$.

2) Calcular a soma

$$S = \pi+\sqrt{2}+e+\frac{1}{24}+\frac{2}{7}$$

utilizando 3 algarismos decimais em cada parcela e avaliar o limite superior do erro absoluto cometido.

Dispondo as operações como se segue, temos:

	E por falta	E por excesso	Cota superior L
$\pi=3{,}142$		0,0005	0,001
$\sqrt{2}=1{,}414$	0,0005		0,001
$e=2{,}718$	0,0005		0,001
$\frac{1}{24}=0{,}042$		0,0005	0,001
$\frac{2}{7}=2{,}286$		0,0005	0,001
7,602			

Logo, $S=7{,}60$ com $|E|<0{,}01$.

SUBTRAÇÃO

19. Teorema.

> 1.º) O módulo do erro absoluto da diferença de dois números aproximados, de mesmo sentido, é inferior ao maior erro.
> 2.º) O módulo do erro absoluto da diferença de dois números aproximados é inferior ao dobro do maior erro.

Sejam A_1 e A_2 dois números aproximados dos números N_1 e N_2, com erros absolutos respectivamente iguais a E_1 e E_2.

Então,
$$N_1 = A_1 + E_1$$
$$N_2 = A_2 + E_2$$
$$\therefore N_1 - N_2 = (A_1 - A_2) + (E_1 - E_2)$$

e sendo E o erro absoluto da diferença $E = E_1 - E_2$

1.º) Se A_1 e A_2 são aproximados no mesmo sentido, temos:

$$|E| = |E_1 - E_2| < |E_m|$$

sendo E_m o maior dos erros E_1 e E_2. O sentido de aproximação do resultado é desconhecido.

2.º) Se A_1 e A_2 são aproximados em sentido contrário, temos:

$$|E| = |E_1 + E_2| < 2|E_m|$$

O sentido de aproximação do resultado é o mesmo do minuendo.

20. Observação. Nos dois casos, temos:

$$|E| < L_1 + L_2 \leq 2L_m$$

21. Problema direto da subtração. Conhecendo os limites superiores dos erros absolutos de dois números aproximados, calcular o limite superior de sua diferença. Exemplos:

1.º) Calcular a diferença

$D = \pi - e$, tomando os valores abaixo:

$\pi = 3{,}1415$ com $|E_1| < 0{,}0001$ por falta
$e = 2{,}718281$ com $|E_2| < 0{,}000001$ por falta
$D = 0{,}423219$ com $|E| < 0{,}0001$

Tomamos então para resultado

$$0{,}4233 \text{ com } |E| < 0{,}0001$$

2.º) Calcular $D = \frac{22}{7} - \pi$, para

$\frac{22}{7} = 3{,}14285$ com $|E_1| < 0{,}00001$ por falta
$\pi = 3{,}1416$ com $|E_2| < 0{,}00005$ por excesso
$D = 0{,}00125$ com $|E| < 2|E_2| < 0{,}0001$ (por falta).

ou, $D = 0{,}0013$ com $|E| < \frac{1}{10^4}$ (sentido desconhecido)

3.º) Calcular $D = N_1 - N_2$, para

$N_1 = 13{,}47452$ com $|E_1| < 0{,}00001$
$N_2 = 5{,}2074$ com $|E_2| < 0{,}0001$
$D = 8{,}26712$

com erro menor do que $2 \times 0{,}0001 < 0{,}001$

ou $D = 8{,}26$ com $|E| < 0{,}01$ por falta

22. Problema inverso da subtração. Calcular com quantos algarismos decimais devemos tomar cada um dos termos de uma subtração para obter o resultado a menos de $\frac{1}{10^n}$.

O teorema n.º 19 (1.º caso) diz que se os dois termos são aproximados no mesmo sentido, o módulo do erro absoluto da diferença é menor do que o maior dos erros dos seus termos e o seu sentido é desconhecido. Logo, se tomarmos os dois termos, com a mesma aproximação $\frac{1}{10^n}$, da diferença, e ambos aproximados no mesmo sentido, teremos resolvido o nosso problema.

23. Exemplo. Calcular

$D=\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}$ a menos de $\frac{1}{10^4}$ tomando $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{\pi}$ ambos com aproximação de $\frac{1}{10^4}$, por falta, temos:

$\frac{1}{3}=0{,}3333$

$\frac{1}{\pi}=0{,}3183$

$D=0{,}0150$ com $|E|<\frac{1}{10^4}$ (sentido desconhecido)

24. Observação. Para se calcular uma diferença com

$$|E|<\frac{1}{10^n}$$

basta tomar o minuendo e o subtraendo com esse mesmo limite de erro e ambos aproximados no mesmo sentido (por falta ou por excesso).

MULTIPLICAÇÃO

25. Teorema.

> O módulo do erro absoluto do produto de dois números aproximados é inferior à soma dos produtos do limite superior, do erro absoluto de cada um dos fatores, pelo limite superior, do outro fator.

Sejam N_1 e N_2 dois números exatos cujo produto é P, e sejam A_1 e A_2 dois números aproximados de N_1 e N_2, tendo P' para produto, L_1 e L_2, para respectivos limites superiores de seus erros absolutos E_1 e E_2 e A_1' e A_2', para seus limites superiores.

Temos que:

$$N_1=A_1+E_1$$
$$N_2=A_2+E_2$$
$$N_1 . N_2=A_1A_2+A_2E_1+E_1E_2+A_1E_2$$

ou $P=P'+A_1E_2+(A_2+E_2)E_1$

E, portanto, o erro absoluto E do produto será

$$|E|=|A_1E_2+(A_2+E_2)E_1|$$

substituindo A_1, A_2, E_1 e E_2 por seus respectivos limites superiores, temos:

$$|E|<A_1'L_2+A_2'L_1$$

26. Observação. Quando, no teorema anterior os dois números aproximados estão no mesmo sentido, o produto é também aproximado nesse mesmo sentido; quando estão em sentidos contrários, não se conhece o sentido de aproximação do produto.

27. Problema direto da multiplicação de 2 números aproximados. Dados os limites superiores L_1 e L_2 dos erros absolutos de dois números aproximados, determinar um limite superior L do erro do produto.

Conforme o teorema n.º 25, temos:

$$|E|<A_1'L_2+A_2'L_1$$

e o cálculo do segundo membro dessa desigualdade nos dá L.

28. Exemplos.

1.º) Calcular e . $\sqrt{3}$ para os seguintes valores:

$e=2{,}718$ com $E<0{,}001$ por falta
$\sqrt{3}=1{,}7$ com $E_2<0{,}1$ por falta
$P'=2{,}718\times1{,}7=4{,}6206$ por falta com $|E|<L$

O erro cometido em P' é inferior a $L=A_1'L_2+A_2'L_1$ (n.º 26)

$A_1'=3$ e $A_2'=2$
$L_1=0{,}001$ e $L_2=0{,}1$
$\therefore L=0{,}3+0{,}002=0{,}302<1$

Como o resultado foi obtido por falta (n.º 26) o valor aproximado de P com $|E|<1$ (sentido desconhecido) é $P'=4$.

2.º) Calcular $P=\frac{2}{3}\times\pi$ para os seguintes valores:

$\frac{2}{3}=0{,}6667$ com $E_1<0{,}0001$ por excesso

$\pi=3{,}14$ com $E_2<0{,}01$ por falta

$P'=0{,}6667\times3{,}14=2{,}093438$ sentido desconhecido (n.º 26) com $|E|<L$

Mas $L=A'_1L_2+A'_2L_1$

$A'_1=1$ e $A'_2=4$

$L=0{,}0001$ e $L=0{,}01$

$\therefore\ L=0{,}01+0{,}0004=0{,}0104<0{,}1$

Então o valor aproximado de P com $|E|<0{,}1$ é $P'=2{,}0$

Ou ainda $P'=2$ com $|E|<1$ por falta ou $P'=3$ com $|E|<1$ por excesso (n.º 5, Observação).

29. Problema inverso da multiplicação de dois números aproximados. Determinar com quantos algarismos decimais basta tomar cada fator, de um produto de 2 fatores, para obter o resultado a menos de $\frac{1}{10^n}$.

Seja P o produto de dois números N_1 e N_2.

O produto aproximado $P'=A_1\times A_2$.

Calculemos o número de decimais com que devemos tomar A_1 e A_2, para que P' esteja aproximado a menos de $\frac{1}{10^n}$.

Sendo r e s o número de algarismos de A_1 e A_2, respectivamente, temos pelo teorema n.º 25:

$$|E_1|<A'_1.\ \frac{1}{10^r}+A'_2.\ \frac{1}{10^s}$$

ou

$$|E|<\frac{A'_1}{10^r}+\frac{A'_2}{10^s}$$

Como, de acordo com o problema, devemos ter:

$$|E|<\frac{1}{10^n}\ \text{então,}\ \frac{A'_1}{10^r}+\frac{A'_2}{10^s}<\frac{1}{10^n}\ (1)$$

E o nosso problema se resume agora em determinar r e s, na desigualdade (1).

30. Exemplo.

Calcular $P=e\sqrt{2}$ a menos de $\frac{1}{10^3}$.

$e=2{,}71828$ $\sqrt{2}=1{,}41421$

Sejam r e s o número de decimais com que devemos tomar e e $\sqrt{2}$, respectivamente, e sejam $A'_1=3$ e $A'_2=2$ as cotas superiores de e e de $\sqrt{2}$.

Pela (1) do n.º 29, temos:

$$\frac{3}{10^r}+\frac{2}{10^s}<\frac{1}{10^3}$$

Para resolver essa desigualdade procederemos assim:

Podemos escrever:

$$\frac{3}{10^r}+\frac{2}{10^s}<\frac{5}{5.10^3}$$

Mas,

$$\frac{5}{5.10^3}=\frac{3}{5.10^3}+\frac{2}{5.10^3}$$

E portanto a nossa desigualdade será satisfeita se, simultaneamente, se verificarem as duas seguintes desigualdades:

$$\frac{3}{10^r}<\frac{3}{5.10^3}\ \text{e}\ \frac{2}{10^s}<\frac{2}{5.10^3}$$

Para que essas duas desigualdades se verifiquem, é necessário que o denominador da fração do primeiro membro seja maior do que o do segundo membro, isto é:

$$10^r<5.10^3\ \text{e}\ 10^s<5.10^3$$

Então, basta que:

$$10^r=10.10^3=10^4\ \text{e}\ 10^s=10.10^3=10^4$$

$$\therefore\ r=4\quad\text{e}\quad s=4$$

Cada fator deve pois ser tomado com o mesmo número quatro de decimais. Logo:

$$P'=2{,}7182\times1{,}4142=3{,}84407844$$

Como os 2 fatores estão aproximados por falta, o produto P' está também aproximado por falta (n.º 26).

E P' tomará para resultado (n.º 5, 1.º caso).

$P'=3{,}845$ com $|E|<0{,}001$ (sentido desconhecido)

31 Observação. O número de algarismos decimais, r e s, de cada fator é sempre igual. Portanto, o problema n.º 29 se resume a determinar o número, comum, de decimais de cada fator.

Convém que, sempre que for possível, os valores aproximados dos fatores sejam tomados no mesmo sentido.

32. Produto de m números aproximados ($m>2$). Efetuamos o produto dos dois primeiros fatores; o produto obtido multiplicamos pelo terceiro fator e assim sucessivamente.

Se $m=3$, chamando de L_1, L_2 e L_3 as cotas superiores de erro absoluto de cada fator e de A_1', A_2' e A_3' as cotas superiores dos valores aproximados, o produto será calculado com:

$$|E|<A_1'A_2'L_3+A_1'A_3'L_2+A_2'A_3'L_1 \qquad (1)$$

E assim sucessivamente, teríamos, para m fatores $P'=A_1A_2\ldots A_m$, com

$$|E|<A_1'A_2'\ldots A_{m-1}'L_m+A_1'A_2'\ldots L_{m-1}A_m'+\ldots+$$
$$+L_1A_2'A_3'\ldots A_m' \qquad (2)$$

DIVISÃO

33. Teorema.

> O módulo do erro absoluto do quociente de dois números aproximados é inferior a uma fração, cujo numerador é a soma dos produtos de um limite superior, de cada um dos termos, pelo limite superior do erro absoluto do outro termo, e cujo denominador é o quadrado de um limite inferior do divisor.

Sejam N_1 e N_2 dois números exatos cujo quociente é Q e sejam A_1 e A_2 dois números aproximados de N_1 e N_2, cujo quociente é Q', cujos limites superiores de erro são L_1 e

L_2, cujas cotas superiores são A_1' e A_2' e cuja cota inferior do divisor A_2 é A_2''.

Temos:
$$N_1=A_1+E_1$$
$$N_2=A_2+E_2$$
$$\therefore \frac{N_1}{N_2}=\frac{A_1+E_1}{A_2+E_2}$$

$$\text{e } |E|=\left|\frac{N_1}{N_2}-\frac{A_1}{A_2}\right|=\left|\frac{A_1+E_1}{A_2+E_2}-\frac{A_1}{A_2}\right|=\left|\frac{A_1A_2+A_2E_1-A_1A_2-A_1E_2}{A_2(A_2\times E_2)}\right|$$

$$\therefore |E|=\left|\frac{A_2E_1-A_1E_2}{A_2(A_2+E_2)}\right|$$

Um limite superior de $|E|$ pode ser obtido tomando um limite superior do numerador $A_2L_1-A_1L_2$, e um limite inferior do denominador $A_2(A_2+L_2)$, pois, evidentemente, aumentando o numerador e diminuindo o denominador da fração do 2.º membro de (I), ela aumentará.

Logo, podemos escrever:

$$|E|<\frac{A_2'L+A_1'L_2}{(A_2'')^2} \qquad \text{(II)}$$

pois $A_2'L_1+A_1'L_2>A_2E_1-A_1E_2$ e $(A_2'')^2<A_2(A_2+E_2)=$
$=A_2^2+A_2E_2$

34. Observação. Quando, no teorema anterior, os dois números aproximados, A_1 e A_2, estão no mesmo sentido, o sentido do erro de aproximação do quociente Q' é desconhecido; quando os dois números A_1 e A_2, estão aproximados em sentido contrário, um aproximado por falta e outro por excesso portanto, então o quociente Q' estará aproximado no mesmo sentido que o dividendo A_1.

35. Problema direto da divisão. Dados os limites superiores L_1 e L_2 dos erros absolutos de dois números aproximados, A_1 e A_2, achar um limite superior L do erro absoluto cometido no quociente Q'.

Pelo teorema n.º 33, podemos calcular esse resultado Q' com $|E|<L$, sendo L da forma $\frac{1}{10^n}$. Exemplos:

1.º) Calcular $Q=\frac{\sqrt{2}}{\pi}$, tomando para valores aproximados:

$\sqrt{2}=1{,}414$ com $|E|<0{,}001$ por falta

$\pi=3{,}1416$ com $|E|<0{,}0001$ por excesso

O erro do quociente Q' tem para limite superior L, sendo, de acordo com (II) do n.º 33

$$L\geq\frac{A'_2L_1+A'_1L_2}{(A''_2)^2}$$

Mas, $A'_1=2$ $A'_2=4$ $L=0{,}001$ $L_2=0{,}0001$ e $A''_2=3$

$$\therefore\quad L\geq\frac{0{,}004+0{,}0002}{9}=\frac{0{,}0042}{9}$$

Como $\frac{0{,}0042}{9}<0{,}0005<0{,}001$

Então $L=0{,}001$

Temos: $1{,}414+3{,}1416=0{,}45008$

Como o dividendo está aproximado por falta o quociente Q' terá o mesmo sentido. Logo

$Q'=0{,}451$ com $|E|<0{,}001$ (sentido desconhecido).

2.º) Calcular $Q=\frac{\sqrt{2}}{\pi}$, tomando para valores aproximados:

$\sqrt{2}=1{,}414$ com $|E|<0{,}001$ por falta

$\pi=3{,}1415$ com $|E|<0{,}0001$ por falta

Procedendo de modo análogo aos exemplos anteriores, temos: $L=0{,}001$ e $1{,}414+3{,}1415=0{,}4501$

Como o dividendo e o divisor estão aproximados no mesmo sentido, o sentido do quociente é desconhecido (n.º 34) e

$Q'=0{,}450$ com $|E|<0{,}001$ (sentido desconhecido).

Ou, de acordo com (n.º 5, observação), temos:

$Q'=0{,}45$ por falta com $|E|<0{,}01$

ou $Q'=0{,}46$ por excesso com $|E|<0{,}001$

36. Problema inverso da divisão. Determinar quantos algarismos decimais é suficiente tomar cada termo da divisão para obter o quociente a menos de $\frac{1}{10^n}$.

Sejam r e s os números de decimais que é preciso tomar no dividendo e no divisor, respectivamente, para obter o quociente a menos de $\frac{1}{10^n}$.

Temos, pela (II) do n.º 33:

$$|E|<\frac{A'_1\times\frac{1}{10^r}+A'_2\times\frac{1}{10^s}}{(A''_2)^2}$$

Como $|E|$ deve ser menor do que $\frac{1}{10^n}$, basta para resolvermos nosso problema, determinar r e s de modo que:

$$\frac{A'_1\cdot\frac{1}{10^r}+A'_2\cdot\frac{1}{10^s}}{(A''_2)^2}<\frac{1}{10^n}$$

Por facilidade, convém que tomemos o dividendo A_1 por falta, e o divisor A_2 por excesso, e assim obteremos o quociente Q', por falta.

37. Exercício.

Calcular $Q=\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ a menos de 0,001

$\sqrt{2}=1{,}41421$

$\pi=3{,}14159$

Vejamos com quantas decimais r devo tomar $\sqrt{2}$ e com quantas decimais s devo tomar π.

Devemos ter, conforme n.º 36, e sabendo que

$A'_1=2$ $A'_2=4$ $A''_2=3$

$$\frac{\frac{2}{10^r}+\frac{4}{10^s}}{9}<\frac{1}{10^3}\quad\therefore\quad\frac{2}{10^r}+\frac{4}{10^s}<\frac{9}{10^3}.$$

Mas $\qquad\frac{9}{10^3}<\frac{1}{10^3}$

$$\therefore\quad\frac{2}{10^r}+\frac{4}{10^s}<\frac{1}{10^3}=\frac{6}{6.10^3}$$

$$\therefore\quad\frac{2}{10^r}+\frac{4}{10^s}<\frac{2}{6.10^3}+\frac{4}{6.10^3}.$$

Para que essa desigualdade seja satisfeita devemos ter

$$\begin{cases} \frac{2}{10^r} < \frac{2}{6.10^3} & \therefore \quad 10^r > 6.10^3 \\ \frac{4}{10^r} < \frac{4}{6.10^3} & \therefore \quad 10^r > 6.10^3 \end{cases}$$

Basta pois que $\begin{cases} 10^4 = 10.10^3 = 10^s & \therefore \quad s = 3 \\ 10^r = 10.10^3 = 10^3 & \therefore \quad r = 3 \end{cases}$

Sempre $r = s$.

Tomemos:

$\sqrt{2} = 1{,}414$ por falta e $\pi = 3{,}142$ por excesso

$1{,}414 + 3{,}142 = 0{,}45003$

$\therefore \quad Q' = 0{,}451$ com $|E| < 0{,}001$ (sentido desconhecido).

38. Exercícios para resolver.

1) Calcular a soma $S = \pi + \sqrt{3} + \frac{2}{7}$

para os seguintes valores:

$\pi = 3{,}14159$ com $|E_1| < 0{,}00001$ por falta

$\sqrt{3} = 1{,}7320$ com $|E_2| < 0{,}0001$ por falta

$\frac{2}{7} = 0{,}28571$ com $|E_3| < 0{,}00001$ por falta

2) Calcular a soma $\sqrt{2} + \pi + \frac{1}{3} + \frac{17}{7}$

todas as parcelas com $|E| < 0{,}001$ por falta.

3) Calcular a soma $\sqrt{2} + \pi + \frac{1}{3} + \frac{17}{7}$

todas as parcelas com $|E| < 0{,}01$ por excesso.

4) Calcular a soma $\pi + e + \frac{5}{11}$ utilizando 3 algarismos decimais exatos em cada parcela e avaliar o erro cometido.

5) Calcular a soma $\pi + \frac{2}{7} + \sqrt{3}$ aproximada por falta com erro menor do que 0,001.

6) Calcular a soma $\pi + e + 3{,}5[24]$ com erro menor do que 0,01.

7) Achar a soma $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ com $|E| < 0{,}01$ tomando os valores das parcelas aproximadas por falta.

8) Calcular $\frac{22}{7} - \pi$

tomando $\frac{22}{7}$ com $|E_1| < 0{,}00001$ por falta e π com $|E_2| < 0{,}0001$ por excesso, e dizendo a aproximação do erro cometido.

9) Calcular $\pi - \sqrt{5}$

tomando π e $\sqrt{5}$ aproximados por falta com erro menor do que 0,001.

10) Calcular a diferença $e - \frac{1}{\pi}$ a menos de 0,001 e tomando os dois termos aproximados por falta.

11) Calcular $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ a menos de 0,001.

12) Calcular $\pi - e$ com erro menor do que 0,0001 e sentido desconhecido.

13) Calcular $\pi - e$ com $|E| < 0{,}001$ por falta.

14) Calcular $\pi - e$ com $|E| < 0{,}001$ por excesso.

15) Calcular $\pi \sqrt{2}$ tomando π aproximado, por falta, com $|E| < 0{,}00001$ e $\sqrt{2}$ aproximado por falta, com $|E| < 0{,}0001$. Dizer a aproximação e o sentido do resultado.

16) Achado o resultado do exercício anterior, determine esse resultado aproximado por falta e o mesmo resultado aproximado por excesso, dizendo em ambos os casos o grau de aproximação.

17) Com quantos algarismos exatos obteremos o produto de $\pi \times e$ quando tomamos o número π com quatro algarismos exatos e e com três?

18) Calcular $\pi \sqrt{10}$ a menos de 0,001.

19) Com quantos algarismos exatos devemos tomar os fatores da multiplicação $\pi \times e$ para obter o resultado com 3 algarismos exatos?

20) Calcular $\pi \sqrt{2}$ a menos de 0,001.

21) Calcular $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ tomando $\sqrt{3} = 1{,}732$ e $\pi = 3{,}1416$ e dizendo o limite do erro do resultado e seu sentido.

22) Os números $N_1 = 3{,}41758$ e $N_2 = 2{,}64938$ têm cada um quatro algarismos exatos (3 decimais exatas). Qual o limite do erro absoluto de seu quociente?

23) Com quantos algarismos exatos deveremos tomar os termos da divisão $\frac{\pi}{e}$ para que o quociente tenha $|E| < 0{,}001$?

24) Calcular $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ aproximado por falta e com $|E| < 0{,}001$ (sentido desconhecido).

25) Calcular $\frac{1}{e}$ a menos de 0,0001.

26) Calcular $\frac{1}{\pi}$ a menos de 0,001.

27) Calcular $\sqrt{2} + 0{,}364257$ a menos de 0,01.

Respostas:

1) 5,160 com $|E|<0{,}001$ (sentido desconhecido)
2) 7,32 com $|E|<0{,}01$ (sentido desconhecido)
3) 7,3 com $|E|<0{,}1$ (sentido desconhecido)
4) 6,32 com $|E|<0{,}01$ (sentido desconhecido)
5) 5,159 6) 9,40 7) 5,56
8) 0,002 com $|E|<0{,}001$ (sentido desconhecido)
9) 0,905 11) 0,822 13) 0,423
10) 2,400 12) 0,423 5 14) 0,424
15) 4,443 com $|E|<0{,}001$ e sentido desconhecido
16) 4,44 por falta e 4,45 por excesso, ambos com $|E|<0{,}01$
17) 3 18) 9,935 19) 4 20) 4,443
21) 0,552 com $|E|<0{,}001$ e sentido desconhecido
22) 0,01 24) 0,552 26) 0,318
23) 3 25) 0,367 1 27) 3,89.

II — ÁLGEBRA

CAPÍTULO II

Progressões

Progressões Aritméticas

1. Definições. 1. Progressão aritmética é uma sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo, é igual ao precedente mais um número relativo constante não nulo.

Representa-se o fato de que os números $a_1, a_2, \ldots a_n$ estão em progressão aritmética assim:

$$: a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots . \, a_{n-1} \,.\, a_n$$

Exemplos: $: 2.\ 5.\ 8.\ 11. \ldots 44.\ 47$ (1)

$: 7.\ 5.\ 3.\ 1. - 1. \ldots - 33$ (2)

2. Os números que formam a progressão chamam-se *termos*. Indica-se o número de termos com a letra n.

3. O número relativo que se soma a cada termo para obter o termo seguinte chama-se *razão*.

Representa-se com a letra r. No exemplo (1) $r = 3$ e no exemplo (2) $r = -2$.

4. A progressão aritmética diz-se *crescente* ou *decrescente* conforme a razão seja positiva ou negativa.

A progressão (1) é crescente e a progressão (2) é decrescente.

5. A progressão aritmética pode ser *limitada* ou *ilimitada* conforme possua um número finito ou infinito de termos.

6. Dois termos de uma progressão aritmética limitada chamam-se *eqüidistantes dos extremos* quando o número de

termos que precedem um deles é igual ao número de termos que seguem o outro.

Assim na progressão

$$: a_1 \,.\, a_2 \ldots a_{k+1} \ldots a_{n-k} \ldots a_{n-1} \,.\, a_n$$

a_{k+1} e a_{n-k} são eqüidistantes dos extremos pois há k termos precedendo a_{k+1} e k termos seguindo a_{n-k}.

7. *Interpolar* ou *inserir* m meios aritméticos entre dois números a e b é formar uma progressão aritmética de $m+2$ termos, cujos termos extremos sejam a e b.

2. Propriedades.

PRIMEIRA PROPRIEDADE: *Em uma progressão aritmética a diferença entre um termo e o seu precedente é constante e igual à razão.*

Essa propriedade é uma conseqüência da definição 1.

SEGUNDA PROPRIEDADE: *Cada termo de uma progressão aritmética, excetuando os termos extremos, é a média aritmética entre o termo precedente e o seguinte.*

Seja a_i um termo de uma progressão aritmética de razão r.

Temos que a_{i-1} é o termo precedente e a_{i+1} é o termo seguinte.

Sabemos, pela propriedade anterior, que:

$$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i$$

Donde

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$$

TERCEIRA PROPRIEDADE: *Cada termo de uma progressão aritmética, a partir do segundo é igual ao primeiro termo aumentado do produto da razão pelo número de termos que o precedem.*

Temos, pela definição 1,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando, membro a membro, essas $n-1$ igualdades e eliminando os termos comuns aos dois membros dessa soma, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \text{(A)}$$

que é a expressão do *termo geral*.

OBSERVAÇÃO: Esta propriedade permite, dados três dos quatro elementos (a_1, a_n, n e r) calcular o quarto elemento, mediante a fórmula (*A*) e suas fórmulas derivadas, que apresentaremos a seguir.

Fórmulas:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \quad \text{(A)}$$

$$\boxed{a_1 = a_n - (n_1 - 1)r} \quad \text{(B)}$$

$$\boxed{r = \frac{a_n - a_1}{n-1}} \quad \text{(C)}$$

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1} \quad \text{(D)}$$

3. Exercícios.

1) Achar o vigésimo termo da progressão

$$: 6 . 11 . 16 \ldots$$

Empregando a fórmula (*A*), como $a_1 = 6$, $n = 20$ e $r = 11 - 6 = 5$, temos:

$$a_{20} = 6 + 19 \times 5 = 101$$

2) Qual o primeiro termo de uma progressão aritmética de 50 termos cujo último termo é -103 e a razão é -2?

Pela fórmula (*B*), temos:

$$a_1 = -103 - 49 \times (-2) = -5$$

3) Qual a razão de uma progressão aritmética de 23 termos cujo primeiro termo é 8 e o último é 74?

De acordo com a fórmula (*C*), obtemos

$$r = \frac{74 - 8}{23 - 1} = 3$$

4) Quantos múltiplos de 7 há nos 700 primeiros números naturais?
Evidentemente $r=7$, $a_1=7$ e $a_n=700$
Aplicando a fórmula (D) obtemos

$$n=\frac{700-7}{7}+1=100$$

5) Interpolar 8 meios aritméticos entre 11 e 47.
De acordo com a definição temos de escrever uma progressão aritmética de 10 termos.
São dados: $a_1=11$, $a_n=47$ e $n=8+2=10$
Empregando a fórmula (C), temos:

$$r=\frac{47-11}{10-1}=4$$

E a progressão será:

$$:11.15.19.23.27.31\ 35\ 39\ 43.47$$

6) O terceiro termo de uma progressão aritmética é 21 e o oitavo é 6. Calcular o vigésimo termo.
Sendo a_1 o primeiro termo e r a razão da progressão, temos:

$$\begin{matrix}a_1+2r=21\\ a_1+7r=6\end{matrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$r=-3 \text{ e } a_1=27$$

Então, $a_{20}=27+19\times(-3)=-30$

7) Qual a diferença entre um termo qualquer e o seu precedente em uma progressão aritmética cuja diferença entre o sétimo e o quinto termos é 8?
Pela primeira propriedade essa diferença é a razão r.
Podemos escrever:

$$(a_1+6r)-(a_1+4r)=8 \qquad 2r=8 \text{ e } r=4$$

8) Qual o perímetro de um triângulo retângulo de $24m^2$ de área, cujos lados estão em progressão aritmética?
Sejam a, b e c os lados do triângulo e $a>b>c$.
Sabemos da geometria elementar que

$$\frac{bc}{2}=24 \text{ ou } bc=48 \text{ e } b^2+c^2=a^2$$

Como a, b e c estão em progressão aritmética, pela segunda propriedade, podemos escrever:

$$b=\frac{a+c}{2} \text{ ou } a+c=2b$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases}a+c=2b\\ b^2+c^2=a^2\\ bc=48\end{cases}$$

obtemos: $a=10m$; $b=8m$ e $c=6m$.

QUARTA PROPRIEDADE: *Em uma progressão aritmética, limitada a soma dos termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.*

Sejam a_{k+1} e a_{n-k} dois termos eqüidistantes dos extremos da progressão

$$:a_1 . a_2 \ldots a_n \text{ de razão } r$$

Temos pelas fórmulas (A) e (B):

$$\begin{matrix}a_{k+1}=a_1+kr\\ a_{n-k}=a_n-kr\end{matrix}$$

Somando membro a membro obtemos

$$a_{k+1}+a_{n-k}=a_1+a_n$$

QUINTA PROPRIEDADE: *Em uma progressão aritmética limitada de número ímpar de termos, o termo do meio é a média aritmética dos extremos.*

É fácil sua comprovação tendo em vista esta última propriedade e a segunda.

SEXTA PROPRIEDADE: *A soma dos termos de uma progressão aritmética.*

$$:a_1 . a_2 \ldots a_{n-1} . a_n \text{ de razão } r$$

é dada pela expressão:

$$S=\frac{(a_1+a_n)\,n}{2}$$

A soma dos termos da progressão é:

$$S=a_1+a+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

ou

$$S=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1$$

Somando, membro a membro, essas igualdades, temos:

Se n é par $2S=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+$
$+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$

Obtivemos n expressões, entre parênteses, todas pela quarta propriedade, iguais a a_1+a_n

$$\therefore\ 2S=(a_1+a_n)n \text{ ou } S=\frac{(a_1+a_n)\,n}{2}$$

(Se n é ímpar também é válida a relação)

EXERCÍCIOS

1) Qual a soma dos 100 primeiros termos da progressão : 7.13.19 ... ?
Sabemos que: $a_1=7$, $r=6$ e $n=100$.

Para empregar a fórmula $S=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$

falta calcular a_n.

Mas, $a_{100}=7+99\times6=601$.

Logo $S=\frac{7+601}{2}\times100=30400$.

2) Qual a expressão que dá a soma dos n primeiros números naturais?
Temos que: $a_1=1$, $a_n=n$, $n=n$.

Então: $$S=\frac{(n+1)n}{2}$$

3) Em uma progressão aritmética, a soma do terceiro e sétimo termos é 30 e a soma do sexto e nono termos é 15. Calcular a soma dos doze primeiros termos.

Temos: $\begin{matrix}a_1+2r+a_1+6r=30 \\ a_1+5r+a_1+8r=15\end{matrix}$ ou $\begin{matrix}a_1+4r=15 \\ 2a_1+13r=15\end{matrix}$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$r=-3 \text{ e } a_1=27$$

Como $a_{12}=27+11\times(-3)=-6$

$$S=\frac{27-6}{2}\times12=126$$

4) Deduzir a expressão da soma em função de a_1, n e r.
Na expressão

$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$$

tendo em conta que $a_n=a_2+(n-1)r$, obtemos

$$\frac{a_1+a_1+(n-1)r}{2}\times n=na_1+\frac{(n-1)nr}{2}$$

QUESTÕES DE CONCURSOS E ALGUNS PROBLEMAS CLÁSSICOS COM SOLUÇÃO

1) Achar 4 números, em progressão aritmética, sabendo-se que sua soma é 26 e que a soma de seus quadrados é 214.

(E. Militar – 1932).

Chamando de x o primeiro dos números e r a razão, podemos fazer o sistema:

$$\begin{cases} x+(x+r)+(x+2r)+(x+3r)=26 \\ x^2+(x+r)^2+(x+2r)^2+(x+3r)^2=214 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2x+3r=13 \\ 4x^2+12rx+14r^2=214 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos duas soluções:

$$r=3,\ x=2$$
$$r=3,\ x=11$$

Mas, para os dois casos, os números serão: 2, 5, 8 e 11.

2) A soma de 5 números, reais e inteiros, em progressão aritmética é 25 e o produto – 880. Determinar esses números.

(E. Aeronáutica – 1945).

Chamando de x o termo médio, o que é sempre aconselhável fazer desde que o problema seja com um número ímpar de termos, temos:

$$\begin{cases} (x-2r)+(x-r)+x+(x+r)+(x+2r)=25 \\ (x-2r)(x-r)x(x+r)(x+2r)=-880 \end{cases}$$

onde r é a razão.

Resolvendo o sistema temos

$$r=\pm3$$

Para $r=3$, $x=1$ e para $r=-3$, $x=11$
Em qualquer caso, os números são: –1, 2, 5, 8, 11.

3) Verificar que o quadrado das expressões

$$x^2-2x-1,\ x^2+1,\ x^2+2x-1$$

estão em progressão aritmética.

(Fac. de Engenharia Industrial da Pontif. U. Cat. de S. Paulo – 1951).

É fácil a verificação. Basta elevar ao quadrado as 3 expressões e constatar que o quadrado da segunda expressão é a metade da soma dos quadrados das outras duas e, portanto, pela segunda propriedade, as 3 expressões estão em progressão aritmética.

4) Escrever a progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é $n(3n+1)$ qualquer que seja o valor de n.

Já vimos que a soma dos termos de uma progressão aritmética pode ser dada pela expressão

$$S = na_1 + \frac{(n-1)rn}{2}$$

$$\therefore\ na_1 + \frac{(n-1)rn}{2} = 2n^2 + n$$

$$\therefore\ (6-r)n^2 + (2+r-2a_1)n = 0$$

Ora, se o primeiro membro é nulo para qualquer valor de n, então:

$$6-r=0 \quad e \quad 2+r-2a_1=0$$

$$\therefore\ r=6 \quad e \quad a_1=4$$

A progressão será:

$$:4.10.16\ldots2(3n-1)$$

5) Em um paralelepípedo retângulo de $22m^2$ de área total a soma de todas as suas arestas é 24m. Achar as dimensões desse paralelepípedo sabendo-se que estão em progressão aritmética.

Chamando de a, b, c as dimensões do sólido, sendo $a<b<c$.

Temos da geometria elementar

$$2ab+2ac+2bc=22 \quad e \quad 4a+4b+4c=24$$

E, pela segunda propriedade, temos que

$$b = \frac{a+c}{2} \quad ou \quad a+c=2b$$

Podemos então formar o sistema

$$\begin{cases} ab+ac+bc=11 \\ a+b+c=6 \\ a+c=2b \end{cases}$$

Resolvendo: $a_1=1$ e $a_2=3$ (a segunda raiz não satisfaz)

$$\therefore\ a=1 \quad e \quad c=3$$

As dimensões do paralelepípedo são: 1m, 2m e 3m.

4. Exercícios para resolver.

1) Achar o décimo quinto termo da progressão

$$:7.15.23\ldots$$

2) Calcular o trigésimo termo da progressão

$$:72.66.60\ldots$$

3) Qual o primeiro termo de uma progressão aritmética cujo vigésimo termo é 72 e o termo precedente é 65?

4) Calcular o primeiro termo de uma progressão aritmética sabendo-se que $a_{17}=248$ e $r=4$.

5) Qual a razão de uma progressão aritmética de 36 termos cujo primeiro termo é 25 e o último é 725?

6) Calcular r sabendo-se que $a_1 = 7$ e $a_{19}=385$.

7) Quantos termos possui uma progressão aritmética cuja razão é 9, o último termo é 85 e o primeiro é 4?

8) Calcular n sabendo-se que: $a_1=2$, $r=1\frac{1}{2}$ e $a_n=20$.

9) Calcule a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 1 e 1000.
(Engenharia – GB – 1966 e UEG – 72).

10) Calcular a soma dos 22 primeiros termos da progressão aritmética sabendo-se que $a_1=7$ e $a_{22}=70$.

11) Calcular a soma dos 100 primeiros termos da progressão

$$:0{,}3\ 0{,}7.1{,}1\ldots$$

12) Em uma progressão aritmética $a_3=13$ e $a_{10}=55$. Calcular a_5.

13) Em uma progressão aritmética de 10 termos a soma do primeiro com o último é 58 e a diferença é 45.
Calcular o sétimo termo sabendo-se que o primeiro termo é maior do que o segundo.

14) Em uma progressão aritmética de 11 termos o primeiro excede o último de meia centena. Escreva essa progressão sabendo-se que o sexto termo é 36.

15) Se $(x+y)$ $(a+3x)$ e $(x-y)$ estão em progressão aritmética, nesta ordem, então x é igual a
(UGF – 73).

16) Em uma progressão aritmética o primeiro termo é 2 e a razão é 7. Quantos termos devemos tomar para que a soma seja 335?

17) O primeiro termo de uma progressão aritmética é – 10. Escreva essa progressão sabendo-se que a razão, o número de termos e o último termo são números consecutivos.
(Psicologia – UFRJ – 69)

18) A soma dos cinco primeiros termos de uma progressão aritmética é 220 e o primeiro termo é 28. Calcule a razão.
(U.E.C. – 1972).

19) O sétimo termo de uma progressão aritmética é igual a 20 e o décimo terceiro a 38. Achar o vigésimo termo.
(E. N. Química – Rio – 1946).

20) Em uma progressão aritmética tem-se $a_4=\frac{33}{20}$ e $a_{11}=\frac{75}{20}$. Calcular S_{20}.
(E. Aeronáutica – C. Prévio Oficiais Reserva – 3.ª época).

21) Em uma progressão aritmética $a_1=25$ e $S_3=105$. Calcular r.

22) Em uma progressão aritmética $a_n=10$, $r=\frac{1}{2}$ e $S_n=72$. Achar n.

23) Em uma progressão aritmética $a_1=51, r=-3$ e $S_n=456$. Achar n.

24) Calcular a soma dos 50 primeiros números ímpares.
(U. Gama Filho – 1972).

25) A soma dos p primeiros números ímpares é igual a .
(COMSART – 73 – GB)

26) Deduza a expressão da soma dos n primeiros números pares inteiros.

27) O primeiro termo de uma progressão aritmética é 5 e o último é 35. Escrever a progressão sabendo-se que o número de termos é igual à razão.

28) A soma do 4.º e 8.º termos de uma P.A. é 20; o 31.º é o dobro do 16.º termo. Determine a P.A.
(FGV – 73 – S. P.)

29) Calcular o quinto termo de uma progressão aritmética sabendo que o quarto termo é $3m-1$ e o nono termo é $8m+9$.

30) Interpolar 9 meios aritméticos entre $y-6x$ e $4x+y$.

31) A soma das arestas que concorrem em um mesmo vértice de um paralelepípedo retângulo é 15m. O volume desse paralelepípedo é 105m³. Achar a área total desse paralelepípedo sabendo que suas arestas estão em progressão aritmética.

32) O terceiro termo de uma progressão aritmética é 39 e o nono é 9. Ache a soma dos 13 primeiros termos.
(Colégio Naval – 1.ª P. Parcial – 3.º Científico – 1951).

33) Achar o perímetro de um triângulo retângulo de 6m² de área sabendo que os lados do triângulo estão em progressão aritmética.

34) Achar os ângulos internos de um triângulo retângulo, sabendo que eles estão em progressão aritmética.

35) O quinto e o nono termos de uma progressão aritmética são respectivamente as raízes de $x^2-8x-20=0$. Calcular o menor termo positivo. (Colégio Aplicação da Faculdade Nacional Filosofia – 1953).

36) Calcular o terceiro termo de uma progressão aritmética sabendo que o quinto e o oitavo termos são as raízes da equação
$$x^2-7ax+10a^2=0$$

37) Calcular a soma dos múltiplos de 9 compreendidos entre 65 e 249.

38) A soma dos números inteiros e consecutivos de $p+1$ a $p+12$, sendo p um natural, é igual a . . . . (E. Flu. Mag. – 1957).

39) Calcular a soma de todos os números de dois algarismos que divididos pelo maior número de um algarismo dão sempre o maior resto possível.

40) Calcular a razão e o primeiro termo de uma progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é igual a $3n^2$, qualquer que seja o valor de n.

41) A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é n^2+4n. Então, o termo geral dessa P.A. é . . .
(CESCEA – 73 – S. P.)

42) Em uma progressão aritmética, a soma do quarto e sétimo termos é 42 e a soma do quinto e décimo termos é 58. Calcular a soma dos doze primeiros termos. (U.R.G. – 1972).

43) Um corpo, em sua queda, percorre 4,5m no primeiro segundo e, em cada segundo que se segue, a distância percorrida vai aumentando constantemente de 9,8m. Qual a altura da queda após 11 segundos e quantos metros percorreu o corpo no último segundo?

44) A soma dos 4 termos do meio de uma progressão aritmética de 12 termos é 74. O produto dos extremos é 70. Qual é a progressão?

45) Os lados de um triângulo de 12m de perímetro estão em progressão aritmética. Calcular os lados desse triângulo sabendo que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os seus lados é 50m².

46) Um oficial que comanda 1 540 soldados quer formá-los em triângulo de modo que a primeira fila tenha um soldado, a segunda 2, a terceira 3 e assim por diante. Quantas filas ele formará?

47) Provar que a soma dos n primeiros termos da progressão
$$: \frac{n-1}{n} , \frac{n-2}{n} , \frac{n-3}{n} \ \ldots$$
é a metade do consecutivo inferior de n.

48) Da fórmula $S=\frac{(a+L)n}{2}$ obter o valor de L em função dos demais.
(Com. de admissão às N. Prep. Cadetes do Exército – 1962).

49) Deduza a fórmula que dá a soma dos n primeiros números pares inteiros e positivos.

50) Provar que se vários números estão em progressão aritmética as diferenças entre os quadrados de cada termo dessa progressão e os quadrados dos termos precedentes também constituem uma progressão aritmética.

RESPOSTAS:

1) 119
2) −102
3) −61
4) 184
5) 20
6) 21
7) 10
8) 13
9) 45045
10) 847
11) 2 010
12) 31
13) 19
14) : 61 . 56 . . . 11
15) $-\frac{a}{2}$
16) 10
17) : −10 . −6 . −2 . . .
18) 8
19) 59
20) 72
21) −2
22) 9 ou 32
23) 16 ou 19
24) 2 500
25) p^2
26) $n(n-1)$
27) : 5 . 11 . 17 . 23 . 29 . 35
28) : 0 . 2 . 4 . . . .
29) $4m+1$

30) : $y-6x$, $y-5x$, $y-4x$, $y-3x$, $y-2x$, $y-x$, y, $y+x$, $y+2x$, $y+3x$, $y+4x$

31) $142m^2$ 37) 3 150 43) 588,5m e 102,5m

32) 247 38) $12p+78$ 44) : 2 5.8... 35

33) 12m 39) 575 45) 3m, 4m, 5m

34) 90°, 30° e 60° 40) $r=6$; $a_1=3$ 46) 55

35) 1 41) $2n+3$

36) 0 ou 7a 42) 300

47) Basta calcular a_n e substituir na fórmula da soma

48) $L=\frac{2S}{n}-a$ 49) $n(n+1)$

50) É fácil de ver que a diferença dos quadrados dos termos é constante

Progressões Geométricas

1. Definições. 1. Progressão geométrica é uma sucessão de números tais que cada um, a partir do segundo, é igual ao precedente multiplicado por um número relativo constante, diferente de zero e da unidade.

Representa-se o fato de que os números $a_1, a_2, \ldots a_n$ estão em progressão geométrica assim:

$$::a_1:a_2:\ldots:a_{n-1}:a_n$$

Exemplos: $::5:10:20:\ldots:320$ (1)

$::243:81:27:\ldots:1$ (2)

2. Os números que formam a progressão chamam-se *termos*. Indica-se o número de termos com a letra n. *Não serão estudadas as progressões geométricas de termos negativos.*

3. O número relativo pelo qual se multiplica cada termo para obter o seguinte chama-se *razão*.

Representa-se com a letra q. *Não serão estudadas as progressões geométricas de razão negativa.*

No exemplo (1) $q=2$ e no exemplo (2) $q=\frac{1}{3}$.

4. A progressão geométrica diz-se *crescente* ou *decrescente* conforme a razão seja maior do que um ou menor do que um (positivo).

A progressão (1) é crescente e a progressão (2) é decrescente.

5. A progressão geométrica diz-se *limitada* ou *ilimitada* conforme possua um número finito ou infinito de termos.

6. Dois termos de uma progressão geométrica limitada chamam-se *eqüidistantes dos extremos* quando o número de termos que precedem um deles é igual ao número de termos que seguem o outro.

7. *Interpolar* ou *inserir* m meios geométricos entre dois números a e b é formar uma progressão geométrica de $m+2$ termos, cujos extremos sejam a e b.

2. Propriedades.

PRIMEIRA PROPRIEDADE: *Em uma progressão geométrica a divisão de um termo qualquer pelo seu precedente é constante e igual à razão.*

Essa propriedade é uma conseqüência da definição 1.

SEGUNDA PROPRIEDADE: *Cada termo de uma progressão geométrica, excetuando os termos extremos, é a média geométrica entre um termo precedente e o seguinte.*

Seja a_i um termo genérico de uma progressão geométrica. Temos que a_{i-1} é o termo que precede a_i e a_{i+1} o termo que o segue.

Sabemos pela propriedade anterior que:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}}=\frac{a_{i+1}}{a_i} \quad \therefore \quad a_i^2=a_{i-1}\times a_{i+1}$$

TERCEIRA PROPRIEDADE: *Cada termo de uma progressão geométrica, a partir do segundo, é igual ao primeiro termo multiplicado pela razão elevada a um expoente igual ao número de termos que o precede.*

Temos pela definição 1,

$$\begin{aligned} a &= a_1 q \\ a_2 &= a_2 q \\ a_4 &= a_3 q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} q \\ a_n &= a_{n-1} q \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro essas $n-1$ igualdades e eliminando os fatores comuns aos dois membros, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (E)$$

que constitui a expressão do *termo geral*.

Observação: Esta propriedade permite, dados três dos quatro elementos (a_1, a_n, q e n) calcular o quarto elemento, mediante a fórmula (*E*) e suas fórmulas derivadas, que apresentaremos a seguir.

Fórmulas:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \quad (E)$$

$$\boxed{a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}} \quad (F)$$

$$\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}} \quad (G)$$

A fórmula derivada de (E) que permite calcular n não pode ser estabelecida agora, pois requer o conhecimento dos logaritmos.

Será apresentada na unidade seguinte.

Podemos todavia, em muitos casos, calcular n mediante a fórmula (E).

3. Exercícios.

1) Achar o décimo termo da progressão

$$:: 3 : 9 : 27 \ldots$$

Empregando a fórmula (*E*), como $a_1 = 3$, $n = 10$ e $q = 3$, temos:
$a_{10} = 3 \times 3^9 = 3^{10} = 59\,049$

2) Qual o primeiro termo de uma progressão geométrica de 9 termos cujo último termo é 78 125 e a razão é 5?

Pela fórmula (*F*) temos:

$$a_1 = \frac{78\,125}{5^6} = \frac{5^7}{5^6} = \frac{1}{5}$$

3) Qual a razão de uma progressão geométrica de 5 termos cujo primeiro termo é $\frac{2}{3}$ e o último é $\frac{54}{2\,401}$?

De acordo com a fórmula (*G*), temos:

$$q = \sqrt[4]{\frac{54}{2\,401} : \frac{2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{81}{2\,401}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{7^4}} = \frac{3}{7}$$

4) Em uma progressão geométrica, cuja razão é 2, o primeiro termo é 4 e o último 512. Qual o número de termos?

Empregando a fórmula (*E*), temos:

$$512 = 4 \times 2^{n-1} \quad \therefore \quad 2^9 = 2^2 \times 2^{n-1} \quad \text{ou} \quad 2^9 = 2^{n+1}$$

Logo $n+1 = 9$ e $n = 8$.

5) Inserir 3 meios geométricos entre 16 e 81.

De acordo com a definição temos de escrever uma progressão geométrica de 5 termos.

São dados: $a_1 = 16$, $a_n = 81$ e $n = 5$.

Empregando a fórmula (*G*), obtemos:

$$q = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}}$$

Como estamos considerando apenas $q > 0$, temos $q = \frac{3}{2}$.

E a progressão será:

$$:: 16 : 24 : 36 : 54 : 81$$

6) O terceiro termo de uma progressão geométrica é 2 e o sétimo é 512. Calcular o quinto termo.

Sejam a_1 o primeiro termo e q a razão da progressão.

Temos, pela fórmula (*E*):

$$a_1 q^2 = 2 \quad \text{e} \quad a_1 q^6 = 512$$

Dividindo a segunda igualdade pela primeira, temos:

$q^4 = 256 \therefore q = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^2 = 4$, $a_4 = 2 \times 4 = 8$ e $a_5 = 8 \times 4 = 32$

7) Qual o quociente da divisão entre um termo e o seu precedente em uma progressão geométrica cujo quociente entre o sétimo e quinto termos é 324?

Pela primeira propriedade esse quociente é a razão q.

Mas, temos: $a_1 q^6 + a_1 q^4 = 324 \therefore q^2 = 324$

$$\therefore q = 18$$

8) Um paralelepípedo retângulo cujas arestas estão em progressão geométrica, tem para soma de todas suas arestas 28m e para volume $8m^3$. Qual o valor de cada aresta?

Sejam a, b e c as arestas do paralelepípedo e $a>b>c$.

Sabemos da Geometria que

$$4a+4b+4c=28 \quad e \quad abc=8$$

Como a, b e c estão em progressão geométrica pela segunda propriedade, temos:

$$b^2=ac$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ abc=8 \\ b^2=ac \end{cases}$$

Temos: $b=2$, $a=4$ e $c=1$.

As arestas são 2m, 4m e 1m.

QUARTA PROPRIEDADE: *Em uma progressão geométrica limitada, o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.*

Sejam a_{p+1} e a_{n-p} dois termos eqüidistantes dos extremos da progressão $::a_1:a_2:\ldots:a_n$ de n termos e razão q.

Considerando a_{p+1} como último termo da progressão cujo primeiro termo é a_1 e a_{n-p} como primeiro termo da progressão cujo último termo é a_n, temos pelas fórmulas (E) e (F):

$$a_{p+1}=a_1q^p$$

$$a_{n-p}=\frac{a_n}{q^p}$$

Multiplicando membro a membro essas duas igualdades obtemos:

$$a_{p+1}\cdot a_{n-p}=a_1a_n$$

QUINTA PROPRIEDADE: *Em uma progressão geométrica limitada de número ímpar de termos, o termo do meio é a média geométrica dos extremos ou de dois termos quaisquer eqüidistantes dos extremos.*

Esta propriedade é uma conseqüência da segunda e quarta propriedades.

Realmente, pela segunda propriedade o termo do meio é a média geométrica entre o termo que o segue e o que o precede; mas, como essas dois termos são evidentemente eqüidistantes dos extremos, temos a comprovação desta propriedade.

SEXTA PROPRIEDADE: *A soma dos termos de uma progressão geométrica limitada*

$::a_1:a_2:\ldots:a_{n-1}:a_n$ de razão q

é dada pela expressão

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}} \qquad (H)$$

Somando os termos da progressão considerada, tendo em vista a fórmula (E), podemos escrever:

$$S_n=a+a_1q+a_1q^2+\ldots a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1} \qquad (I)$$

Multiplicando a igualdade (I) por q, temos:

$$S_nq=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n \qquad (II)$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$$S_nq-S_n=a_1q^n-a_1$$

$$\therefore\ S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1} \text{ ou } S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

Fórmula esta que tem significação pois $q\neq 1$, por definição.

OBSERVAÇÃO: Se a progressão geométrica é decrescente ($q<1$), é conveniente escrever (H) sob a forma

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad (I)$$

EXERCÍCIOS

1) Qual a soma dos sete primeiros termos da progressão

$$::2:1:\frac{1}{2}:\ldots$$

Pela fórmula (I), temos:

$$S_n=\frac{127}{\blacksquare}$$

2) Sabendo que $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

mostre que $S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

QUESTÕES DE CONCURSOS E ALGUNS PROBLEMAS CLÁSSICOS

1) Pede-se o primeiro termo e a razão de uma progressão geométrica de 4 termos, sabendo-se que a soma dos dois termos extremos é 195 e a soma dos dois termos médios é 60.

(Escola Aeronáutica).

Temos: $\begin{cases} a_1 + a_1q^3 = 195 \\ a_1q + a_1q^2 = 60 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{matrix} a_1(1+q^3) = 195 \\ a_1q(1+q) = 60 \end{matrix}$

Dividindo, membro a membro, a primeira equação pela segunda, temos:

$$\frac{a_1(1+q)(1-q+q^2)}{a_1q(1+q)} = \frac{195}{60} \quad \text{ou} \quad 4q^2 - 17q + 4 = 0$$

Donde: resolvendo $q_1 = 4$ e $q_2 = \frac{1}{4}$.

Resta calcular o primeiro termo

Se $q = 4$ $\qquad a_1 = 3$

Se $q = \frac{1}{4}$ $\qquad a_1 = 192$

2) Dado um quadrado de lado a, se unirmos os pontos médios de seus lados obtemos um novo quadrado. Se procedermos assim sucessivamente, iremos obtendo outros quadrados. Calcular o limite da soma das áreas de todos os quadrados assim formados.

É fácil provar que cada novo quadrado obtido tem para área a metade da área do precedente. E temos que as áreas dos quadrados assim formados têm respectivamente as seguintes expressões:

$$a^2, \ \frac{a^2}{2}, \ \frac{a^2}{4}, \ \ldots$$

que constitui uma progressão geométrica decrescente ilimitada de razão $q = \frac{1}{2}$. Então $\lim S = 2a^2$.

3) Achar os 4 ângulos de um quadrilátero sabendo que eles estão em progressão geométrica e que o último é nove vezes maior do que o segundo.

Temos: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 360$ e $a_1q^3 = 9a_1q$

$\therefore$ $q^2 = 9$ e $q = 3$ $\therefore$ $a_1 = 9$

Os ângulos medem pois 9°, 27°, 81°, 243°.

4) Achar x de modo que $x-2$, $x+2$ e $x+17$ estejam em progressão geométrica. Se estiver em progressão geométrica, pela segunda propriedade, podemos escrever:

$$(x+2)^2 = (x-2)(x+17) \ \therefore \ x = \frac{38}{11}$$

5) Em uma progressão geométrica de 5 termos, a soma dos 2 primeiros termos é 32 e a dos dois últimos é 864. Formar a progressão.

(E. Aeronáutica - Curso Prévio).

Temos: $\begin{cases} a_1 + a_1q = 32 \\ a_1q^3 + a_1q^4 = 864 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_1(1+q) = 32 \\ a_1q^3(1+q) = 864 \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, a segunda equação pela primeira, obtemos:

$$q = 3 \quad \text{e} \quad a_1 = 8$$

E a progressão será:

$$:: 8 : 24 : 72 : 216 : 648$$

4. Exercícios para resolver.

1) Calcular o sétimo termo da progressão

$$:: 13 : 26 : 52 : \ldots$$

2) Calcular o quinto termo da progressão

$$:: \frac{2}{3} : \frac{2}{7} : \ldots$$

3) Calcular o primeiro termo de uma progressão geométrica cujo último termo é 648 e o número de termos é 5 e a razão é 3.

4) Achar a_1, em uma progressão geométrica sabendo que $a_7 = 4$ e $q = \frac{1}{2}$.

5) Calcular a razão de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 5 e o quinto termo é 405.

6) Calcular a razão de uma progressão geométrica na qual o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e o quarto termo é $\frac{4}{27}$. (U. Gama Filho - 1972).

7) Em uma progressão geométrica o primeiro termo é 2 e a razão é 1,5 e o último termo é 10,125. Achar o número de termos.

8) Em uma progressão geométrica, $a_1 = 5$, $a_n = 1\,280\sqrt{2}$ e $q = \sqrt{2}$. Achar n.

9) Inserir 5 meios geométricos entre $\frac{5}{4}$ e 20.

10) Achar a "soma" dos termos da progressão

$$:: 1 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9} : \ldots$$

11) Calcular a geratriz da dízima 2,666 ...

12) Qual a geratriz da dízima 1,023 23 ... ?

13) Achar o limite da soma dos termos da progressão $:: \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots$

14) Achar a soma dos 6 primeiros termos da progressão

$$:: 5 : 15 : 45 : \ldots$$

15) Em uma progressão geométrica $a_1 = 6$, $S_n = 6\,138$ e $a_n = 3\,072$. Calcular q e n.

16) Em uma progressão geométrica $a_1 = 15$; $S_3 = 315$. Achar q e a_3.

17) Em uma progressão geométrica $a_4 = 42$, $a_7 = 5\,250$. Calcular q.

18) Achar x para que $x-16$, $x-10$ e $x+14$ formem uma progressão geométrica. (Psicologia – U.E.G. – 1971).

19) Em uma progressão geométrica $a_8 = 2$ e $a_{16} = 50$. Achar a_{25}.

20) Calcule o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada em que o primeiro termo é 27 e o quarto termo é 8. (U.E.G. – 1972).

21) Em uma progressão geométrica de 7 termos a soma dos 3 últimos termos é o dobro da soma dos 3 primeiros. Sabendo-se que esta última soma é $157\frac{1}{2}$, determinar a progressão. (E. Engenharia – Juiz de Fora – 1967).

22) Um cruzador persegue um comboio inimigo que se acha a 180 milhas de distância. Qual a distância que deverá percorrer o cruzador para alcançar o comboio, se a velocidade do cruzador é dupla da do comboio? Resolver com o emprego das progressões. (Colégio Naval – 1.ª prova parcial – 2.º ano – 1951).

23) A soma de três números em P.G. crescente é 26 e o termo do meio é 6. O maior desses números é .... (COMSART 73 - GB

24) A soma de 3 termos de uma progressão geométrica é 126 e a diferença dos termos extremos é 90. Quais são os três termos?

25) Achar os ângulos internos A, B, C e D de um quadrilátero, sendo $A<B<C<D$, sabendo que esses ângulos estão em progressão geométrica e que $D=9B$.

26) Em um triângulo equilátero de lado a, se unirmos os pontos médios de seus lados obtemos um novo triângulo equilátero. Se procedermos assim sucessivamente obteremos novos triângulos equiláteros, cada vez menores. Achar o limite da soma das áreas dos triângulos equiláteros formados.

27) O limite da soma dos termos da progressão geométrica

$$\cdot : a : 2 : \ldots \text{ é } \frac{49}{5}.$$ Calcule a.

(Esc. Eng. U. F. Est. Rio – 1953)

28) Em um círculo de raio R inscreve-se um quadrado, neste quadrado inscreve-se um círculo, neste círculo um outro quadrado e assim sucessivamente. Calcular o limite da soma das áreas dos círculos.

29) Achar os 3 menores números que estão em progressão geométrica e tais que, se diminuirmos 2,8 e 22 de cada um, respectivamente, obteremos 3 novos números que, em metros, são os lados de um triângulo semelhante a um triângulo retângulo de 12m de perímetro e cujos lados estão em progressão aritmética.

30) Calcule x e y, sabendo que a sucessão — 24, x, y, 84 é uma progressão aritmética e a sucessão 3, x, y, 192 uma progressão geométrica. (Esc. Eng. U. E. G. – 1968)

31) Calcule quatro números em progressão geométrica, sabendo que a diferença dos extremos é 24,5 e que a diferença dos dois primeiros é 3,5. (PUC – Rio 1963).

32) Calcular o produto dos quatro primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 4 e a razão é 2.

33) Achar quatro números em progressão geométrica, sabendo-se que a soma dos dois primeiros é 20 e a soma dos dois últimos é 45. (Psicologia – UFRJ – 1969).

34) Calcular 3 números em progressão geométrica sabendo que o seu produto é 343 e a soma $30\frac{1}{3}$.

35) Calcule m de forma que a soma

$$(m+1) + \frac{m+1}{2} + \frac{m+1}{4} + \ldots$$ tenha limite igual a 4. (U.E.G. – 1971).

36) A soma de três números positivos em progressão aritmética é 30. Se esses três números forem aumentados de 1, 4 e 14, respectivamente, os novos números estarão em progressão geométrica. Achar aqueles números.

37) A soma de três números em progressão geométrica é 186. Se acrescentarmos 48 ao termo do meio, sem alterar os 2 outros, obteremos 3 números em progressão aritmética. Escreva os 3 números em progressão geométrica.

38) A soma de três números que formam uma progressão geométrica é 19. Calcule esses números sabendo que se subtrairmos 1 do primeiro, eles passam a constituir uma progressão aritmética. (F. Eng. U. Rio de Janeiro – 29/5/1961).

39) Prove que a razão de uma progressão geométrica em que 3 termos consecutivos são os lados de um triângulo retângulo é dada pela expressão

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

(Economia – UFRJ – 1971).

40) Deduza a fórmula que dá o produto dos termos de uma progressão geométrica limitada de n termos em função do número de termos do primeiro e da razão.

41) Uma P. G. de oito termos tem soma igual a 660; uma P. A. de onze termos, de razão igual a cinco e de soma também igual a 660, tem para primeiro termo um valor igual a sete vezes a razão da P. G. Calcular o primeiro termo de cada uma dessas progressões. (F. N. Ciências Econômicas – Rio – 1963).

42) Sendo a o primeiro termo de uma progressão geométrica, b o termo de ordem $n+1$ e c o termo de ordem $2n+1$, escreva a relação existente entre a, b e c. (Engenharia – 1966 – GB).

43) Em um conjunto de 4 números os 3 primeiros estão em progressão geométrica e os 3 últimos estão em progressão aritmética com razão 6. O primeiro número é igual ao quarto. Ache a soma desses números:

a) 15 1/2 *b*) 24 *c*) 18 *d*) 14 *e*) 13 1/2

(CICE 1959.

RESPOSTAS (Progressões Geométricas):

1) 832 3) 8 6) $\frac{2}{3}$

2) $\frac{54}{2\,401}$ 4) 256 7) 5

5) 3 8) 18

9) $\cdots \frac{5}{4} : \frac{5}{2} : 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80$

10) 3 14) 1 820

11) $2\frac{2}{3}$ 12) $1\frac{7}{300}$ 15) 2 e 10

16) 4 e 240 13) 1

17) $5\sqrt{5}$ 18) 18 19) 1 250

20) 81

21) $:: \frac{5}{2} : 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160$

22) 260 23) 18 24) 6, 24 e 96

25) 9^a, 27^a, 81^a e 243^a

26) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ 27) $a = 7 \quad a = 2{,}8$

28) $2\pi R^2$ 29) 8, 16 e 32

30) 12 e 48 31) $:: 3{,}5 : 7 : 14 : 28$

32) 16 384 33) 8, 12, 18 e 27 34) $\frac{7}{3}$, 7 e 21

35) 1 36) 6, 10 e 14 37) 6, 30 e 150

38) 4, 6 e 9 39) *Sugestão.* $(a_1q)^2 + (a_1q^2)^2 = (a_1q^3)^2$

40) $P = \sqrt{a_1^{2n} \cdot q^{n(n-1)}}$

41) 35 e $\frac{55}{8\,138}$ 42) $b^2 = ac$ 43) 14

CAPÍTULO III

Logaritmos

1. Preliminares. Dada a equação $a^x = N$ (a e N reais e não negativos)

1) Se $a = 0$, existe uma infinidade de valores reais, não nulos, de x que tornam $N = 0$

2) Se $a = 1$, existe uma infinidade de valores reais de x que tornam $N = 1$

3) Se a difere de zero e da unidade existe, para cada valor de N, um só valor real de x que verifica a equação dada.

Dizemos então que dados dois números reais e positivos a e N, o primeiro dos quais difere da unidade, existe um único número real x, tal que

$$a^x = N$$

Esse número real x chamamos de "logaritmo do número N, na base a".

Calcular pois o número x a que se deve elevar o número a para obter um número N vem a ser a operação inversa da potenciação, que permite calcular o número N que se obtém elevando o número a a um expoente x.

2. Definição de logaritmo. Chama-se logaritmo de um número real positivo N, em uma base a, positiva e diferente da unidade, ao expoente real x que se deve elevar essa base a para obter o número N.

E escreve-se $\log_a N = x$

Podemos então escrever a seguinte igualdade:

$$a^{\log_a N} = N$$

3. Definição de sistema de logaritmos. Sistema de logaritmos é o conjunto dos logaritmos de todos os números reais positivos, em uma determinada base.

4. Sistemas de logaritmos usuais. Como a base pode ser qualquer número real positivo, diferente da unidade, então existe uma infinidade de sistemas de logaritmos.

Dessa infinidade de sistemas de logaritmos, dois apenas são comumente usados:

a) o sistema de base $a=10$, "sistema decimal" cujos logaritmos são denominados *decimais*, também chamados *vulgares*, *comuns* ou de *Briggs* (cuja notação é "*log*");

b) o sistema de base $a=e$ (número irracional $e=2{,}718281828$), sistema "neperiano" cujos logaritmos são denominados *neperianos*, também chamados *naturais* ou hiperbólicos (cuja notação é *l*).

O "sistema neperiano" tem grande importância na Matemática, entretanto, é o sistema decimal o comumente empregado na matemática elementar e, de um modo geral, o mais usado.

Estudaremos, em detalhes, apenas os logaritmos decimais.

5. Propriedades gerais. Como o "sistema decimal" que vamos estudar, possue base maior do que a unidade, apresentaremos apenas conclusões e observações gerais sobre os sistemas de base $a > 1$

1.ª) Todo número positivo possui logaritmo; todo número negativo não o possui. (O que se conclue da definição pois $N>0$).

2.ª) O logaritmo de um é zero, em qualquer sistema. Realmente, $a^0=1 \therefore \log_a 1=0$

3.ª) O logaritmo de um número a em um sistema de base a é a unidade. De fato, $a^1 = a \therefore \log_a a=1$

4.ª) Os números que possuem logaritmos inteiros são as potências inteiras da base. Isto é, $\log_a a^m=m$.

5.ª) Os logaritmos dos números maiores do que um são positivos e crescem indefinidamente com esses números.

6.ª) Os logaritmos dos números menores do que um são negativos e decrescem indefinidamente, quando o número decresce, aproximando-se de zero.

7.ª) As igualdades simbólicas

a) $\log_a 0=-\infty$ e *b*) $\log_a +\infty=+\infty$

que aparecem no início e no fim da maioria das Tábuas de Logaritmos, exprimem respectivamente que:

a) quando o número N tende indefinidamente para zero $\log_a N$ decresce indefinidamente;

b) quando N cresce indefinidamente $\log_a N$ também cresce.

6. Propriedades operatórias dos logaritmos. Sejam x e y os logaritmos de A e B na base a, isto é:

$$\begin{cases} \log_a A = x \\ \log_a B = y \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} A = a^x \\ B = a^y \end{cases}$$

De acordo com as regras de operações com potências, temos:

$$\begin{cases} A \,.\, B = a^{x+y} \\ A : B = a^{x-y} \\ A^m = a^{mx} \\ \sqrt[m]{A} = a^{\frac{x}{m}} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \log_a (A \,.\, B) = x+y \\ \log_a (A : B) = x-y \\ \log_a A^m = mx \\ \log_a \sqrt[m]{A} = \dfrac{x}{m} \end{cases}$$

Substituindo x e y por seus valores, temos:

LOGARITMO DE UM PRODUTO
$$\log_a (A.B)=\log_a A+\log_a B$$

LOGARITMO DE UM QUOCIENTE
$$\log_a (A : B)=\log_a A-\log_a B$$

LOGARITMO DE UMA POTÊNCIA
$$\log_a A^m=m \log_a A$$

LOGARITMO DE UMA RAIZ
$$\log_a \sqrt[m]{A}=\frac{\log_a A}{m}$$

7. Mudança de base. TEOREMA. *A razão entre os logarítmos de um número, considerados em dois sistemas diferentes é uma constante denominada módulo de um dos sistemas, em relação ao outro.*

Seja um número N e sejam x e y seus logaritmos em dois sistemas de bases a e b, respectivamente.

Se $\log_a N = x$ e $\log_b N = y$

temos, pela definição

$$a^x = N \text{ e } b^y = N$$
$$\therefore\ a^x = b^y$$

Calculemos os logaritmos de ambos membros da igualdade acima, no sistema de base a:

$$x \cdot \log_a a = y \cdot \log_a b$$
$$\therefore\ \frac{y}{x} = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \text{ c.q.d.}$$

Observações: O valor constante $\frac{1}{\log_a b}$ denomina-se *módulo* do sistema de base b em relação ao de base a.

Como $\frac{\log_b N}{\log_a N} = \frac{1}{\log_a b}$

Então

$$\boxed{\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \times \log_a N}$$

Concluímos, então, que dado o logaritmo de um número N, em uma base a, podemos obter o logaritmo desse número N, em uma outra base b, multiplicando o logaritmo dado pelo módulo do sistema de base b em relação ao de base a.

8. Característica e mantissa. Já vimos (4.ª propriedade N.º 5) que só as potências da base têm logaritmos inteiros. Assim os números que não são potências da base têm seus logaritmos iguais a um número decimal, cuja parte inteira denomina-se característica e cuja parte decimal chama-se *mantissa*. Exemplo:

O $\log 200 = 2{,}30103$ tem sua *característica* igual a 2 e sua *mantissa* igual a 30103.

9. Cologaritmo. Chama-se cologaritmo de um número ao logaritmo do inverso desse número.

E escreve-se $\operatorname{colog} N = \log \frac{1}{N}$

Mas, pela segunda propriedade fundamental

$$\log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = -\log N$$

Então, podemos escrever:

$$\operatorname{colog} N = -\log N$$

E estabelecer a seguinte definição:

cologaritmo de um número é o simétrico do logaritmo desse número.

Desta última definição se conclui que subtrair o logaritmo de um número é o mesmo que somar o cologaritmo desse número.

Conclusão, importante pois, permite, no cálculo de expressões logarítmicas, substituir subtrações por adições o que, quase sempre, simplifica o cálculo.

10. Exercícios.

1) Qual o logaritmo de 8 na base 2?

Pela definição de logaritmo é o mesmo que achar o número a que se deve elevar 2 para obter 8. Como $2^3 = 8$, então $\log_2 8 = 3$.

2) Calcular o valor de x sabendo que

$$x = \log_2 16$$

Isto significa que $2^x = 16$, e como $2^4 = 16$, então $x = 4$.

3) Calcular o valor de x sabendo que $\log_a x = -1$.

Pela definição temos: $a^{-1} = x\ \therefore\ x = \frac{1}{a}$.

4) Calcular o valor de x sabendo que $\log_x a = -1$.

Pela definição temos: $x^{-1} = a\ \therefore\ \frac{1}{x} = a$ e $x = \frac{1}{a}$.

5) Em que sistema de logaritmo o número 5 tem para logaritmo $-\frac{1}{2}$?

Temos pela definição $\log_a 5 = -\frac{1}{2}$

Multiplicando ambos os membros por um número que torne o segundo membro igual a 1, temos: $-2 \log_a 5 = 1$.

Ou, de acordo com a terceira propriedade fundamental,

$$\log_a 5^{-2} = 1\ \therefore\ a^1 = 5^{-2} \text{ ou } a = \frac{1}{25}$$

6) Calcular o $\log x$ sendo

$$x = \frac{ab^2}{c^3}$$

Empregando as 3 primeiras propriedades fundamentais, temos:
$\log x = \log ab^2 - \log c^3 = \log a + \log b^2 - \log c^3 = \log a + 2\log b - 3\log c$
ou $\log x = \log a + 2\log b + 3\operatorname{colog} c$.

7) Resolver a equação

$$5\log\frac{x}{5} + 2\log\frac{x}{5} = 4\log x - \log 25$$

Podemos escrever, de acordo com as propriedades fundamentais,

$$\log\left[\left(\frac{x}{5}\right)^5 \times \left(\frac{x}{5}\right)^2\right] = \log\frac{x^4}{25}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{5}\right)^5 \times \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \frac{x^4}{25} \quad \text{ou} \quad \frac{x^5}{5^{15}} \times \frac{x^2}{25} = \frac{x^4}{25}$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$\frac{x^5}{5^{15}} = 1 \quad \text{ou} \quad x^5 = 5^{15} \quad \text{e} \quad x = 5^3 = 32$$

8) Deduzir a fórmula que dá o número de termos de uma progressão geométrica limitada.

Sabemos que $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Calculando os logaritmos de ambos os membros

$$(n-1)\log q + \log a_1 = \log a_n$$

$$\therefore (n-1)\log q = \log a_n - \log a_1$$

$$n - 1 = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log q}$$

$$\text{e} \quad n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log q} + 1$$

11. Logaritmos decimais. Logaritmos decimais são, como já vimos, logaritmos pertencentes ao sistema decimal (base $a = 10$).

Representaremos $\log_{10} N$ por $\log N$.

Suas principais vantagens são:

a) *Sua característica é facilmente determinada.* O que não acontece com os sistemas de logaritmos de base diferente de 10, em virtude do sistema de numeração universalmente adotado ser decimal.

b) *A mantissa é a mesma para todos os números N da forma.*

$$N = A \times 10^m$$

sendo $A \neq 0$ e m um número inteiro relativo.

Na apresentação das propriedades dos logaritmos decimais justificaremos essas duas vantagens apresentadas.

12. Propriedades dos logaritmos decimais. Além das comuns aos demais sistemas, já citadas, gozam os logaritmos decimais de propriedades peculiares ao "sistema de logaritmos decimais".

Passaremos a enumerá-las:

1.ª) Sendo m um n.º inteiro, $\log 10^m$ é o número de zeros à direita da unidade, se $m > 0$, e é o número de zeros à esquerda da unidade, se $m < 0$. Exemplos:

1) $\log 10^5 = \log 100000 = 5$
2) $\log 10^{-3} = \log 0{,}001 = -3$

2.ª) O logaritmo de qualquer número que não seja potência inteira de 10 é um n.º decimal constituído de uma parte inteira, positiva, negativa ou nula, e uma parte decimal considerada positiva e, em geral, calculada com 5 ou 7 decimais. Já vimos que essas duas partes se chamam respectivamente característica e mantissa.

3.ª) **A característica do logaritmo decimal de um número maior do que um é igual ao número de algarismos de sua parte inteira menos um.**

Seja $N > 1$ um número que possua p algarismos em sua parte inteira.

a) Se N for potência inteira de 10, seu logaritmo será, como já vimos, igual a $p - 1$, pois N possui $p - 1$ zeros à direita da unidade.

b) Se N não for potência inteira de 10, temos

$$10^{p-1} < N < 10^p \quad \therefore (p-1)\log 10 < \log N < p \log 10$$
$$\therefore p - 1 < \log N < p \quad \therefore \log N = p - 1 + \text{fração}$$

E a característica de N será $p - 1$. Exemplos:

As características de 29, 152 e 2,65 são: 1, 2 e 0.

4.ª) **A característica do logaritmo decimal de um número menor do que um é o número negativo cujo valor absoluto é o número de zeros à esquerda do primeiro algarismo significativo do número.**

Seja $0<N<1$ um número decimal que possua p zeros à esquerda do seu primeiro algarismo significativo.

a) Se N for potência inteira de 10 seu logaritmo será, como já vimos, igual a $-p$.

Pois $10^{-p}=N \;\therefore\; \log N=-p$

b) Se N não for potência inteira de 10, temos:

$10^{-p}<N<10^{-p+1} \;\therefore\; -p\log 10<\log N<(-p+1)\log 10$

$\therefore\; -p<\log N<-p+1 \;\therefore\; \log N=-p+\text{fração}$

E a característica é $-p$.

Exemplos:

As características de log 0,8, log 0,054 e log 0,0003 são: -1, -2 e -4.

5.ª) Quando a característica é positiva ou nula o logaritmo decimal tem a forma de um número decimal comum.

Exemplos: 1) $\log 2=0{,}30103$
2) $\log 500=2{,}69897$

6.ª) Quando a característica é negativa o sinal $-$ é colocado sobre a característica para indicar que só a característica é negativa e, portanto, diferençando do número decimal negativo.

> Os logaritmos de *característica* negativa e *mantissa* positiva chamam-se *logaritmos preparados*.

Exemplo:

log 0,03 tem característica -2 e mantissa 0,47712

Então $\log 0{,}03=-2+0{,}47712$, se escreve assim: $\bar{2},47712$

$\bar{2},47712$ é um *logaritmo preparado*

7.ª) Quando o logaritmo decimal for inteiramente negativo, isto é, a característica e a mantissa negativas, dizemos que o logaritmo é um *logaritmo negativo* e colocamos um sinal menos precedendo-o. Exemplo:

$$\log\frac{1}{2}=\log 1-\log 2=0-0{,}30103=-0{,}30103$$

$-0{,}30103$ é um logaritmo negativo.

8.ª) Multiplicando-se um número $A\neq 0$ por 10^m sendo m um número inteiro relativo obtém-se um número N cuja mantissa de seu logaritmo é a mesma do logaritmo de A.

Seja $\log A=p+f$ (p a característica, f a mantissa)
Como $\log 10^m=m$
Então $\log N=\log(A\times 10^m)=\log A+m$
ou $\log N=p+f+m=(p+m)+f$

Vemos que os logaritmos de A e N só diferem na parte inteira e portanto têm a mesma mantissa. Exemplo:

$\log 0{,}2=\bar{1},30103$
$\log 2=0{,}30103$
$\log 200=2{,}30103$

13. Transformação de um logaritmo negativo em logaritmo preparado e vice-versa.

a) Quando em um cálculo logarítmico aparecer um "logaritmo negativo" devemos transformá-lo em "logaritmo preparado" a fim de facilitar o cálculo.

Para transformar um logaritmo negativo em logaritmo preparado basta tomar o logaritmo cuja característica está diminuída de uma unidade e cuja mantissa (positiva) se obtém subtraindo todos os algarismos da mantissa, de 9, excepto o último significativo que se subtrai de 10. Exemplo:

Seja $\log N=-1{,}30103$ um logaritmo negativo

O "logaritmo preparado" será

$$\log N=-(1+1)+(1-0{,}30103)=-2+0{,}69897$$

que, como já vimos escreve-se assim:

$$\log N=\bar{2},69897$$

b) A transformação inversa, isto é, a transformação de um "logaritmo preparado" em "logaritmo negativo".

Dado um logaritmo preparado para transformá-lo em negativo basta efetuar a soma algébrica de sua característica e de sua mantissa. Exemplo:

Seja $\log N=\bar{2},47712$ um logaritmo preparado

A característica é -2 e a mantissa é 0,47712.

O logaritmo negativo será então

$$\log N = -2+0{,}47712 = -1{,}52288$$

14. Cálculo do cologaritmo. Para calcular o cologaritmo de um número, dado o logaritmo decimal desse número, somase algebricamente -1 ao simétrico da característica do logaritmo e toma-se o complemento aritmético de sua mantissa. Exemplos:

1) O cologaritmo do $\log N = 2{,}15142$
é $3{,}84858$.

2) Qual o colog N, se $\log N = \bar{1}{,}31400$?
colog $N = 0{,}68600$

15. Tábuas de logaritmos. São tipos de tabelas usadas para determinação da mantissa dos logaritmos dos números, o que completa a resolução do problema da determinação do logaritmo, pois já vimos como determinar a característica, pela simples inspecção do número.

Há diversos tipos de tábuas, as quais diferem, de um modo geral, pelo número de algarismos de suas mantissas ou pelo número de logaritmos que contêm.

Adotaremos para os cálculos de nossas expressões e de nossos exercícios a Tábua de Logaritmos de F. T. D., com 7 decimais, contendo as mantissas dos 10000 primeiros números.

16. Disposição das tábuas de logaritmos. Apresentaremos a seguir uma página da Tábua de Logaritmos de F. T. D.

Está essa página dividida, por linhas verticais mais fortes, em 4 partes. Cada uma das 3 partes da esquerda está dividida em 3 colunas.

Na primeira dessas colunas, da esquerda para a direita, figuram os números naturais; na segunda, as mantissas dos logaritmos desses números naturais; e, na terceira, as diferenças entre duas mantissas consecutivas, que são denominadas "diferenças tabulares".

Assim o log 2000 tem para mantissa 3010300 e para diferença tabular 2171, que é o número da terceira coluna que fica logo abaixo da mantissa.

1901	2789621	2285	1951	2902573	2227	2001	3012471	2171		2262	2250	2238
1902	2792105	2284	1952	4798	2225	2002	4641	2170	1	226	225	224
1903	4388	2283	1953	7022	2224	2003	6809	2168	2	425	450	448
1904	6669	2281	1954	9246	2224	2004	8977	2168	3	679	675	671
1905	8950	2280	1955	2911468	2222	2005	3021144	2167	4	905	900	895
1906	2801229	2279	1956	3689	2221	2006	3309	2165	5	1131	1125	1119
1907	3507	2278	1957	5908	2219	2007	5474	2165	6	1357	1350	1343
1908	5784	2277	1958	8127	2219	2008	7637	2163	7	1583	1575	1567
1909	8059	2275	1959	2920344	2217	2009	9799	2162	8	1810	1800	1790
1910	2810334	2275	1960	2561	2217	2010	3031961	2162	9	2036	2025	2014
1911	2607	2273	1961	4776	2215	2011	4121	2160		2227	2215	2204
1912	4879	2272	1962	6990	2214	2012	6280	2159	1	223	221	220
1913	7150	2271	1963	9203	2213	2013	8438	2158	2	445	443	441
1914	9419	2269	1964	2931415	2212	2014	3040595	2157	3	668	664	661
1915	2821688	2269	1965	3626	2211	2015	2751	2156	4	891	886	882
1916	3955	2267	1966	5835	2209	2016	4905	2154	5	1113	1107	1102
1917	6221	2266	1967	8044	2209	2017	5970	2154	6	1336	1329	1322
1918	8486	2265	1968	2940251	2207	2018	9212	2153	7	1559	1550	1543
1919	2830750	2264	1969	2457	2206	2019	3051363	2151	8	1782	1772	1763
1920	3012	2262	1970	4662	2205	2020	3514	2151	9	2004	1993	1984
1921	5274	2262	1971	6866	2204	2021	5668	2149		2193	2182	2171
1922	7534	2260	1972	9069	2203	2022	7812	2149	1	219	218	217
1923	9793	2259	1973	2951271	2202	2023	9959	2147	2	439	436	434
1924	2842051	2258	1974	3471	2200	2024	3062105	2146	3	658	655	651
1925	4307	2256	1975	5671	2200	2025	4250	2145	4	877	873	868
1926	6563	2255	1976	7869	2198	2026	6394	2144	5	1096	1091	1085
1927	8817	2254	1977	2960067	2198	2027	8537	2143	6	1316	1309	1303
1928	2851070	2253	1978	2263	2196	2029	3070680	2143	7	1535	1527	1520
1929	3322	2252	1979	4458	2195	2029	2820	2140	8	1754	1746	1737
1930	5573	2251	1980	6652	2194	2030	4960	2140	9	1947	1964	1954
1931	7823	2250	1981	8845	2193	2031	7099	2139		2160	2154	2149
1932	2860071	2248	1982	2971037	2192	2032	9237	2138	1	216	215	215
1933	2319	2248	1983	3227	2190	2033	3081374	2137	2	432	431	430
1934	4565	2246	1984	5417	2190	2034	3509	2135	3	648	646	645
1935	6810	2245	1985	7605	2188	2035	5634	2135	4	864	862	860
1936	9054	2244	1986	9792	2187	2036	7778	2134	5	1080	1077	1074
1937	2871296	2242	1987	2981970	2187	2037	9910	2132	6	1296	1292	1289
1938	3538	2242	1988	4164	2185	2038	3092042	2132	7	1512	1508	1504
1939	5779	2240	1989	6348	2184	2039	4172	2130	8	1728	1723	1719
1940	8017	2239	1990	8531	2183	2040	6302	2130	9	1944	939	934
1941	2880255	2238	1991	2990713	2182	2041	8430	2128		2164	2129	2134
1942	4232	2237	1992	2893	2180	2042	3100557	2127	1	214	214	213
1932	4728	2235	1993	5073	2180	2043	2684	2127	2	429	428	427
1944	6903	2235	1994	7252	2179	2044	4809	2125	3	643	642	640
1945	9196	2233	1995	9429	2177	2045	6923	2124	4	858	856	854
1946	2891428	2232	1996	3001605	2176	2046	9056	2123	5	1072	1069	1067
1947	3660	2232	1997	3781	2176	2047	3111178	2122	6	1286	1283	1280
1948	5890	2230	1998	5955	2174	2048	3300	2122	7	1501	1497	1494
1949	8118	2228	1999	8128	2173	2049	5420	2120	8	1715	1711	1707
1950	2900346	2228	2000	3010300	2172	2050	7539	2119	9	1930	1925	1921
		2227			2171			2118		2128	2122	2118
									1	213	212	212
									2	426	424	424
									3	638	637	635
									4	851	849	847
									5	1064	1061	1059
									6	1277	1273	1271
									7	1490	1485	1483
									8	1702	1698	1694
									9	1915	1910	1906

Na última divisão ou parte da direita encontra-se uma coluna com os números de 1 a 9, em negrito, e nas outras 3 colunas números em negrito, que são as diversas diferenças tabulares dos logaritmos da página, e números, não em negrito, que são partes proporcionais aos números de 1 a 9, escritos na coluna da esquerda.

Essa parte da direita é chamada "tabela de partes proporcionais", cujo emprego será ensinado adiante.

Existem tábuas de logaritmos que não possuem a "tabela de partes proporcionais".

17. Uso das tábuas de logaritmos. O emprego das tábuas de logaritmos consta de dois problemas:

1.º) *Problema direto:* Dado um número achar o seu logaritmo;

2.º) *Problema inverso:* Dado o logaritmo de um número achar o número correspondente a esse logaritmo que se chama de *antilogaritmo*.

18. Problema direto.

PRIMEIRO CASO: *Achar o logaritmo de um número cuja mantissa está na tábua de logaritmos.*

A característica é determinada pela simples observação do número, de acordo com a terceira e quarta propriedades dos logaritmos decimais e a mantissa é encontrada na tábua, tomando em consideração a oitava propriedade dos logaritmos decimais. Exemplos:

1.º) Achar o log 1982

A característica será 3 e a mantissa é fácil de ver na página da tábua por nós apresentada é 0,2971037

$$\log 1982 = 3{,}2971037$$

2.º) Achar o log 0,001982

A característica será -3 e a mantissa será a mesma do log 1982

$$\log 0{,}001982 = \bar{3}{,}2971037$$

SEGUNDO CASO: *Achar o logaritmo de um número cuja mantissa não é encontrada na tábua de logaritmos.*

A característica é calculada como no primeiro caso.

A mantissa é calculada admitindo-se que, quando a diferença entre dois números é pequena em relação aos mesmos, a diferença entre os seus logaritmos é, aproximadamente, proporcional à diferença entre os números. Exemplos:

1.º) Achar o log 203945

A característica é 5.

Procuremos a mantissa.

$$2039 < 2039{,}45 < 2040$$

A diferença entre 2039 e 2040 é 1, e a diferença das mantissas desses números é $d = 2130$.

Se o número aumenta 1 a mantissa aumenta de 2130, se o número aumentar de 0,45 a mantissa aumentará de

$$x = 0{,}45 \times 2130 = 958{,}5 \cong 959$$

Então a mantissa de 2039,45 será 3094172 + 959 = 3095131

Como log 2039,45 e log 203945 têm a mesma mantissa

$$\log 203945 = 5{,}3095131$$

2.º) Achar o log 203,945

A característica é 2

A mantissa de log 203945 será:

mantissa de log 2039 =	3094172	$d = 2130$
acréscimo $p = 0{,}45 \times d =$	959	
	3095131	

$\therefore \log 203{,}945 = 2{,}3095131$

3.º) Achar o log 0,203945

Agora que já compreendemos o problema, adotaremos a seguinte disposição de cálculo:

mantissa	log 0,2039	= 0,3094172
	$2130 \times 0{,}45 =$	+ 959
	log 0,203945 =	$\bar{1}$,3095131

19. Uso da tabela de partes proporcionais. O acréscimo p – pode ser encontrado, também, usando a tabela de partes proporcionais.

Vejamos, com um exemplo, o emprego dessa tabela. Exemplo:

Achar log 193042

$$\begin{array}{lll} \text{mantissa} & \log 1930 = 0{,}2855573 & d=2250 \\ & 2250\times 0{,}42 = \quad +945 & \\ & \log 193042 = 5{,}2856518 & \end{array}$$

O acréscimo 945 poderia ser calculado assim:

Na "tabela de partes proporcionais", à direita da página da tábua de logaritmos, apresentada por nós, encontramos, em negrito, a diferença tabular 2250 e na coluna de números abaixo de 2250 encontramos correspondendo a 4 e a 2 respectivamente 900 e 450.

Adotando o seguinte dispositivo, teremos o acréscimo p:

$$\begin{array}{ll} \text{acréscimo para } 0{,}4 = & 900 \\ \text{acréscimo para } 0{,}02 = & 45{,}0 \\ \text{acréscimo para } 0{,}42 = & 945 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO: Se o número d, diferença tabular, não for encontrado na tabela de partes proporcionais, toma-se um dos números, em negrito, mais próximo de d, e procede-se como no exemplo anterior. Nesse caso o acréscimo obtido pode diferir do acréscimo obtido pelo emprego da regra de três.

20. Problema inverso.

PRIMEIRO CASO: *Achar o antilogaritmo de um logaritmo cuja mantissa está na tábua de logaritmos.*

Procuramos na segunda coluna das 3 primeiras partes a mantissa do logaritmo dado, o número correspondente a essa mantissa, na coluna da esquerda, será o número procurado, o antilogaritmo. Esse número terá tantos algarismos na parte inteira quanto for a característica mais uma unidade, se a característica for positiva; terá tantos zeros à esquerda do primeiro algarismo significativo quanto for o módulo da característica, se ela for negativa. Exemplos:

1.º) Achar o antilogaritmo do logaritmo 3,2913689

O número correspondente à mantissa 2913689 é 1956; como a característica é 3 o número tem 3+1=4 algarismos na parte inteira.

Então o antilogaritmo de 3,2913689 é 1956.

2.º) Qual o número que corresponde ao logaritmo 6,2913689?

O número correspondente à mantissa 2913689 é 1956; como a característica é 6 o número correspondente ao logaritmo 6,2913689 terá sete algarismos na parte inteira, será portanto 1956000.

3.º) Qual o número cujo logaritmo é 2,2913689?

O número correspondente à mantissa 2913689 é 1956; como a característica é 2 o número será um número decimal que tem 2 zeros à esquerda do primeiro algarismo significativo.

O número será, então 0,01956.

SEGUNDO CASO: *Achar o antilogaritmo de um logaritmo cuja mantissa não está na tábua de logaritmos.*

Para determinação do número procede-se da seguinte forma:

Seja N um número correspondente a um logaritmo dado cuja mantissa M não está na tábua.

Procura-se, na tábua, as mantissas m' (imediatamente superior a M) e m (imediatamente inferior a M), que correspondem aos números a e $a+1$, respectivamente.

A diferença $m'-m$ é a diferença tabular d, e a diferença $M-m$ chama-se *diferença* dos logaritmos.

Como existe uma proporcionalidade entre os números e as mantissas dos logaritmos desses números, temos, então, a regra de três:

à diferença tabular d corresponde 1;

a diferença $M-m$ dos logaritmos corresponderá x $(0<x<1)$.

$$\therefore\ x=(M-m):d$$

À mantissa m corresponde o número a, à mantissa M corresponderá $a+x$.

Como $\log N$ tem a mesma mantissa de $\log \frac{N}{10^n}$ (oitava propriedade), então N será um número igual a: $10^n \cdot (a+x)$, onde n é um número inteiro relativo, determinado de acordo com a característica do $\log N$.

Podemos, então, resumindo, dizer:

> Procura-se na tábua a mantissa imediatamente inferior à mantissa do logaritmo dado; a seguir acrescenta-se ao número correspondente à mantissa da tábua o resultado da divisão da diferença de logaritmo pela diferença tabular. Se a característica c do logaritmo dado for positiva, o número procurado terá $c+1$ algarismos na parte inteira; se a característica c do logaritmo dado for negativa, o número procurado será decimal, menor do que um, e terá c zeros precedendo o primeiro algarismo significativo.

Exemplos:

1.º) **Qual o número que corresponde ao logaritmo 3,2988646?**

Na tábua, a mantissa imediatamente inferior à mantissa de logaritmo dado é 2988531 que corresponde a 1990 e cuja diferença tabular é 2182. A diferença dos logaritmos é 115.

$$115 \div 2182 = 0{,}052$$

1990+0,052=1990,052 é um número cuja mantissa é a mesma do logaritmo o número procurado. E o número procurado, que tem 4 algarismos na parte inteira, pois a característica é positiva e igual a 3, será esse mesmo número: 1990,052

2.º) **Qual o número cujo logaritmo é $\bar{1}$,3065580?**

$\log N = \bar{1},3065580$

2025..... $\frac{4250}{1330}$ ..... $d=2144$

$1330 \div 2144 = 0{,}62$

$N = 0{,}202562$

21. Uso da tabela de partes proporcionais. O acréscimo x pode também ser encontrado, usando a tabela de partes proporcionais.

Vejamos com um exemplo o emprego dessa tabela.

Achar N sabendo que $\log N = 4{,}3065580$.

$\log N = 4{,}3065580$

2025 ..... $\frac{4250}{1330}$ ..... $d=2144$

Na parte da direita das páginas da tábua por nós adotada, procuramos, nos números escritos em negrita, em uma das 3 colunas da direita a diferença tabular 2144.

Nos números abaixo de 2144 procuramos o imediatamente inferior à diferença de logaritmos 1330, que é 1286 e corresponde a 0,6; procuramos a seguir, nos números abaixo de 2144, o número 1330 − 1286 = 44. O imediatamente inferior é 42,9, que corresponde a 0,02. Então 1330 equivalerá a um valor $x = 0{,}6+0{,}02 = 0{,}62$

E o número N será 20256,2

Façamos o mesmo exercício dando uma disposição de cálculo adequada.

$\log N = 4{,}3065580$

2025 ..... $\frac{4250}{1330}$ ..... $d=2144$

$\frac{-1286}{44}$ 0,6

$\frac{-42{,}6}{1{,}4}$ 0,02

$N = 20256{,}2$

Observação: Se a diferença tabular d não for encontrada na "tabela de partes proporcionais", toma-se um dos números, em negrita, mais próximo de d, e procede-se a seguir como no exemplo anterior.

22. Operações com logaritmos.

PRIMEIRO CASO: Se as características dos logaritmos dados são positivas, opera-se de modo igual às operações com decimais.

SEGUNDO CASO: Se uma ou mais características dos logaritmos dados são negativas, opera-se como veremos a seguir.

I) *Adição de logaritmos*: Somam-se as mantissas dos logaritmos dados e a seguir somam-se algebricamente, ao resultado obtido, as características desses logaritmos. Exemplo:

Efetue:

$$\begin{array}{r} \bar{2},5913406 \\ \bar{3},1480709 \\ 0,3448201 \\ 2,1485769 \\ \hline \bar{4},2328085 \end{array}$$

II) *Subtração de logaritmos*: Já vimos que, numa expressão logaritmica, de mais de dois têrmos, é vantajosa a substituição de $-\log N$ por $\operatorname{colog} N$; entretanto, se temos apenas uma diferença entre dois logaritmos, essa vantagem desaparece.

Todavia, achamos mais fácil para o aluno e mais prático usar, em qualquer dos casos, o cologaritmo.

Exemplos:

$$\begin{array}{lrlr} 1.^{o}) & 2,35481 & 2.^{o}) & \bar{1},51004 \\ & \bar{3},54131 & & \bar{2},71008 \\ \hline & 4,81350 & & 0,80001 \end{array}$$

III) *Multiplicação de um número por um logaritmo*: Multiplica-se o número pela mantissa e ao resultado obtido somase algebricamente com o produto do número pela característica. Exemplos:

$$\begin{array}{lrlr} 1.^{o}) & \bar{2},84501 & 2.^{o}) & \bar{3},70012 \\ & \times 4 & & \times 13 \\ \hline & 3,38004 & & 210036 \\ & \bar{8}, & & 70012 \\ \hline & \bar{5},38004 & & 9,10156 \\ & & & \bar{39}, \\ \hline & & & \bar{30},10156 \end{array}$$

IV) *Divisão de um logaritmo por um número*: a) A característica negativa do logaritmo é divisível pelo número.

Dividindo a característica do logaritmo pelo número obtemos a característica do quociente, dividindo a mantissa pelo número obtemos a mantissa do quociente. Exemplos:

$$1.^{o}) \ \bar{4},15748 : 2 = \bar{2},07874$$
$$2.^{o}) \ \bar{9},13230 : 3 = \bar{3},04410$$

b) A característica negativa do logaritmo não é divisível pelo número.

Acrescenta-se à característica o menor número de unidades negativas, a fim de torná-lo divisível pelo número, e acrescenta-se esse mesmo número de unidades, porém positivas, à mantissa do logaritmo. Dividindo esses dois resultados pelo número obtemos, respectivamente, a característica mantissa do logaritmo, quociente da divisão pedida. Exemplos:

$$1.^{o}) \ \bar{1},24534 : 2 = (\bar{1} + \bar{1} + 1 + 0,24534) : 2 =$$
$$= (\bar{2} + 1,24534) : 2 = \bar{1} + 0,62267 = 1,62267$$
$$2.^{o}) \ \bar{5},14800 : 8 = (\bar{5} + \bar{3} + 3 + 0,14800) : 8 =$$
$$= (\bar{8} + 3,14800) : 8 = \bar{1} + 0,39350 = 1,39350$$

V) *Divisão de logaritmos*: Se um dos dois logaritmos, ou os dois, possuírem características negativas, devemos primeiro transformá-los em logaritmos inteiramente negativos e a seguir efetuar a divisão de decimais. Exemplos:

1.º) Dividir $\log 0,2$ por $\log 5$, isto é, $\bar{1},30103$ por $0,69897$

$$\bar{1},30103 = -0,69897$$
$$(-0,69897) : 0,69897 = -1$$

2.º) Efetuar:

$$(\bar{2},72647) : (\bar{1},57549)$$

Transformando em logaritmos negativos, temos:

$$(-1,27353) : (-0,42451) = +3$$

23. Aplicação das tábuas de logaritmos ao cálculo numérico. Podemos com o auxílio das tábuas de logaritmos e empregando as propriedades fundamentais dos logaritmos calcular o resultado de certas expressões numéricas, com grande vantagem. Exemplos:

1.º) Calcular $x=(0{,}07589)^{10}$

Temos pela terceira propriedade fundamental

$$\log x = 10 \times \log 0{,}07589$$
$$\log 0{,}07589 = \bar{2},8801846$$
$$\times 10$$
$$\overline{20},8018460$$
$$\log x = \overline{12},8018460$$
$$6336\ldots\ldots8152$$
$$x=0{,}000000000006336$$

2.º) Calcular o valor de x na expressão

$$x=\sqrt[5]{\frac{0{,}3115\times 7589}{(321{,}4)^3}}$$

$$\log x=\frac{\log 0{,}3115+\log 7589+3\ \text{colog}\ 321{,}4}{5}$$

Cálculos auxiliares

$\log 0{,}3115=\bar{1},4934581$
$\log 7589 = 3{,}8801846$

$\log 321{,}4 = 2{,}5070459$
$\times 3$
$7{,}5211377$

$3\ \text{colog}\ 321{,}4=\bar{3},4788623$
$5\log x=\bar{5},8525050$
$\therefore\ \log x=\bar{1},1705010$
$\therefore\ x=0{,}148$

$3\ \text{colog}\ 321{,}4=\bar{3},4788623$

24. Algumas questões de concursos resolvidas.

1) O logaritmo neperiano de e^{-5} é igual a .....
(Concurso Admissão à Escola Naval – 13/3/52).

Devemos completar com o número -5 porque

$$\ell e^{-5}=-5\ \ell.e$$

mas, $\quad \ell.e=1\quad \therefore\ \ell e^{-5}=-5\times 1=-5$

2) Calcular sem usar a tábua de logaritmos

$$\log\sqrt{0{,}00625}$$

sabendo-se que $\log 2=0{,}301\,03$
(Faculdade Nacional Arquitetura – 1946).

$\log 625=\log 5^4=4\log 5=4(\log 10-\log 2)=4(1-0{,}301\,03)=$
$=2{,}795\,88$

E, $\log 0{,}006\,25=\bar{3},795\,88$

$$\log\sqrt{0{,}006\,25}=\frac{\log 0{,}006\,25}{2}=\frac{\bar{3},795\,88}{2}=\frac{-4+1{,}795\,88}{2}=$$
$$=-2+0{,}897\,94=\bar{2},897\,94$$

3) Sabendo que $\log 20=1{,}301\,03$, calcular $\log 0{,}08^{\frac{1}{3}}$.
(Escola Técnica do Exército – 1945).

Sabemos que: $\log 0{,}08^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log 0{,}08$.

Mas, $\log 8=\log 2^3=3\log 2$ e como $\log 2=0{,}301\,03$, $\log 8=0{,}903\,09$
e $\log 0{,}08=\bar{2},903\,09$

$$\therefore\ \log 0{,}08^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}(\bar{2},903\,09)=\frac{\bar{3}+6{,}903\,09}{3}=\bar{1}+0{,}967\,69=\bar{1},967\,69$$

4) Quantos algarismos tem o número 3^{50}, se $\log 3=0{,}477\,12$?
(Colégio Naval – 1.ª P. Parcial – 3.º Ano Científico – 4/6/51).

Sabemos que $\log 3^{50}=50\log 3=23{,}856\,00$.
Se a característica de $\log 3^{50}$ é 23, 3^{50} possui 24 *algarismos*.

25. Exercícios para resolver.

1) Qual o logaritmo de 81 na base 3?

2) Qual o logaritmo de $\frac{8}{4}$ na base $\frac{4}{8}$?

3) Qual o logaritmo de 2 na base 8?

4) Sendo $f(x)=a^x$ e $f(b)=c$, tem-se $b=$ . . .
(E. N. E. – 1953).

5) Qual é o número cujo logaritmo, em qualquer base, é zero?

6) Qual o sistema de logaritmos em que o logaritmo de 4 é -2?

7) Qual a base de um sistema de logaritmos em que o logaritmo de 8 é 0,25?

8) Calcular o valor de x sabendo que: $\log_{\sqrt{2}} 8=x$.

Calcular o valor de x sabendo que:

9) $\log_x 5=-\frac{1}{2}$

10) $\log_a \frac{1}{a}=x$

11) $\log_{25}\sqrt{5}=x$

12) $x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{9}$

13) $\log_2 x=-3$

Calcular $\log x$ sendo:

14) $x = \frac{4}{3}\pi R^3$

15) $x = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

16) $x = \pi R^2 h$

17) $x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

18) $x = a^2 b\sqrt{a\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}}$

19) $x = \frac{a\sqrt[4]{b\sqrt[3]{d}}}{c^3}$

Resolver as equações:

20) $3\log\frac{x}{3} + 2\log\frac{x}{7} = 4\log x - \log 49$

21) $\log x = \frac{1}{6}\log 16 - \frac{1}{3}\log 4$

22) Resolva a equação:

$$\log\,[5^{2-x}]^{2+x} + \log 400 = 4$$

(Esc. Eng. U. F. Est. Rio – 1963)

23) Determinar o valor de x na equação:

$$\log\sqrt{7x+3} + \log\sqrt{4x+5} = \frac{1}{2} + \log 3$$

(Escola Aeronáutica – 1948).

24) Resolva a equação $\log(x+1) + 2 = \log(4x^2 - 500)$ (os logaritmos são decimais).

E. N. E. – 1961.

25) Determinar a característica dos logaritmos de

a) 3 485 b) 42,37 c) 568 900 d) 0,015 1 e) 0,543 56
f) 0,000 057 g) 4,578

26) Calcular os logaritmos dos seguintes números:

a) 3141 b) 32,37 c) 0,005 8 d) 113,53 e) 5,2643 f) 0,587 86

27) Calcular os números correspondentes aos seguintes logaritmos:

a) $\bar{2}$,301 030 0 b) 4,727 947 7 c) $\bar{2}$,529 411 7 d) 5,541 781 6
e) $\bar{1}$,814 514 0 f) 4,857 050 6

28) Calcular os cologaritmos dos seguintes logaritmos:

a) $\bar{3}$,301 030 0 b) 1,450 971 2 c) 5,307 521 0

29) Se $10^{0,6} = 4$, qual será o valor de $\log_{10} 0{,}04$?

(Escola Preparatória Cadetes do Ar – Admis. 3.º Ano – 1951).

30) Se $\log_{10} a = \bar{2}$,314 82 qual é o valor de a?

31) Se $\log a = \bar{1}$,432 78 a que é igual $\log\sqrt[3]{a}$?

(Admissão à Escola Naval – 1951).

32) Efetuar as operações seguintes:

a) 5,139 455 2 + 2,001 459 7
b) $\bar{2}$,751 004 2 + $\bar{1}$,354 175 2
c) $\bar{1}$,723 400 0 – 3,512 300 0
d) 2,540 012 5 – $\bar{2}$,741 003 4
e) $\bar{2}$,975 540 2 × 3
f) $\bar{4}$,357 481 2 ÷ 2
g) $\bar{1}$,704 523 7 ÷ 3

33) Sabendo que $\log 2 = 0{,}301\,030\,0$ e $\log 3 = 0{,}477\,121\,3$ calcular:

a) $\log 6$
b) $\log 0{,}06$
c) $\log 60\,000$
d) $\log 9$
e) $\log 8$
f) $\log 5$
g) $\log\sqrt{2}$
h) $\log\sqrt{0{,}012}$

34) Sendo $\log 2 = 0{,}301\,03$, calcule $\log 0{,}25$.

(U.E.G. – 1972).

35) Sem usar tábuas, dado o logaritmo decimal de 2, calcular o logaritmo da fração $\frac{125}{128}$.

(Escola Aeronáutica – 1957).

36) Sendo $N = \left(\frac{125}{128}\right)^{\frac{88}{74}}$, calcular, sem o emprego das tábuas, $\log N$.

Dá-se $\log 2 = 0{,}301\,03$

(Escola Nacional Engenharia – 1945).

37) Sendo $\log 0{,}35 = \bar{1}$,5441 e $\log 0{,}7^6 = \bar{2}$,760 8 determinar $\log\sqrt[5]{0{,}25}$

(Escola Técnica do Exército – 1946).

38) Sabendo que $\log 2 = 0{,}3$, o valor da expressão $\frac{\log 32 + \log\sqrt{256}}{\log 5}$, com uma decimal é .....

FGV – 73 – S. P.).

39) Se o logaritmo de 100 na base b é 16, então o logaritmo decimal de b é

(COMBART – 73 – GB).

40) Se $\log_{10} 2 = a$, então $\log_2 5$ é igual a:

a) $\frac{2a}{1-a}$
b) $\frac{a}{1+a}$
c) $\frac{1-a}{a}$
d) $\frac{a-1}{a}$
e) $\frac{1-a}{2a}$

(COMCITEC – 72 – GB).

41) Qual é o logaritmo de a^m na base a^n?

(E. Eng. S. Carlos – 1954).

42) Mostrar que $\frac{\log_a k}{\log_{ma} k} = 1 + \log_a m$

(*Sugestão:* Passar da base ma para a base a).

(ITA. 1954).

43) Qual é a base do sistema de logaritmos em que o logaritmo de 7 é $-\frac{1}{3}$?

(Engenharia - 1966 - GB).

44) Dados $\log_b a = m$ e $\log_b c = n$, exprimir $\log_c a$ em termos de m e n.

(UGF - 73)

45) Sabendo que $\log N = 7{,}61532$, calcule $\log \sqrt[5]{N}$

(ENE - 1964).

46) Qual a base do sistema de logaritmos em que o logaritmo de $\sqrt[n]{p}$ é p?

(Economia - UFRJ - 1971).

47) A razão entre os logaritmos de 16 e 4 numa base qualquer é ...

(COMCITEC - 73 - GB).

48) Sabendo que $\log_a N = \log_b P$ e que $ab = 1$, escreva a relação existente entre os números N e P.

49) Calcule o valor do produto $\log_3 3 \times \log_5 5 \times \log_2 2$

(Concurso Professôres Guanabara - 1963).

50) Sendo $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 0{,}3 = \bar{1}{,}477$, calcule $\log \sqrt[3]{0{,}015}$.

(E. Fluminense - Engenharia - 1969).

51) Sendo conhecidos $\log 2 = 0{,}30103$ e $\log 3 = 0{,}47712$, calcule $\log \sqrt[5]{0{,}012}$.

(Engenharia UEG - 1969).

RESPOSTAS:

1) 4 2) -1 3) $\frac{1}{3}$

4) Logaritmo neperiano de e

5) 1 8) 6 11) $\frac{1}{4}$

6) $\frac{1}{2}$ 9) $\frac{1}{25}$ 12) 2

7) 81 10) -1 13) $\frac{1}{8}$

14) $\log 4 + \log r + 3 \log R + \operatorname{colog} 3$

15) $\log 2 + \log r + \frac{\log l - \log g}{2}$ 16) $\log r + 2 \log R + \log h$

17) $\frac{\log p + \log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c)}{2}$

18) $\frac{1}{6}(17 \log a + 5 \log b)$

19) $\log a + \frac{\log b}{5} + \frac{\log d}{20} + 2 \operatorname{colog} c$

20) $x = 27$

21) $x = 1$

22) $x = \pm \sqrt{2}$

23) $x = 1$

24) $x = 30$

25) a) 3
b) 1
c) 5
d) -2
e) -1
f) -5
g) 0

26) a) 3,497 067 9
b) 1,510 142 7
c) 3,724 275 9
d) 2,055 110 5
e) 0,721 381 9
f) $\bar{1}$,730 669 2

27) a) 0,02
b) 53 450
c) 0,067 517
d) 348 162
e) 0,652 4
f) 71 953

28) a) 2,698 970 0
b) 2,549 028 8
c) 6,692 479 0

29) 2,6

30) 0,020 645

31) $\bar{1}$,810 92.

32) a) 3,190 944 9
b) 2,105 179 4
c) 4,211 100 0
d) 3,799 009 1
e) 9,804 321 6
f) 2,178 740 6
g) 1,901 507 9

33) a) 0,778 151 3
b) 2,778 151 3
c) 4,778 151 3
d) 0,954 242 6
e) 0,903 090 0
f) 0,698 970 0
g) 0,150 515 0
h) $\bar{1}$,039 590 6

34) $\bar{1}$,897 94
35) $\bar{1}$,989 70
36) $\bar{1}$,992 63
37) $\bar{1}$,879 6
38) 3,8

39) 0,025

40) c

41) m/n

42) $\frac{1}{343}$

44) $\frac{m}{n}$

45) 3,871 77

50) $\bar{1}$,392

51) $\bar{1}$,359 73

46) $\sqrt[np]{p}$

47) 2

48) $NP = 1$

49) 1

CAPÍTULO IV

Equações Exponenciais

1. Definição. Chama-se equação exponencial a toda equação que possua uma ou mais incógnitas em expoente.

2. Resolução de equações exponenciais simples. Em geral, são resolvidas mediante o emprego dos logaritmos.

3. Primeiro tipo. O tipo mais simples de equação exponencial é: $a^x = b$ (I) sendo a e b positivos e $a \neq 1$.

Essa equação pode ser resolvida:

1.º) por logaritmos;
2.º) sem o auxílio de logaritmos, quando b é uma potência de a.

I) Resolução, por logaritmos, da equação $a^x = b$.

Temos: $\log a^x = \log b$

$$\therefore\ x \log a = \log b \qquad \therefore\ x = \frac{\log b}{\log a}$$

II) Resolução da equação $a^x = b$, quando $b = a^n$

Temos: $a^x = a^n \ \therefore\ x = n$

EXERCÍCIOS

1) Resolver a equação $2^x = 50$

$$\therefore\ x = \frac{\log 50}{\log 2} = \frac{1{,}698\,97}{0{,}301\,03} = 5{,}64$$

2) Resolver a equação $3^x = 729$

$$\therefore\ 3^x = 3^6 \ \therefore\ x = 6$$

4. Segundo tipo. Equações que se reduzem ao primeiro tipo.

Isto é, equação da forma:

$$a^{b^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}} = n \quad \text{(II)}$$

Exemplo:

Resolver a equação $a^{b^x} = n$

Fazendo $b^x = y$, temos:

$$a^y = n \ \therefore\ y = \frac{\log n}{\log a}$$

Mas, $x = \dfrac{\log y}{\log b} \ \therefore\ x = \dfrac{1}{\log b} \cdot \log \dfrac{\log n}{\log a}$

(Procedendo analogamente podemos resolver qualquer equação do tipo (II)

EXERCÍCIOS

1) Resolver a equação $2^{3^x} = 50$

Temos: $3^x = y \ \therefore\ x = \dfrac{\log y}{\log 3}$

$$\therefore\ y = \frac{\log 50}{\log 2} = 5{,}64 \ \therefore\ x = \frac{\log 5{,}64}{\log 3} = \frac{0{,}751\,28}{0{,}477\,12}$$

$$\therefore\ x = 1{,}57$$

2) Resolver a equação $5^{3^x} = 625$

$$\therefore\ 5^{3^x} = 5^4 \ \therefore\ 3^x = 4 \ \therefore\ 3^x = 3^2 \ \text{e} \ x = 2$$

5. Terceiro tipo. Equações exponenciais que se reduzem a uma equação do segundo grau.

Isto é, equações da forma: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ (III)

Fazendo $y^2 = (x^n)^2 = x^{2n}$

temos: $ay^2 + by + c = 0$

Resolvendo esta equação do segundo grau obtemos duas raízes y_1 e y_2.

Donde $x^n = y_1$ e $x^n = y_2$

Equações exponenciais do primeiro tipo cujas soluções constituem as soluções da equação (II).

Exemplo:

Resolver a equação $2^{2x+1}-7.2^x+3=0$

Temos: $2.2^{2x}-7.2^x+3=0$

Fazendo $2^x=y$, temos: $2y^2-7y+3=0$

cujas raízes são $y_1=3$ e $y_2=\frac{1}{2}$

Temos então as duas equações exponenciais do primeiro tipo:

$$2^x=3 \text{ e } 2^x=\frac{1}{2}$$

A segunda pode ser resolvida sem auxílio dos logaritmos, pois

$$2^x=\frac{1}{2}=2^{-1} \therefore x=-1$$

A primeira resolvemos com o emprego dos logaritmos

$$2^x=3 \therefore x=\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{0,47712}{0,30108}=1,58$$

6. Quarto tipo. Equações exponenciais cujo primeiro membro é uma soma de exponenciais de mesma base.

EXERCÍCIOS

1) Resolver a equação

$$3^{x+1}-3^{x-1}+3^{x-2}-3^{x-4}=654$$

colocando 3^{x-4} em evidência, temos:

$$3^{x-4}(3^5-3^4+3-1)=654$$

$$3^{x-4}=\frac{654}{218}=3$$

$$\therefore x-4=1 \text{ e } x=5$$

2) Resolver $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=45$

Temos: $2^{x-4}(2^3+2^2+2+1)=45$

$$2^{x-4}(15)=45 \therefore 2^{x-4}=3$$

Resolvendo por logaritmos

$$(x-4)\log 2=\log 3$$

$$x-4=\frac{\log 3}{\log 2} \text{ e } x=\frac{\log 3}{\log 2}+4=1,58+4=5,58$$

7. Resolução de algumas equações exponenciais simples, sem o emprego de logaritmos.

1) Resolver $2^{\sqrt{x}}=32$

$$\therefore 2^{\sqrt{x}}=2^5 \therefore \sqrt{x}=5 \therefore x=25$$

2) Resolver $\sqrt[n]{a}=a^{nx}$

$$\therefore a^{\frac{1}{n}}=a^{nx} \therefore \frac{1}{n}=nx \therefore nx^2=1$$

$$\text{e } x=\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$$

3) Resolver $2^{x^2+x}=1$

$$2^{x^2+x}=2^0 \therefore x^2+x=0$$

$$\therefore x_1=0 \quad x_2=-1$$

4) Resolver $a^{(x-1)x}=a^{3x}$

$$\therefore (x-1)x=3x \therefore x^2-4x=0$$

$$\therefore x_1=0 \text{ e } x_2=4$$

5) Resolver $7\times 3^{x+3}=567\times 7^{x-1}$

$$\therefore \frac{3^{x+3}}{7^{x-1}}=\frac{567}{7}=81 \therefore \frac{3^{x+3}}{7^{x-1}}=3^4$$

Dividindo, ambos os membros, por 3^4, temos:

$$\frac{3^{x-1}}{7^{x-1}}=1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}=1$$

$$\therefore x-1=0 \text{ e } x=1$$

6) Resolver $3^{x+2}+\frac{9}{3^x}=18$

$$\therefore 3^{2x+2}-18 \cdot 3^x+9=0 \therefore 3^2 \cdot 3^{2x}-18.3^x+9=0$$

ou

$$3^{2x}-2 \cdot 3^x+1=0$$

Fazendo $3^x=y$, temos:

$$y^2-2y+1=0 \therefore y=1$$

Substituindo temos: $3^x=1 \therefore x=0$

8. Exercícios para resolver.

Resolver as seguintes equações, sem o auxílio de logaritmos:

1) $2^x = 512$ 5) $31^{x^2-10} = 1$ (U.E.G. – 1972)

2) $3\sqrt{x} = 243$ 6) $2^{x^2+1} = 32$ (U. Gama Filho – 1972).

3) $2 \times 5^x = 250$ 7) $\sqrt[p]{2} = 16^x$

4) $5^{x^2} = 5^{8x}$ 8) $3^{(2-x)(2-4)} = \frac{1}{27}$

(E. Flum. Engenharia – 1969)

Resolver por logaritmos

9) $3^x = 5$ 10) $3^x \cdot 2^{2x-1} = 6^{2x+1}$

11) $5^x \cdot 3^{2x+1} = 5$ 12) $3^{-x} = 5$

13) $3^x - \frac{3^{x-1}}{5} - \frac{10}{3} = 0$

(Col. Pedro II – S. Norte – 1955).

Resolver as equações:

14) $7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2} + 7^{x-4} = 400$ 18) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$

15) $3^{2x-1} - 3^x - 3^{x-1} + 1 = 0$ (E. Naval. S. Carlos – 1963). 19) $2^{x+1} + 2 \cdot 2^{-x} = 11$

16) $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-3} + 14$ 20) $6^{2x+1} = 4 \times 3^{6x}$ (Fac. Filosofia – Pernambuco – 1958).

17) $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

21) Resolver a equação:

$$100 \times 10^x = \sqrt[5]{1\,000^3}$$

(E. Militar – 1967).

22) Resolver a equação:

$$2^{x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$$

(E. Militar – 1940).

23) Resolver a equação:

$$(a^x)^x = (a^x)^x$$

(E. Nacional Química – 1945).

24) Resolver a equação:

$$(a^{x-2})^x = a^x$$

(U.E.C. – 1971)

25) O valor de x na equação $a^{\frac{1-2x}{2}} = a^{\frac{1-7x}{3}}$ é

(COMBART – 73 – GB).

26) Resolver:

$$3(9^{x+1} - 7) = 18(9^x - 1)$$

(E. E. Juiz de Fora – 1965).

Dispensa-se o cálculo logarítmico.

27) Resolver:

$$2^{x+1} - \frac{7}{2^{x-1}} + 2^{x-2} = \frac{1}{2^{x-2}}$$

(IME – 1971).

Sugestão: Fazer $2^x = z$

28) Resolver: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3^x} = 512^{-1}$

(E. N. Eng. – 1956).

29) Resolver: $3 \cdot 9^x + 7 \cdot 3^x - 10 = 0$

(E. Flu. Eng. – 1957 e U.E.G. – 1972).

30) A equação $3^{x^2-x\sqrt{3}} = 1$

(E. P. U. Cat. – 1957).

31) Resolva: $\sqrt{a^{1-2x}} = \sqrt[4]{a^{1-7x}}$

(U.E.G. – 1973).

32) Resolva: $3^{2x+1} + \frac{1}{3^{1-2x}} = 10$

(Fac. Eng. UEG – 1964)

33) Resolva: $3^{2x-3} + 3^{2x-1} + 3^{2x+1} + 3^{2x+3} = \frac{820}{27}$

(PUC – Rio – 1963)

34) Resolva a equação

$$4^{2x-3} - 17 \cdot 4^{x-3} + 1 = 0$$

Escumbaria – 1966 – (GB)

RESPOSTAS:

1) $x = 9$
2) $x = 25$
3) $x = 3$
4) $x = 0$ e $x = 8$
5) $x = 2$
6) $x = \pm 2$
7) $x = \pm \frac{1}{2}$
8) $x = 5$ e $x = 1$
9) $x = 1{,}465$
10) $x = -6{,}126$
11) $x = 0{,}257\,7$
12) $x = -1{,}465$
13) $x = \frac{1}{\log 3}$ e $x = \frac{\log 5}{\log 3}$
14) $x = 3$
15) $x = 0$ e $x = 1$
16) $x = 5$
17) $x = 1$
18) $x = 0$ e $x = 0{,}43$
19) $x = 2$ e $0{,}58$
20) $x = 1/3$
21) $x = 3$ e $x = -5$
22) $x = \pm 3$
23) $x = 0$ e $x = 2$
24) $x = 0$ e $x = b - 1$
25) $-\frac{3}{4}$
26) $x = \frac{\log 5 + \operatorname{colog} 11}{\log 9}$
27) 1,5
28) 2
29) 0
30) 0 e $\sqrt{3}$
31) $x = -\frac{3}{4}$
32) $x = \frac{1}{2}$
33) $x = 0$
34) 0 e 2

CAPÍTULO V

Análise combinatória simples

1. Preliminares. Existem diversas maneiras de dispor os objetos de uma coleção em grupos. Esses grupos denominam-se *agrupamentos* e os objetos que os constituem chamam-se *elementos*. Em qualquer dessas maneiras de disposição dos elementos, há dois casos que distinguir:

1.º) *em cada grupamento todos elementos são distintos;*

2.º) *em cada grupamento pode haver repetição de elementos.*

No primeiro caso, os grupamentos dizem-se *simples*, e no segundo caso chamam-se com *repetição*.

Os grupamentos, quanto ao modo de formação, podem ser classificados em arranjos, permutações e combinações.

Ao estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos simples denominamos de *análise combinatória simples*.

Dois grupamentos simples diferem pela *ordem* ou pela *natureza* de seus elementos. Diferem pela natureza quando, pelo menos, um dos elementos de um dos grupamentos não for elemento do outro.

2. Arranjos simples de objetos distintos. Aos agrupamentos simples de p elementos que podemos formar com m ($m \geq p$) elementos distintos, cada um desses agrupamentos diferindo do outro pela *natureza* ou pela *ordem* de seus elementos, nós chamamos de *arranjos simples de* m *elementos distintos tomados* p *a* p.

E representaremos o número desses arranjos pelo símbolo A_m^p.

Com as três primeiras letras do alfabeto podemos formar os seguintes arranjos de dois elementos:

$$ab,\ ba,\ ca$$
$$ac,\ bc,\ cb$$

3. Formação dos arranjos simples. Consideremos m elementos distintos e, para fixar idéias, suponhamos $m = 4$. Sejam as quatro primeiras letras do alfabeto esses elementos.

Diz-se, por extensão, que cada um destes m objetos é um arranjo simples de m elementos 1 a 1, $A_m^1 = m$.

Esses arranjos são pois:

$$a,\ b,\ c,\ d$$

Colocando à direita de cada um desses elementos as $m - 1$ letras restantes, obtemos o quadro:

$$\begin{array}{cccc} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{array}$$

que contém, sem repetição nem omissão, todos A_m^2.

Então $A_m^2 = A_m^1\ (m-1)$.

Juntemos agora a cada um dos A_m^2 do quadro anterior os $m - 2$ elementos restantes.

Cada um dos grupos de 2 elementos formará $m - 2$ grupos de 3 elementos.

Logo, $A_m^3 = A_m^2\ (m-2)$.

Prolongando esse raciocínio, temos que, de um modo geral,

$$A_m^p = A_m^{p-1}\ [m - (p-1)]$$

ou,
$$\boxed{A_m^p = A_m^{p-1}\ (m - p + 1)} \qquad (I)$$

E podemos dizer que o processo geral para formação dos A_m^p, consiste em acrescentar a cada um dos A_m^{p-1} agrupamentos as $m - p + 1$ letras restantes.

Observação: Há problemas que exigem a formação dos A_m^p. Formar tais agrupamentos é teoricamente fácil. Se m e p não forem pequenos é trabalhoso e se m e p forem grandes valores é praticamente impossível.

4. Número de arranjos simples. Fazendo na fórmula (I) $p = 2, 3, 4 \ldots p$ e tendo em vista que $A_m^1 = m$, temos:

$$A_m^1 = m$$
$$A_m^2 = A_m^1 (m-1)$$
$$A_m^3 = A_m^2 (m-2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m^{p-1} = A_m^{p-2} (m-p+2)$$
$$A_m^p = A_m^{p-1} (m-p+1)$$

Multiplicando, membro a membro, essas relações e suprimindo os fatores comuns aos dois membros, obtemos a expressão do número de arranjos simples:

$$\boxed{A_m^p = m(m-1)\ (m-2)\ldots(m-p+2)\ (m-p+1)} \quad \text{(II)}$$

E podemos concluir que o número de arranjos simples de m elementos distintos, tomados p a p, é o produto dos p números inteiros, consecutivos decrescentes, a partir de m. Exemplos:

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \quad \text{e} \quad A_9^2 = 9 \times 8 = 72$$

Observação: Por convenção, escreveremos $A_m^0 = 1$, o que se justifica pela fórmula (I), onde, para $p=1$ temos: $A_m^1 = A_m^0 \cdot m$, e como $A_m^1 = m$, temos: $A_m^0 = 1$.

Na (I) para $p > m$, será por definição: $A_m^p = 0$. E $A_4^4 = 1$.

5. Permutações simples de objetos distintos. Chamamos de permutações simples de m elementos distintos aos agrupamentos simples de m elementos que podemos formar com eles, de modo que cada agrupamento difira do outro pela *ordem* dos seus elementos.

E representamos o número dessas permutações por P_m.

Com as três primeiras letras do alfabeto podemos formar as seguintes permutações:

abc, bac, cab
acb, bca, cba

Observação: Se em cada grupamento de arranjos simples formado de m elementos entrarem os m elementos os arranjos se denominam permutações.

6. Formação das permutações simples de elementos distintos. Evidentemente, com a primeira letra do alfabeto podemos formar uma permutação: a. E, $P_1 = 1$.

Com as duas primeiras letras do alfabeto podemos formar as duas permutações seguintes:

ab, ba

que foram obtidas acrescentando a permutação a à letra restante b, em cada uma das duas posições possíveis. Então: $P_2 = 2$.

Acrescentando as permutações de 2 elementos à terceira letra do alfabeto, c, nas 3 posições possíveis, obtemos as permutações de 3 elementos.

Ou seja,
abc bac
acb bca
cab cba

Juntando a essas P_3 permutações um quarto elemento d, em todas as posições possíveis obteríamos um quadro contendo as P_4 permutações, sem repetição nem omissão, o que não seria difícil provar, com raciocínio análogo ao já realizado. E assim sucessivamente, podíamos obter a fórmula de recorrência:

$$\boxed{P_m = P_{m-1} \cdot m.}$$

Observação: Para $m=1$, temos: $P_1 = P_0 \times 1$ e como $P_1 = 1$, $1 = P_0 \times 1 \therefore P_0 = 1$ e, portanto, devemos convencionar $P_0 = 1$.

7. Número de permutações simples. O número de permutações simples de m elementos é igual ao número de arranjos simples de m elementos tomados m a m.

$$P_m = A_m^m = m(m-1)\ (m-2)\ldots(m-m+2)\ (m-m+1)$$

ou $P_m = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots(m-2)\ (m-1)m.$

Esse produto de números inteiros de 1 a m denomina-se fatorial de m e representa-se, em geral, por $m!$.

Logo, $P_m = m! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots m.$ (III)

E concluímos que o número de permutações simples de m elementos distintos é igual a $m!$, ou seja, ao produto dos m primeiros números naturais. Exemplos:

$$3! = 1.2.3 = 6 \quad \text{e} \quad 5! = 1.2.3.4.5 = 120$$

8. Inversão. Dados m elementos

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_m$$

tomemos uma de suas $m!$ permutações, por exemplo,

$$a_1 a_2 a_3 \ldots . a_m$$

que chamamos de *permutação fundamental*.

Diz-se que dois elementos de uma permutação de m elementos formam uma *inversão*, quando estão em ordem inversa àquela em que se acham na permutação fundamental.

Assim, por exemplo, se tomarmos as 4 primeiras letras do alfabeto e considerarmos como permutação fundamental aquela em que os elementos estejam em sua ordem alfabética *abcd*, dizemos que na permutação *abdc* existe uma inversão entre os elementos c e d, que na permutação *dacb* existem 4 inversões, a saber:

$$da,\ dc,\ db\ \text{ e }\ cb$$

É fácil de ver que, para se obter o número de inversões de uma permutação basta comparar cada elemento com todos os que o seguem.

7. Classe de uma permutação. Diz-se que uma permutação é de *classe par* ou de *classe ímpar*, conforme o número de suas inversões seja par ou ímpar, respectivamente.

Assim, a permutação *dacb* é de *classe par* porque, como já vimos, apresenta 4 inversões, e a permutação *abde* é de *classe ímpar* porque, também como já vimos, apresenta uma única inversão.

10. Teorema de Bezout(*). *Uma permutação muda de classe quando se trocam dois de seus elementos.*

Para sua demonstração temos dois casos a considerar: os dois elementos são consecutivos, ou não.

1.º) Seja uma permutação qualquer de m elementos

$$a_1\ a_2 \ldots . a_i a_{i+1} \ldots\ldots a_{m-1}\ a_m$$

e permutemos dois de seus elementos consecutivos, como por exemplo, a_i e a_{i+1} temos:

$$a_1\ a_2 \ldots . a_{i+1} a_i \ldots\ldots a_{m-1}\ a_m$$

(*) Bezout, algebrista francês. Século XVIII.

É fácil de observar que a posição destes dois elementos, em relação aos outros $m-2$, não foi alterada, logo houve apenas uma inversão e, portanto, o número de inversões da permutação aumentou de uma unidade, e, portanto, mudou de classe.

2.º) Consideremos agora a permutação de m elementos

$$a_1 \ldots a_{i-1}\ a_i\ a_{i+1} \ldots . a_{i+r} \ldots . a_m$$

e permutemos dois elementos não consecutivos, a_{i-1} e a_{i+r}, entre os quais existem r elementos, temos:

$$a_1 \ldots a_{i+r} a_i\ a_{i+1} \ldots a_{i-1} \ldots a_m$$

Esta permuta pode ser obtida, fazendo, primeiro, o elemento a_{i-1}, à esquerda, avançar r posições para a direita, e, em seguida, fazendo o elemento a_{i+r}, à direita, retroceder $r+1$ posições. Fazer isso equivale a realizar sucessivamente $r+r+1 = 2r+1$ inversões sobre a primeira permutação considerada, logo, esta permutação mudará de classe.

11. Permutações simples com objetos repetidos. São os *agrupamentos simples* que podemos formar com m elementos dados, onde alguns elementos, ou todos, aparecem repetidos, de modo que cada um difira do outro apenas pela ordem de seus elementos. São, pois, as permutações simples que podemos formar com m elementos nem todos distintos. É evidente que são em número menor do que as permutações simples de m elementos distintos.

12. Número de permutações simples com objetos repetidos. Sejam m elementos

$$a,\ a,\ \ldots .\ a,\ b,\ b,\ \ldots b,\ \ldots . 1$$

dos quais α são iguais a a, β iguais a b, ... e λ iguais a l, porém, sendo: $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = m$.

E seja $P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda}$ o número das permutações simples desses m elementos repetidos.

Se os m elementos fossem todos distintos, o que podia ser obtido afetando os elementos iguais de índices, teríamos assim os m elementos distintos

$$a_1 a_2 \ldots . a_\alpha b_1 b_2 \ldots . b_\beta \ldots l_1 l_2 \ldots l_\lambda$$

cujo número de permutações simples seria igual a $m!$.

Imaginando agora que em cada um dos $P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda}$ as α letras a fossem diferentes, $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$, permutando-as de todos os modos possíveis, teríamos que cada grupamento $P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda}$ se desdobraria em $\alpha!$ agrupamentos e o número total de permutações passaria a ser $P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda} \times \alpha!$.

Procedendo do mesmo modo até se acabarem as letras repetidas, obteríamos, para o caso de todas as letras serem distintas, um número de permutações igual a $P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda} \times \alpha!\beta!\ldots\lambda!$.

E como esse número é também, como já vimos, igual a $m!$, então:

$$P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda} \times \alpha!\,\beta!\ldots\lambda! = m!$$

$$\therefore \quad \boxed{P_m^{\alpha,\beta,\ldots\lambda} = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}} \qquad \text{(IV)}$$

Exemplos:

1.º) Quantas permutações simples podemos formar com as letras da palavra *matemática*?

Temos $m = 10$ e 2 letras m, 3 letras a, 2 letras t, e uma letra e, i e c.

$$\therefore \quad P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\ 3!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!} = 151\,200$$

2.º) Quantos números de 6 algarismos podemos formar com os algarismos do número 992992?

Temos: $m = 6$, $\alpha = 4$ e $\beta = 2$.

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\ 2!} = 15$$

13. Combinações simples de objetos distintos. Chamam-se combinações simples de m elementos, tomados p a p, aos agrupamentos simples de p elementos que podemos formar com os m elementos dados, tais que cada um difira do outro apenas pela *natureza* de seus elementos.

Representemos o número dessas combinações por C_m^p.

Com as três primeiras letras do alfabeto podemos formar as seguintes combinações de 2 elementos:

$$ab, \quad ac, \quad bc$$

14. Formação das combinações simples. Consideremos m elementos distintos e, para fixar as idéias, suponhamos $m = 4$. Sejam as 4 primeiras letras do alfabeto esses elementos.

Admitiremos, por simples convenção, que cada uma dessas letras constitui uma combinação simples de m elementos 1 a 1.

$$C_m^1 = m$$

Essas combinações de um elemento são, pois:

$$a, \quad b, \quad c, \quad d$$

Colocando à direita de cada um desses m elementos, quando possível, sucessivamente os elementos que o seguem, obtemos o quadro:

ab	*bc*	*cd*
ac	*bd*	
ad		

que encerra, *sem repetição nem omissão*, todas C_4^2.

Procedendo do mesmo modo, isto é, escrevendo sucessivamente à direita das combinações do quadro, já obtidas, as letras que seguem a última letra da combinação (ou os elementos que na permutação fundamental seguem o último), iremos obtendo novos quadros com as combinações formadas contendo mais um elemento do que aquelas do quadro anterior.

E temos assim o modo de formação do quadro das combinações simples.

15. Número de combinações simples. Consideremos uma das C_m^p combinações simples de m elementos p a p.

O número de permutações possíveis dos p objetos que figuram nessa combinação é $p!$

Permutando em cada uma das C_m^p os seus p elementos, teremos $p! \times C_m^p$ agrupamentos, dois a dois diferindo ou pela ordem ou pela natureza de seus elementos, e portanto esses $p! \times C_m^p$ agrupamentos constituem o número de arranjos dos m elementos p a p.

Realmente esses $p! \times C_m^p$ arranjos são todos distintos, sem omissão nem repetição de nenhum.

São distintos porque os grupamentos provenientes de uma mesma combinação diferem pela ordem e os provenientes de combinações diferentes possuem pelo menos um elemento que não figura no outro.

E não pode haver omissão de um dos A_m^p, pois os p objetos que o formam constituem uma das C_m^p consideradas, e entre os $p!$ agrupamentos formados com essa combinação, há um onde a ordem de sucessão dos p elementos é justamente a do arranjo que pensávamos faltar entre os $p! \ C_m^p$ agrupamentos.

Então, $p! \times C_m^p = A_m^p$

$$\therefore \boxed{C_m^p = \frac{A_m^p}{p!}} \quad \text{ou} \quad \boxed{C_m^p = \frac{A_m^p}{P_p}} \qquad (V)$$

Observação: Sendo $A_m^0 = 1$ e $P_0 = 1$, temos, também, por convenção, $C_m^0 = 1$. Exemplos:

$$C_6^0 = \frac{A_6^0}{P_0} = 1, \quad C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \quad \text{e} \quad C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

16. Outras expressões para A_m^p e C_m^p. Adotando o símbolo fatorial (n.º 7) podemos estabelecer outras expressões para A_m^p e C_m^p.

1.º) Multiplicando e dividindo o segundo membro de (II) por $(m-p)!$, temos:

$$\therefore \boxed{A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}} \qquad (VI)$$

2.º) Substituindo na fórmula (V), A_m^p por seu valor (V)I, temos:

$$\boxed{C_m^p = \frac{m!}{p!\,(m-p)!}} \qquad (VII)$$

17. Números combinatórios ou binomiais. São os números da forma $\frac{m!}{p!\,(m-p)!}$ que representamos pelo símbolo $\binom{m}{p}$ e que lemos binomial m sobre p.

E por convenção $\binom{m}{m} = 1$

m é o numerador e p é o módulo ou ordem do número binomial.

18. Números binomiais de módulos complementares. Os números binomiais de mesmo numerador e de módulos complementares são iguais.

Isto é $\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$ ou $C_m^p = C_m^{m-p}$

De fato

$$C_m^p = \frac{m!}{p!\,(m-p)!} \quad \text{e} \quad C_m^{m-p} = \frac{m!}{(m-p)!\,(m-m+p)!}$$

e, portanto, $C_m^p = C_m^{m-p}$

Esta igualdade permite simplificar o cálculo de C_m^p quando $m - p < p$. Exemplo:

$$C_{100}^{98} = C_{100}^{100-98} = C_{100}^2 = \frac{100 \times 99}{1 \cdot 2} = 4\,950$$

19. Relação de Stifel(*). Sabemos que, de acordo com a fórmula (VII)

$$C_{m-1}^{p-1} = \frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(m-1-p+1)!} = \frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(m-p)!}$$

e $$C_{m-1}^{p} = \frac{(m-1)!}{p!\,(m-1-p)!} = \frac{(m-1)!}{p!\,(m-p-1)!}$$

Somando membro a membro, temos:

$$C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^{p} = \frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(m-p)!} + \frac{(m-1)!}{p!\,(m-p-1)!} =$$

$$= \frac{p\,(m-1)! + (m-p)\,(m-1)!}{p!\,(m-p)!} = \frac{(m-1)!\,(p+m-p)}{p!\,(m-p)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!\,m}{p!\,(m-p)!} = \frac{m!}{p!\,(m-p)!} = C_m^p$$

(*) Stifel, algebrista. Século XVI.

Então podemos escrever:

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^{p} \quad \text{ou} \quad \binom{m}{p} = \binom{m-1}{p-1} + \binom{m-1}{p} \tag{VIII}$$

Esta relação tem o nome de *relação de Stifel.*

20. Triângulo aritmético de Pascal(*). Consideremos todos os números binomiais $\binom{m}{p}$, para $0 \leq p \leq m$, dispostos como veremos a seguir:

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
\binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots\cdots & \binom{m}{m}
\end{array}$$

onde cada elemento é, de acordo com a *relação de Stifel*, a soma do que lhe fica acima com o que está à esquerda deste último.

Substituindo os números binomiais por seus valores, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

Ao quadro acima, com o aspecto de um triângulo retângulo, segundo alguns autores e de acordo com o programa oficial, denomina-se *triângulo aritmético de Pascoal*, apesar de já se encontrar em trabalhos de matemáticos chineses do século XIII.

21. Observações sobre o triângulo de Pascal.

1.ª) *Dois elementos de uma mesma linha, eqüidistantes dos extremos, são iguais.*

(*) Pascal, grande sábio matemático. Século XVII.

De fato, dois elementos nessas condições são, de acordo com o n.º 18, iguais, pois $\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$.

2.ª) *Cada elemento é a soma dos elementos que figuram acima e à esquerda na linha superior.*

Com efeito é uma simples aplicação da *relação de Stifel.*

3.ª) *A soma dos elementos da linha* n *é igual a* 2^{n-1}.

O que é fácil de observar na figura.

22. Exercícios resolvidos.

1) Calcular: $A_7^3 - P_3 - C_8^3$.

Temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210 - 120 - 56 = 34.$

2) O número de combinações simples de 8 elementos $n+1$ a $n+1$ é igual à metade do número de combinações simples de 8 elementos $n+2$ a $n+2$. Achar n.

Temos: $$C_8^{n+1} = \frac{C_8^{n+2}}{2}.$$

Segundo (VII), temos:

$$2 \times \frac{8!}{(n+1)!\,(8-n-1)!} = \frac{8!}{(n+2)!\,(8-n-2)!}$$

$$\therefore \frac{2}{(n+1)!\,(7-n)!} = \frac{1}{(n+2)!\,(6-n)!}$$

Eliminando os denominadores temos $n = 1$.

3) Com os algarismos significativos quantos números pares de 4 algarismos, não repetidos, podemos formar?

Ora, os algarismos significativos são nove, dos quais quatro dales (2, 4, 6 e 8) são pares.

Terminando em um desses 4 algarismos podemos formar A_8^3. Como são 4, teremos:

$$4 \times A_8^3 = 4 \times (8 \times 7 \times 6) = 1\,344$$

4) Quantos são os números de 5 algarismos, todos eles ímpares, nos quais os dois menores estão sempre juntos?

Temos que os algarismos são 1, 3, 5, 7 e 9 e os dois menores são 1 e 3.

Chamando o grupamento 13 de a, obtemos com os elementos a, 5, 7 e 9

$$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \text{ grupamentos}$$

Permutando-se os elementos do grupo a obtemos

$$2! = 1 \times 2 = 2 \text{ elementos}$$

Logo os 24 agrupamentos se transformam em $4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$ agrupamentos.

Então podemos escrever 48 números.

5) Quantas diagonais possui um hexágono?

Temos que um hexágono tem 6 vértices, e que podemos unir esses vértices dois a dois de

$$C_6^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15 \text{ modos possíveis}$$

Como os segmentos que unem esses vértices ou são diagonais ou lados do hexágono, então se de $C_6^2 = 15$ subtrairmos o número de lados, obteremos:

$$15 - 6 = 9 \text{ diagonais}$$

6) Uma pessoa possuía certo número de objetos. Grupando-os 4 a 4, de modo que cada grupo possua pelo menos um objeto diferente do outro, obteve o mesmo número de grupos que se os juntasse 6 a 6, de modo idêntico. Quantos objetos possuía?

Se os grupos diferem pela natureza apenas eles são combinações.

Logo, $C_n^4 = C_n^6$ ou $\binom{n}{4} = \binom{n}{6}$.

E se dois números binomiais de mesmo numerador são iguais seus módulos satisfazem a relação

$$n = 6 + 4 = 10 \text{ (Ver N.º 18)}$$

Então a pessoa possuía 10 objetos.

7) Sobre uma reta marcam-se 5 pontos e sobre outra reta paralela à primeira marcam-se 8 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 quaisquer desses 13 pontos?

Unindo um ponto da primeira reta a 2 pontos da segunda quaisquer, obteremos C_8^2 triângulos. Como são 5 os pontos da primeira reta, teremos:

$$5 \times C_8^2 \text{ triângulos}$$

E unindo cada um dos 8 pontos da segunda reta, a 2 pontos quaisquer da primeira obteremos

$$8 \times C_5^2 \text{ triângulos.}$$

Então teremos ao todo

$$5 \times C_8^2 + 8C_5^2 = 5 \times \frac{8 \times 7}{2} + 8 \times \frac{5 \times 4}{2} = 140 + 80 = 220$$

8) Prove que: $(p\,!)^2 = (p-1)\,!\,[(p+1)\,! - p\,!]$

Desenvolvendo o segundo membro, vem:

$$(p-1)\,!\,(p+1)\,! - (p-1)\,!\,p\,! = [(p-1)\,!]^2\,p \,.\, (p+1) - [(p-1)\,!]^2\,p =$$
$$= [(p-1)\,!]^2\,p^2 + [(p-1)\,!]^2\,p - [(p-1)\,!]^2\,p = [(p-1)\,!]^2\,p^2 = (p\,!)^2$$

Logo, o primeiro membro é igual ao segundo.

9) Quantos são os anagramas da palavra "honra"?

São: $5\,! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$

23. Exercícios para resolver.

1) Calcular $3A_5^3 + 5P_4 - 9C_5^3$.

2) $C_m^2 = 21$. Achar m.

3) $A_m^3 + C_m^4 = 12$. Calcular m.

4) Calcular $P_5^{1,2,2,1}$

5) Para que a igualdade $\binom{9}{6} = \binom{5+x}{5} + \binom{5+x}{2+y}$ seja verdadeira o valor de $x - y$, encontrado através da relação de Stifel é:

(FGV – 72 – S. P.).

6) Quantas permutações podemos formar com as letras da palavra "GUANABARA"?

(U.E.G. – 1972).

7) Quantos são os números de 4 algarismos distintos que podemos formar com os 6 maiores algarismos?

8) Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos significativos?

9) Quantas diagonais tem um octógono?

10) De quantos modos diferentes um casal e seus três filhos se podem sentar em seu automóvel de 5 lugares?

11) $\dfrac{A_m^4}{A_m^3} = 4$. Achar m.

12) $A_m^3 = 8\,C_m^4$. Calcular m.

(U.E.G. – 1972).

13) $A_m^3 - C_m^{m-3} = 25\,C_m^{m-1}$. Achar m.

14) Se $A_n^2 = 2n$, segue-se que C_m^2 é igual a:

a) $2\,C_{n+2}^4$ b) $3\,C_{n+1}^4$ c) $3\,C_n^4$ d) C_{n+1}^4 e) $3\,C_{n+1}^2$

(CICE – 1968).

15) O número de combinações simples de $4m$ elementos $10 - m$ a $10 - m$ é igual ao número de combinações simples dos mesmos elementos $8 - m$ a $8 - m$. Calcule m.

(Fac. Eng. UEG – 1968).

16) De quantos modos diferentes podemos arrumar 7 livros em uma estante?

(U. Gama Filho – 1972).

17) De quantos modos diferentes posso arrumar 7 livros em uma estante se desejo que dois desses livros fiquem sempre juntos?

18) Possuo 6 livros de Matemática, 5 de Português e 3 de Inglês. De quantos modos posso arrumá-los em uma estante, se desejo que os livros de uma mesma matéria fiquem sempre juntos?

19) Quantos números posso escrever com os 5 primeiros algarismos significativos de modo que sejam menores do que 400 e que não possuam algarismos repetidos?

20) Com os algarismos significativos quantos números ímpares de 3 algarismos distintos podemos formar?

21) Calcule o número de permutações que podem ser feitas com as letras da palavra "capítulo" de forma que não fiquem juntas duas vogais e duas consoantes. (E. Flum. Eng. – 1970).

22) Calcule de quantas maneiras podem ser dispostas 4 damas e 4 cavalheiros numa fila de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas. (Engenharia – UEG – 1969).

23) De quantos modos diferentes 4 rapazes e 3 moças se podem sentar em volta de uma mesa retangular, que tem sete cadeiras, sendo 4 de um lado e 3 do outro, sem haver um rapaz junto de uma [redacted]?

24) Com os algarismos significativos quantos números de 3 algarismos pares e 2 ímpares, todos diferentes, podemos formar?

25) Quantos quadriláteros convexos podem ser formados unindo-se, quatro a quatro, 5 pontos de uma reta e 3 pontos de uma outra reta paralela à primeira?

26) Quantos são os números de 3 algarismos, todos distintos, que existem em nosso sistema de numeração?

27) De quantas formas distintas podem ser grupados 12 elementos distintos em 3 grupos de 4 elementos? (Fac. Eng. UEG – 1966).

28) Quantos são os anagramas da palavra "cinema" que começam por *m*?

29) Quantos são os anagramas da palavra "Jairo", que começam por *J* e acabam por *o*? (U.E.G. – 1972)

30) Os vértices de um icoságono determinam quantas retas?

31) Unindo os vértices de um decágono quantos triângulos podemos formar?

32) Em um congresso há 30 professoras de Matemática e 12 de Física. Quantas comissões de 5 membros poderíamos organizar com 3 professoras de Matemática e 2 de Física?

33) Em um plano marcam-se 12 pontos dos quais 5 estão sobre uma mesma reta.

Quantos triângulos podem ser formados unindo-se 3 quaisquer desses pontos? (Esc. Aeronáutica, 3.º Ano EPC. 1.º Tutorial – 1951).

34) Quantos números de 9 algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6 sem os repetir de modo que cada número principie e termine por um dos 3 primeiros algarismos dados? (Esc. Aeronáutica, 3.º Ano EPC., 1.º Tutorial – 1951).

35) Se o número de permutações de *m* objetos é 24, quantos arranjos se podem formar tomando esses *m* objetos 2 a 2? (Esc. Naval Admissão – 1952).

36) Sabendo que $C_m^{m-1} = 5$, calcule A_m^2. (Psicologia – U.E.G. – 1971).

37) Dadas duas retas paralelas, tomam-se 6 pontos sobre uma delas e 5 sobre a outra. Quantos triângulos existem, cujos vértices sejam 3 dos pontos acima considerados? (ENE – 1961).

38) Sabe-se que o número total de vértices de um dodecaedro regular é 20 e que as faces são pentágonos. Quantas retas ligam dois vértices do dodecaedro não pertencentes a uma mesma face? (EPUSP – 1960).

39) Numa embaixada trabalham 8 brasileiros e 6 estrangeiros. Quantas comissões de 5 funcionários podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 brasileiros e 2 estrangeiros? (ENE – 1963).

40) Quantas diagonais tem um prisma pentagonal?

41) Quantas diagonais possui o icosaedro regular? (FNF – 1965).

42) Quantas comissões de 8 pessoas podemos formar com 10 deputados e 6 senadores, de maneira que em cada comissão tenhamos pelo menos 3 senadores? (E. P. C. Aer. – 1958).

43) Sendo $C_{12}^{p-4} = C_{12}^{p+4}$, calcule p. (U.E.G. – 1972).

44) Com 10 espécies de frutas quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes, podem ser feitas? (I.M.E. – 1971)

45) Quantos números maiores do que 10^6 podem ser formados com os seis algarismos 0, 1, 2, 2, 3, 3?

a) $6!$ b) $\frac{6!}{2!\,2!}$ c) $\frac{6! - 5!}{2!\,3!}$ d) $\frac{6!\quad 5!}{2!\,2!}$ e) $5!$

(Lembrete: $6! - 5! = 5 \times 5!$)

(CESCEM – 73 – S. P.).

RESPOSTAS:

1) 0	12) 6	24) 4 800	36) 20
2) 7	13) 7	25) 280	37) 220
3) 5	14) $3\,C_{n+1}^4$	26) 648	38) 100
4) 1 680	15) 3	27) 5775	39) 840
5) – 1	16) 5 040	28) 24	40) 10
6) 15 120	17) 1 440	29) 6	41) 36
7) 360	18) 3 110 400	30) 190	42) 8 955
8) 504	19) 61	31) 120	43) 6
9) 20	20) 280	32) 267 960	44) 210
10) 120	21) 1 152	33) 210	45) *d*
11) 7	22) 1 152	34) 2 520	
	23) 144	35) 12	

CAPÍTULO VI

Binômio de Newton (*)

1. Lei de formação de produto de binômios distintos. Consideremos um produto de m binômios distintos

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ \ldots\ (x + l)$$

todos eles tendo um termo comum.

Efetuando o produto dos dois primeiros fatores obtemos

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$$

Multiplicando o resultado obtido pelo terceiro binômio, temos

$$\begin{array}{l|l|l} (x + a)\ (x + b)\ (x + c) = x^3 + a & x^2 + ab & x + abc \\ \qquad\qquad\qquad\quad + b & \quad + ac & \\ \qquad\qquad\qquad\quad + c & \quad + bc & \end{array}$$

Multiplicando o último produto obtido pelo quarto binômio, vem:

$$\begin{array}{l|l|l|l} (x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ (x + d) = & & & \\ = x^4 + a & x^3 + ab & x^2 + abc & x + abcd \\ \quad + b & \quad ac & \quad abc & \\ \quad + c & \quad ad & \quad acd & \\ \quad + d & \quad bc & \quad bcd & \\ & \quad bd & & \\ & \quad cd & & \end{array}$$

Observando esses produtos obtidos, podemos estabelecer a seguinte lei de formação dos seus termos:

1.º) O produto de dois ou mais desses binômios é um polinômio ordenado e completo em relação a x, com tantos termos quantos forem os binômios mais um;

(*) Isaac Newton, grande matemático inglês (1642-1727).

2.º) O expoente de x decresce sucessivamente de uma unidade em cada termo, a partir do primeiro, que é igual ao número de binômios, até o último, em que é nulo (termo independente).

3.º) O coeficiente do primeiro termo é a unidade; o coeficiente do segundo termo é a soma dos segundos termos dos binômios; o coeficiente do terceiro termo é a soma das combinações binárias dos segundos termos dos binômios; o do quarto termo é a soma das combinações ternárias dos segundos termos dos binômios, e assim sucessivamente até o penúltimo termo; o último termo é o produto dos segundos termos.

De acordo com essa regra de formação dos termos temos:

$$\begin{array}{l|l|l} (x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ \ldots\ (x + l) = & & \\ = x^m + a & x^{m-1} + ab & x^{m-2} + \ldots + abc\ldots kl \\ \quad + b & \quad + ac & \\ \quad \ldots & \quad \ldots & \\ \quad \ldots & \quad \ldots & \\ & \quad \ldots & \\ \quad + l & \quad + kl & \end{array} \qquad (1)$$

2. Exercícios.

1) Calcular o produto $(x + 1)\ (x + 3)\ (x + 4)$ de acordo com a lei de formação dos termos estabelecida.

$$(x + 1)\ (x + 3)\ (x + 4) =$$
$$= x^3 + (1+3+4)x^2 + (1\times3 + 1\times4 + 3\times4)x + 1\times3\times4 =$$
$$= x^3 + 8x^2 + 19x + 12$$

2) Efetuar o produto $(x + 1)\ (x + 6)\ (x + 3)\ (x + 4)$ tendo em vista a regra já estabelecida.

O primeiro termo é: x^4.

O coeficiente do segundo termo é: $1 + 6 + 3 + 4 = 14$.

O do terceiro é: $1\times6 + 1\times3 + 1\times4 + 6\times3 + 6\times4 + 3\times4 = 67$; o quarto é: $1\times6\times3 + 1\times6\times4 + 1\times3\times4 + 6\times3\times4 = 126$.

O quinto termo é: $1\times6\times3\times4 = 72$.

Então:

$$(x+1)\ (x+6)\ (x+3)\ (x+4) = x^4 + 14x^3 + 67x^2 + 126x + 72.$$

3. Fórmula para desenvolvimento da potência de um binômio. Admitindo que no produto de m binômios

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ \ldots\ (x+l)$$

se tenha $a = b = c \ldots = l$

o primeiro membro da igualdade (I) se transformará em

$$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ \ldots\ (x+a) = (x+a)^m$$

E de acordo com a lei de formação dos termos do segundo membro de (I) os coeficientes de x^{m-1}, x^{m-2} ....., x são, respectivamente, $C_m^1 a$, $C_m^2 a^2$ .... $C_m^{m-1}\ a^{m-1}$.

Logo, podemos escrever:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + C_m^3 a^3 x^{m-3} + \ldots + C_m^k a^k x^{m-k} + \ldots + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m \qquad \text{(II)}$$

Essa fórmula (II), do desenvolvimento da potência m, inteira e positiva, de um binômio é habitualmente chamada de *binômio de Newton*.

A fórmula (II) pode também ser apresentada sob o aspecto seguinte:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1!} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} a^3 x^{m-3} + \ldots + a^m \qquad \text{(III)}$$

4. Exercício.

1) Efetuar o desenvolvimento seguinte: $(x+a)^7$.

De acordo com a fórmula (II) temos:

$$(x+a)^7 = x^7 + C_7^1 a x^6 + C_7^2 a^2 x^5 + C_7^3 a^3 x^4 + C_7^4 a^4 x^3 + C_7^5 a^5 x^2 + C_7^6 a^6 x + a^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$$

5. Desenvolvimento de $(x-a)^m$. A fórmula (II) ou (III) é válida qualquer que seja a, logo, se o segundo termo a é negativo, basta que se observe, em (II) por exemplo, que os termos de ordem par do desenvolvimento contêm o a elevado de expoente ímpar, e, portanto, que esses termos são negativos, para que se possa escrever

$$(x-a)^m = x^m - C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots + (-1)^k C_m^k a^k x^{m-k} + \ldots + (-1)^m a^m \qquad \text{(IV)}$$

6. Exercício. Desenvolver $(x-a)^6$.

Pela (IV) temos:

$$(x-a)^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6$$

7. Exercício. Desenvolver $(x+a)^5$

Temos que $m = 5$.

Então o desenvolvimento terá $5 + 1 = 6$ termos.

Calculados os coeficientes dos 3 primeiros termos, os dos três últimos serão respectivamente iguais. Temos:

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

8. Termo geral do desenvolvimento do binômio. Chama-se termo geral do desenvolvimento de $(x+a)^m$ e representa-se por T_k ao termo do desenvolvimento que está precedido de k termos. Então T_k é um termo de ordem $k+1$, cuja expressão, de acordo com a fórmula (II), é:

$$\boxed{T_k = C_m^k a^k x^{m-k}} \qquad \text{(V)}$$

9. Exercício. Calcular o 5.º termo de $(x+a)^9$.

Se é o 5.º termo possui $k = 4$ termos que o precedem pela (VI) temos:

$$T_4 = C_9^4\ a^4 x^4 = 70\ a^4 x^4$$

10. Soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^m$. Fazendo na fórmula (II) $x = a = 1$, temos:

$$(1+1)^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots + C_m^{m-1} + 1 = 2^m$$

E dizemos que a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^m$ é igual a 2^m. Exemplo:

A soma dos coeficientes do desenvolvimento $(x+a)^7$ é $2^7 = 128$, o que pode ser verificado pelo exercício já feito (n.º 4).

11. Soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x-a)^m$. Fazendo na fórmula (IV) $x = a = 1$, obtemos

$$(1-1)^m = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} + (-1)^m = 0$$

E dizemos que a soma dos coeficientes de $(x-a)^m$ é igual a zero, ou, que a soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar é igual à soma dos valores absolutos dos termos de ordem par. Exemplo:

A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x-a)^6$ é nula. E a soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar é igual à soma dos módulos dos coeficientes dos termos de ordem par, que é igual a 32. (Ver exercício n.º 6).

12. Lei recorrente da formação de termos. De acordo com a fórmula do termo geral, temos:

$$T_{k+1} = C_m^{k+1}\, a^{k+1}\, x^{m-k-1}$$

$$\therefore\ \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{m!}{(k+1)!\,(m-k-1)!}\,a^{k+1}x^{m-k-1} \div \frac{m!}{k!\,(m-k)!}\,a^k x^{m-k}$$

Logo, $\dfrac{T_{k+1}}{T_k} = \dfrac{m-k}{k+1}\cdot\dfrac{a}{x}$ e $\boxed{T_{k+1} = T_k\cdot\dfrac{m-k}{k+1}\cdot\dfrac{a}{x}}$

13. Termo de coeficiente binominal máximo. De acordo com a fórmula do N.º 12, os coeficientes são crescentes desde que:

$$\frac{m-k}{k+1} > 1 \quad \text{ou} \quad k < \frac{m-1}{2}$$

Exemplo: Os termos de $(x+a)^6$ serão crescentes desde que

$$k < \frac{6-1}{2} \quad \text{ou} \quad k < 2\,\frac{1}{2}$$

Logo o termo de coeficiente máximo corresponderá a $k = 2$ (3.º termo) e será, substituindo na fórmula do n.º 12:

$$T_{2+1} = T_3 = C_6^2\, a^2\, x^3 = 20\, a^2\, x^3$$

14. Exercícios para resolver.

Efetuar os produtos seguintes:

1) $(x+1)(x+3)(x+4)(x+5)$
2) $(x-2)(x+1)(x+4)$

Desenvolver os seguintes binômios:

3) $(x+1)^6$
4) $(a-3)^5$
5) $(3x-2)^5$
6) $(1+3x)^3$
7) $\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{2m}{3}\right)^4$
8) $(\sqrt{2}-2x)^3$
9) $(x+\sqrt{2})^4-(x-\sqrt{2})^4$
10) $\left(2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5+\left(2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

11) Calcular o 3.º termo do desenvolvimento de $\left(2x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m$ sabendo-se que esse desenvolvimento possui 7 termos.

12) Calcular o 4.º têrmo de $\left(\frac{a}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$.

13) Calcular o 5.º termo de $(a+2b)^8$. (G. Filho e U.E.G. – 1972).

14) Calcular o termo médio de $(x+\sqrt{3})^6$.

15) Calcular os dois termos do meio de $\left(2x+\frac{a}{2}\right)^5$.

16) Calcular a soma dos coeficientes de $(x+y)^8$.

17) Calcular a soma dos coeficientes de $(x-y)^7$.

18) Calcular a soma dos coeficientes de $(5x+2y)^4$.
(U. Gama Filho – 1972).

19) Sabendo-se que a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^m$ é 2 048, achar m.

20) Sendo 1 024 a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x+1)^m$, calcular m. (E. Flum. Engenharia – 1969 e U.E.G. – 1972).

21) A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x-a)^{10}$ é 512. Qual a soma dos coeficientes dos termos de ordem par?

22) A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x-a)^m$ é 64. Achar m.

23) A soma dos valores absolutos dos coeficientes dos termos de ordem par do desenvolvimento de $(x-a)^m$ é 16. Calcular m.

24) Calcular o termo independente de x nos binômios

$$\left(x^4-\frac{1}{x}\right)^{10},\quad \left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{12} \text{ e } \left(2x+\frac{6}{x^3}\right)^5$$

(E. P. C. Aeronáutica – 1966).

25) Calcular o termo de coeficiente máximo dos binômios $(x+a)^5$ e $(x+a)^{11}$.

26) Calcular o maior termo no desenvolvimento de:

$$\left(1+\frac{2}{3}\right)^{15} \text{ e } \left(1+\frac{1}{5}\right)^{10}$$

27) Calcular m e a para que o 3.º termo de $(x+a)^m$ seja $\frac{10}{9}x^3$.

28) O coeficiente do termo de 7.º grau de desenvolvimento de $(1+x)^{10}$ é ...

(Unificado Engenharia GB – 1972).

29) Calcule o termo em x^4 do desenvolvimento de $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

(Fac. Eng. UEG – 1964).

30) Calcule o termo do desenvolvimento de $(2x^2+y)^9$ em que os expoentes de x e y sejam iguais.

(U. Fluminense – Engenharia – 1969).

31) O 7.º termo do desenvolvimento de $\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^{10}$ é .....

(E. Flum. Eng. – 1957).

32) Calcular o termo de maior coeficiente no desenvolvimento de $(\sqrt{x}+y^3)^{10}$

(I.M.E. – 1971).

33) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de:

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^9$$

(UGF – 73).

34) Sendo iguais os coeficientes de 3.º e do 8.º termos do desenvolvimento de $(a+b)^m$, o valor de m é ... ..

(E. Eng. UF Est. Rio – 1965).

35) Dê o termo de ordem $2n+1$ do desenvolvimento de $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3n}$.

(Fac. Eng. UEG – 1963).

36) Qual o valor da soma:

$$C_{10}^0\left(\frac{1}{2}\right)^0 - C_{10}^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_{10}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \ldots + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

a) 2^{10} b) 2^{-10} c) 0 d) é impossível calcular
e) nenhuma das respostas anteriores

(Instituto de Física – UFRJ – 1969).

37) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$$

(U.E.G. – 1972).

38) Escreva o desenvolvimento de $(x+a^3)^m$, sabendo que a soma dos coeficientes do desenvolvimento é 64.

(Engenharia – 1966 - GB).

RESPOSTAS.

1) $x^4+13x^3+59x^2+107x+60$
2) x^3+3x^2-6x-8
3) $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$
4) $a^5-15a^4+90a^3-270a^2+405a-243$
5) $27x^3-54x^2+36x-8$
6) $1+18x+135x^2+540x^3+1\,215x^4+1\,458x^5+729x^6$
7) $\frac{81}{16}a^8+9a^6m+6a^4m^2+\frac{16}{9}a^2m^3+\frac{16}{81}m^4$
8) $4\sqrt{2}-40x+80\sqrt{2}x^2-160x^3+80\sqrt{2}x^4-32x^5$
9) $8x\sqrt{2}(x^2+2)$
10) $64x^3+80x^2+5x$
11) $180x^6$
12) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
13) $80ab^4$
14) $18x^3$
15) $20a^3x^3$ e $5a^6x^9$
16) 256
17) zero
18) $7^4=2\,401$
19) $m=11$
20) $m=5$
21) -512
22) $m=7$
23) $m=5$
24) { 45; 495. (*Sugestão:* Calcular T_k e fazer o expoente de x igual e 64 512 a zero).
25) $70a^4x^4$ e $462a^5x^5$ (Ler N.º 13).
26) $169\frac{13}{27}$ (*Sugestão:* Baseado no N.º 12 calcular $T_{k+1}=T_k\times\frac{26-2k}{3k+3}$. Os termos crescerão se a fração for maior do que um. Logo, $k=4$ e $T_5=169\frac{13}{27}$.) E 2.
27) $m=5$ e $a=\pm\frac{1}{3}$ (*Sugestão:* Calcular T_3. Fazer o expoente de x igual a 3 e o restante igual a $\frac{10}{9}$.)
28) 120
29) $448x^4$
30) $672x^6y^6$
31) $210b/a^2$
32) $252x^{6}y^{10}$
33) 84
34) 9
35) $\frac{1}{n!}(2n+1)(2n+2)\ldots 3nx^{-n}$
36) 2^{-10} 37) 20
38) $x^6+6a^3x^5+15a^6x^4+20a^9x^3+15a^{12}x^2+6a^{15}x+a^{18}$

CAPÍTULO VII

Determinantes. Sistemas lineares

1. Origem da teoria dos determinantes. A teoria dos determinantes teve sua origem nas pesquisas iniciadas, no fim do século XVII, por Leibnits, na Europa, e Seki Kowa, no Japão, com a finalidade de simplificar as trabalhosas eliminações necessárias à resolução de um sistema do primeiro grau com m equações e n incógnitas.

Apesar de ter sua origem em um problema da Álgebra Elementar, do qual já tomamos conhecimento no Curso Ginasial, a teoria dos determinantes desenvolveu-se a tal ponto que constitui hoje um algoritmo de grande importância na Matemática pura e aplicada.

2. Matriz retangular. Chama-se *matriz retangular* de m linhas e n colunas ao conjunto de mn números ou letras dispostas em um quadro de m linhas horizontais e n verticais.

Os mn números ou letras considerados denominam-se *elementos* da matriz.

Representa-se uma matriz retangular de mn elementos assim:

$$\left\| \begin{array}{l} a_1^1 \;\; a_1^2 \ldots . \;\; a_1^n \\ a_2^1 \;\; a_2^2 \ldots . \;\; a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1 \;\; a_m^2 \ldots . \;\; a_m^n \end{array} \right\|$$

onde os índices inferiores dos elementos indicam as ordens das linhas e os índices superiores, as ordens das colunas.

3. Matriz quadrada. Quando uma matriz retangular tem $m = n$, isto é, o mesmo número de linhas e colunas, diz-se que se tem uma *matriz quadrada* de n^2 elementos ou de *ordem* n.

Indica-se assim:

$$\left\| \begin{array}{l} a_1^1 \;\; a_1^2 \ldots . \;\; a_1^n \\ a_2^1 \;\; a_2^2 \ldots . \;\; a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 \;\; a_n^2 \ldots . \;\; a_n^n \end{array} \right\| \qquad \text{(I)}$$

Chama-se *fila* de uma matriz quadrada, indistintamente uma linha ou coluna.

Chamamos de *filas paralelas* as linhas ou colunas, separadamente.

Chama-se *diagonal principal* de (I) à sucessão dos elementos

$$a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3 \ldots . a_n^n \qquad \text{(II)}$$

cujos índices inferiores e superiores são iguais.

Sempre que efetuarmos inversões sobre os elementos da diagonal principal tomaremos o agrupamento (II) como permutação fundamental.

Chama-se *diagonal secundária* à sucessão dos elementos

$$a_1^n \; a_2^{n-1} \ldots . a_{n-1}^2 \; a_n^1$$

cuja soma dos índices é $n + 1$.

4. Determinantes. A toda matriz quadrada de números associaremos um número; a toda matriz quadrada de letras ou letras e números associaremos um polinômio ou número. Ao polinômio ou número associado a uma matriz quadrada, mediante certas normas, chamamos de *determinante*.

Isto é, chama-se *determinante* da matriz quadrada (I), ou simplesmente *determinante de ordem* n, à soma algébrica dos produtos, dos elementos de uma matriz quadrada de n^2 elementos, obtidos, permutando-se de todos os modos possíveis os índices superiores dos elementos da diagonal principal, fixados os inferiores, e admitindo-se que esses produtos sejam positivos ou negativos, conforme os índices superiores de seus fatores formem uma permutação de classe par ou ímpar, respectivamente.

Podemos representar um determinante de ordem n pela sua própria matriz quadrada, assim:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots\ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots\ldots a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots\ldots a_n^n \end{vmatrix} \qquad \text{(III)}$$

e nesse caso usamos as expressões *linhas, colunas, filas* e *diagonais* de um determinante.

5. Observações. Do exame da definição e da notação de determinante podemos tirar várias conclusões.

1.ª) O determinante de uma matriz quadrada de n^2 elementos ou de ordem n tem $n!$ termos.

2.ª) Um determinante tem tantos termos positivos quantos negativos.

De fato, como conseqüência do *teorema de Bezout*, temos que o número de permutações pares de n elementos é igual ao de permutações ímpares, logo, pela definição, o número de termos positivos e negativos é o mesmo.

3.ª) Cada termo de um determinante possui um e um só elemento de cada linha ou coluna da sua matriz quadrada.

4.ª) O determinante podia ser obtido, também, fixando-se, ao contrário, os índices superiores e permutando-se de todos os modos possíveis os inferiores.

6. Determinante de segunda ordem. Seja o determinante de segunda ordem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

De acordo com a definição (n.º 4), calcularemos o Δ efetuando a soma algébrica dos produtos obtidos, permutando-se de todos os modos possíveis os índices superiores, fixados os inferiores, de $a_1^1\ a_2^2$.

Como só existem duas permutações $a_1^1\ a_2^2$ e $a_2^1\ a_1^2$, temos:

$$\Delta = a_1^1\ a_2^2 - a_1^2\ a_2^1$$

E podemos dizer que, calcula-se um determinante de 2.ª ordem, efetuando-se a diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e secundária. Exemplo:

Calcular o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} 3 = \times 1 - (-2 \times 2) = 7$$

7. Determinante de terceira ordem. Seja o determinante de terceira ordem

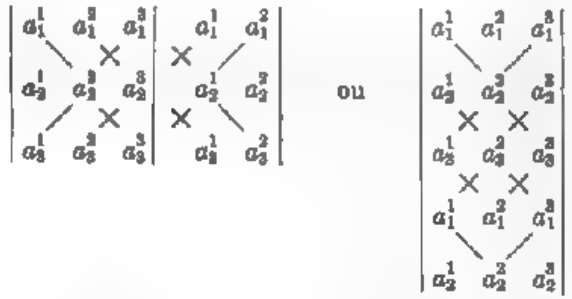
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Permutando-se de todos os modos possíveis os índices superiores da diagonal principal: $a_1^1\ a_2^2\ a_3^3$.

E, de acordo com a definição de determinante

$$\Delta = a_1^1\ a_2^2\ a_3^3 - a_1^1\ a_2^3\ a_3^2 + a_1^3\ a_2^1\ a_3^2 - a_1^3\ a_2^1\ a_3^3 + a_1^2\ a_2^3\ a_3^1 - a_1^3\ a_2^2\ a$$

8. Regra de Sarrus(*). Para se calcular um determinante de 3.ª ordem repetem-se as duas primeiras colunas à direita da terceira, ou as duas primeiras linhas abaixo da terceira; a seguir somam-se os produtos dos três elementos da diagonal principal e das paralelas a ela e subtraem-se os produtos dos elementos pertencentes à diagonal secundária e às suas paralelas.



Em qualquer dos dois casos obteremos para Δ o valor encontrado no n.º 7.

(*) P. Sarrus, 1798-1861.

9. Exercício. Calcular o valor de

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

temos:

$$\Delta = 3.3.1+1.4.3+2.2.1-2.3.3-3.4.1-1.2.1 = -7$$

10. Observação. Um determinante de 3.ª ordem pode ser obtido facilmente, na prática, sem a repetição de linhas ou colunas.

11. Determinante de ordem superior à terceira. Estudamos a maneira de calcular um determinante de 2.ª e de 3.ª ordem. Para o cálculo de um determinante de 4.ª ordem, que possui $4! = 24$ termos, ou de ordem ainda maior, não existe uma regra prática.

Estudaremos, a seguir, propriedades e teoremas que permitirão o cálculo de um determinante de ordem maior do que 3, reduzindo em muito o trabalho do cálculo desses determinantes com auxílio da definição.

12. Propriedades dos determinantes.

1.ª) *Um determinante não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas correspondentes.*

Com efeito, essa troca equivale a permutar os índices inferiores, fixados os superiores, ao contrário do que diz a definição (n.º 4). E pelo que vimos na 4.ª observação (n.º 5), não influirá no valor do determinante.

2.ª) *Se todos os elementos de uma fila são nulos, o determinante é nulo.*

De fato, se de acordo com a 3.ª observação (n.º 5), cada termo do determinante possui um elemento de cada fila, então todos os produtos do desenvolvimento do determinante têm um fator nulo e, portanto, o determinante é nulo, pois seus termos o são.

3.ª) *Multiplicando-se ou dividindo-se todos os elementos de uma fila por um número, o determinante fica multiplicado ou dividido por esse número.*

Realmente, pela mesma razão da propriedade anterior, multiplicar ou dividir os elementos de uma fila por um número equivale a multiplicar ou dividir todos os termos do determinante por esse número.

4.ª) *Um determinante muda de sinal quando se trocam os elementos de duas filas paralelas, conservando-se a ordem de seus elementos.*

Com efeito, isso corresponde a trocar dois índices superiores ou inferiores, em cada termo do determinante, o que acarreta a mudança de classe de cada permutação e, portanto, do sinal de cada termo e do próprio determinante.

5.ª) *Um determinante que tem duas filas paralelas idênticas é nulo.*

De fato, seja Δ o valor de um determinante que possua por exemplo, duas linhas iguais; se trocarmos essas duas linhas, o determinante não se altera, mas, pela propriedade anterior, ele trocou de sinal, logo

$$\Delta = -\Delta \quad \therefore \quad \Delta = 0$$

6.ª) *Um determinante que possui duas filas paralelas proporcionais é nulo.*

Com efeito, seja um determinante que possua duas filas paralelas proporcionais; multiplicando uma delas por um número ($m \neq 0$), coeficiente de proporcionalidade das duas filas, elas ficarão iguais, e, se são iguais as duas filas paralelas, pela propriedade anterior, o novo determinante é nulo. Então, de acordo com a 3.ª e 5.ª propriedades, temos:

$$m\,\Delta = 0 \quad \therefore \quad \Delta = 0$$

13. Menor complementar de um elemento de um determinante. Chama-se menor complementar de um elemento a_r^s de um determinante Δ de ordem n, ao determinante

de ordem $n-1$, que se obtém suprimindo-se, em Δ, a linha de ordem r e a coluna de ordem s, que se representa por A'^{s}_{r}. Exemplo:

O menor complementar do elemento a_1^3 de

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad \text{é} \quad A'^{3}_{1} = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

14. Complemento algébrico de um elemento de um determinante. Chama-se de complemento algébrico de um elemento a_r^s de um determinante Δ ao seu menor complementar com o sinal mais ou menos conforme $r+s$ seja par ou ímpar, respectivamente. E indicamos assim A_r^s.

Assim, no exemplo do n.º 13, o complemento algébrico de a_1^2 é $-A'^{2}_{1} = A_1^2$, pois a soma das ordens da linha e da coluna de a_1^2 é ímpar.

15. Exercício. Achar o complemento algébrico do elemento 6 de Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

O menor complementar do 6 é: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$

O complemento algébrico será: $-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$

O menor complementar veio precedido de sinal – porque 6 pertence à 2.ª linha e 3.ª coluna e, portanto, a soma das ordens da linha e da coluna de 6 é ímpar.

16. Teorema. *A soma dos termos de um determinante Δ, que possuem o elemento a_1^1, de sua primeira linha e primeira coluna, é igual a $a_1^1 A'^{1}_{1}$, onde A'^{1}_{1} é o menor complementar de a_1^1.*

Com efeito, cada termo do determinante, que possui a_1^1 como fator, é obtido multiplicando a_1^1 por um e somente um elemento de cada fila, isto é, multiplicando a_1^1 por um termo de seu menor complementar. E, o sinal de cada termo do determinante que contém a_1^1, é o mesmo que o do produto obtido, multiplicando a_1^1 pelo correspondente termo de A'^{1}_{1}, pois os grupamentos constituidos pelos elementos dos termos de Δ que contêm a_1^1 são permutações de mesma classe que as permutações dos elementos constituidos pelos termos de A'^{1}_{1}. (Verifique, por exemplo, o aluno o desenvolvimento de Δ do n.º 7 e o desenvolvimento de A'^{1}_{1} de Δ).

17. Teorema. *A soma dos termos de um determinante Δ, que possuem a_r^s como fator é igual a $(-1)^{r+s} a_r^s A'^{s}_{r}$, onde A'^{s}_{r} é o menor complementar de a_r^s.*

De fato, o elemento a_r^s pode ser colocado na primeira linha e primeira coluna, isto é, no lugar de a_1^1, mudando-se a posição da linha r para a primeira linha mediante $r-1$ trocas sucessivas, mantendo-se, porém, a posição relativa das demais; a coluna s pode passar para a primeira coluna, também por meio de $s-1$ trocas sucessivas, mantendo a posição relativa das outras colunas.

Como a cada troca de 2 filas paralelas corresponde uma troca de sinal de Δ (n.º 12, 4.ª propriedade), então o valor do novo determinante que tem a_r^s como elemento da primeira coluna é igual a:

$$\Delta' = (-1)^{r-1+s-1}. \quad \Delta = (-1)^{r+s-2} . \Delta$$

Mas, $r+s-2$ e $r+s$ são de mesma paridade, então

$$\Delta' = (-1)^{r+s-2} \Delta = (-1)^{r+s} . \Delta$$

Como, de acordo com o teorema N.º 16, a soma dos termos de Δ' que contêm a_r^s é $a_r^s A'^{s}_{r}$, logo, a soma dos termos de Δ que contêm a_r^s é:

$$(-1)^{r+s} a_r^s A'^{s}_{r} = a_r^s A_r^s$$

18. Desenvolvimento de um determinante, segundo os elementos de uma fila. TEOREMA: *Um determinante é*

a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos complementos algébricos.

Este enunciado nada mais é do que um caso particular do chamado *teorema de Laplace*(*).

Seja o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots . a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots . a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots . a_n^n \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo-se este determinante, segundo a definição, teremos uma soma onde em todos os termos deve aparecer um elemento de cada fila.

Consideremos os termos que contêm os fatores a_r^s $(s = 1,2 \ldots n)$ e coloquemos esses elementos em evidência. Temos:

$$D = a_r^1 \, k_1 + a_r^2 \, k_2 + \ldots . + a_r^n \, k_n$$

onde k_1, k_2 .... k_n representam as expressões onde não aparecem os elementos a_r^s. (Não poderia aparecer senão contrariaria a definição de determinante).

Mas, de acordo com o teorema anterior, podemos escrever:

$$D = (-1)^{r+1} \, a_r^1 A_r^1 + (-1)^{r+2} \, a_r^2 \, A_r^2 + \ldots . + (-1)^{r+n} \, a_r^n \, A_r^n$$

ou

$$D = a_r^1 \, A_r^1 + a_r^2 \, A_r^2 + \ldots . + a_r^n \, A_r^n \qquad \text{(IV)}$$

E fica demonstrado o teorema.

19. Exercício. Desenvolver o determinante D, segundo os elementos de sua primeira coluna

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Temos:

$$D = 1 . \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 . \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1) . \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

(*) P. S. Laplace, matemático. Século XVIII.

Como o primeiro determinante é nulo (duas primeiras colunas proporcionais), então:

$$D = 0 - 2(24) + 0 + 1 . (6 - 6 + 12) = -48 + 12 = -36$$

20. Propriedades decorrentes do desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma fila.

1.ª) *Se os elementos de uma fila são nulos, exceto um, o determinante é igual ao produto desse elemento pelo respectivo complemento algébrico.*

De fato, se na expressão (IV) considerarmos todos os elementos da linha r nulos menos um, a_r^1, por exemplo, temos

$$D = a_r^1 \, A_r^1 + 0 . A_r^2 + \ldots . + 0 . A_r^n = a_r^1 \, A_r^1$$

2.ª) *A soma dos produtos dos elementos de uma fila de um determinante pelos complementos algébricos dos elementos correspondentes de uma fila paralela é nula* (Chamado *teorema de Cauchy*)(*).

Desenvolvendo um determinante D, de ordem n, pela fórmula (IV), temos:

$$D = a_r^1 \, A_r^1 + a_r^2 \, A_r^2 + \ldots + a_r^n \, A_r^n$$

Substituindo-se, nesta última expressão, os elementos da linha r pelos elementos da linha p temos:

$$D = a_p^1 \, A_r^1 + a_p^2 \, A_r^2 + \ldots . + a_p^n \, A_r^n = 0$$

pois efetuar a substituição dos elementos a_r^s por a_p^s $(s = 1,2 \ldots . n)$ equivale a admitir que D possui duas linhas iguais e, portanto, que é nulo (n.º 12, 5.ª propriedade).

3.ª) *Se os elementos de uma fila de um determinante* D *são somas de* m *parcelas, o determinante pode decompor-se numa soma de* m *determinantes, obtidos, substituindo-se a fila composta de* m *parcelas sucessivamente por filas constituídas de parcelas de igual ordem.*

Seja o determinante D, cuja primeira coluna, por exemplo, seja constituída pelas somas de m parcelas.

$a_1^1 + b_1^1 + \ldots + l_1^1$; $a_2^1 + b_2^1 + \ldots + l_2^1$; $\ldots . a_n^1 + b_n^1 + \ldots . + l_n^1$ respectivamente.

(*) Cauchy, grande matemático. 1789-1857

Desenvolvendo D segundo os elementos da primeira coluna, temos:

$$D = (a_1^1 + b_1^1 + \ldots + l_1^1)\,A_1^1 + (a_2^1 + b_2^1 + \ldots + l_2^1)\,A_2^1 + \ldots + (a_n^1 + b_n^1 + \ldots + l_n^1\,A_n^1)$$

$$\therefore D = (a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \ldots + a_n^1 A_n^1) + (b_1^1 A_1^1 + b_2^1 A_2^1 + \ldots + b_n^1 A_n^1) + \ldots + (l_1^1 A_1^1 + l_2^1 A_2^1 + \ldots + l_n^1 A_n^1)$$

onde cada soma entre parênteses representa um determinante, cuja primeira coluna é cada uma das parcelas dos termos da 1.ª coluna de D. Exemplo:

$$\begin{vmatrix} x+y+1 & 1 & 2 \\ x-y+1 & 2 & 1 \\ x-y-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 2 & 1 \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 1 & 2 \\ -y & 2 & 1 \\ -y & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

4.ª) *O valor de um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma fila, os elementos de outra fila paralela multiplicados por uma constante.*

Seja um determinante D

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots . a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots . a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots . a_n^n \end{vmatrix}$$

Multiplicando a 2.ª coluna por m e somando o resultado com a 1.ª coluna, temos:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + ma_1^2 & a_1^2 \ldots . a_1^n \\ a_2^1 + ma_2^2 & a_2^2 \ldots . a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 + ma_n^2 & a_n^2 \ldots . a_n^n \end{vmatrix}$$

que, de acordo com a propriedade anterior é igual a

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots . a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots . a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots . a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ma_1^2 & a_1^2 \ldots a_1^n \\ ma_2^2 & a_2^2 \ldots a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ ma_n^2 & a_n^2 \ldots a_n^n \end{vmatrix} = D$$

pois o segundo determinante é nulo, por ter 2 colunas proporcionais.

5.ª) *O valor de um determinante não se altera, quando se somam aos elementos de uma fila, uma função linear dos elementos correspondentes de outras filas paralelas* (conhecido como *teorema de Jacobi*).

De fato, é uma conseqüência da propriedade anterior.

6.ª) *Um determinante é nulo, se os elementos de uma fila são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas.*

21. Aplicações. O teorema n.º 18, assim como suas conseqüências (n.º 20), tem grande aplicação no cálculo dos determinantes. Exemplos:

1.º) Calcular o determinante D, reduzindo-o, antes, a um determinante que possua todos elementos de uma fila nulo, exceto um.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 41 & 22 & 35 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a 3.ª coluna por -2 e somando com a 2.ª, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 41 & -48 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

E de acordo com a 1.ª propriedade (n.º 20) obtemos:

$$D = +1. \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 41 & -48 \end{vmatrix} = +(-48 + 164) = 116$$

2.º) Provar que o determinante D é múltiplo de 9, sem desenvolvê-lo.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Somando à 3.ª coluna a 1.ª multiplicada por 100, e a 2.ª por 10, o determinante não se altera (5.ª propriedade, n.º 20).

Temos então:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 252 \\ 1 & 2 & 126 \\ 3 & 7 & 378 \end{vmatrix}$$

Dividindo os elementos da 3.ª coluna por 9, temos:

$$D = 9 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 & 28 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 7 & 42 \end{vmatrix}$$

E, portanto, D é múltiplo de 9.

22. Abaixamento da ordem de um determinante. O abaixamento da ordem de um determinante D consiste em achar um determinante $D' = D$ e de ordem menor do que a de D.

Pode-se transformar um determinante de ordem n em um outro, de ordem uma unidade menor, reduzindo todos elementos de D a zero, exceto um deles.

Ver aplicação 2, n.º 21

Pode-se, também utilizar a *regra prática de Chió*(*), no caso do determinante ter um elemento igual a 1, ou tornando um de seus elementos igual a unidade. Neste caso a *regra de Chió* é muito útil para baixar a ordem do determinante.

23. Regra de Chió. Um determinante D, que possui um elemento $a_r^s = 1$, é igual a um determinante, obtido suprimindo em D a linha r e a coluna s, e substituindo os elementos restantes pela diferença entre eles e o produto dos dois termos que estejam nas filas suprimidas e que pertençam a linha e a coluna do elemento considerado. Esse determinante obtido deve vir precedido do sinal + ou − conforme $r+s$ seja par ou ímpar, respectivamente.

Seja um determinante D, de ordem n (N.º 4 - III) e seja $a_r^s = 1$ um de seus elementos.

Dividindo a primeira coluna por a_r^1, a segunda por a_r^2 e a última por a_r^n e multiplicando o determinante por $a_r^1\, a_r^2 \ldots a_r^n$, para que não se altere, temos:

(*) Cató. Professor de Matemática. Século XIX.

$$D = a_r^1\, a_r^2 \ldots a_r^n \begin{vmatrix} \frac{a_1^1}{a_r^1} & \frac{a_1^2}{a_r^2} & \ldots & a_1^s & \ldots & \frac{a_1^n}{a_r^n} \\ \frac{a_2^1}{a_r^1} & \frac{a_2^2}{a_r^2} & \ldots & a_2^s & \ldots & \frac{a_2^n}{a_r^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_n^1}{a_r^1} & \frac{a_n^2}{a_r^2} & \ldots & a_n^s & \ldots & \frac{a_n^n}{a_r^n} \end{vmatrix}$$

Fixando a coluna s e subtraindo-a das demais, obtemos:

$$D = a_r^1\, a_r^2 \ldots a_r^n \begin{vmatrix} \frac{a_1^1}{a_r^1} - a_1^s & \ldots & a_1^s & \ldots & \frac{a_1^n}{a_r^n} - a_1^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_n^1}{a_r^1} - a_n^s & \ldots & a_n^s & \ldots & \frac{a_n^n}{a_r^n} - a_n^s \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira, segunda, ... e última coluna, respectivamente por $a_r^1, a_r^2, \ldots a_r^n$, vem:

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 - a_r^1\, a_1^s & \ldots & a_1^s & \ldots & a_1^n - a_r^n\, a_1^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 - a_r^1\, a_n^s & \ldots & a_n^s & \ldots & a_n^n - a_r^n\, a_n^s \end{vmatrix}$$

E, de acordo com a primeira propriedade (n.º 20), obteremos:

$$D = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} a_1^1 - a_r^1 & \ldots & a_1^s & \ldots & a_1^n - a_r^n\, a_1^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 - a_r^1 & \ldots & a_n^s & \ldots & a_n^n - a_r^n\, a_n^s \end{vmatrix}$$

que nada mais é do que a *regra de Chió*, no caso particular de $a_r^s = 1$.

24. Exemplo. Reduzir, pela *regra de Chió*, o determinante D a um determinante de 3.ª ordem.

$$D = \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

Consideremos o elemento $a_1^1 = a_1^1 = 1$; de acordo com a *regra de Chió*, temos:

$$D = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-5.3 & 0-3.3 & -1-2.3 \\ -2-5.2 & 1-3.2 & 0-2.2 \\ 2-5.1 & 3-3.1 & 1-2.1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -9 & -7 \\ -12 & -5 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

25. Exercícios resolvidos.

1) Mostrar, sem desenvolver, que o determinante D é nulo.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

De fato, os elementos da terceira coluna são iguais à soma dos elementos das duas primeiras, e, portanto, D é nulo (6.ª propriedade, n.º 20).

2) Mostrar que todo determinante formado com 9 termos consecutivos da sucessão 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... é nulo.

(Esc. N. Engenharia – 1939).

Com efeito, o determinante formado por 9 termos consecutivos da sucessão dada tem evidentemente os elementos da 3.ª coluna iguais à soma dos elementos das duas primeiras e, portanto, pela 6.ª propriedade, n.º 20, é nulo.

3) Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & 1+a_2 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & 1 & 1+a_3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

(Esc. N. Engenharia – 1943).

Fixando a 1.ª linha e subtraindo-a das demais, temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Empregando sucessivamente a 1.ª propriedade, n.º 20, temos:

$$D = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \begin{vmatrix} a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = \ldots = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

26. Exercícios para resolver.

Calcular os determinantes:

1) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$ 2) $\begin{vmatrix} x-y & x \\ y-x & y \end{vmatrix} =$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} =$

4) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$

(E. P. C. Aeronáutica – Sel 3.º Ano – 1950).

Calcular os determinantes, com auxílio das propriedades:

5) $\begin{vmatrix} 15 & 3 & 15 \\ 2 & 15 & 2 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} =$ 7) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

8) Calcular, sem uso das tábuas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}$$

(E. P. C. Aeronáutica – 1956).

9) Calcular:

$$\begin{vmatrix} 43 & 101 & 17 \\ 5 & 72 & -20 \\ 38 & 29 & 37 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

(Colégio Aplicação – F. N. Filos. – 1952).

10) Resolver a equação: $\begin{vmatrix} 4x & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

(U.F.G. – 1972).

11) Verificar a identidade:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

(Esc. N. Engenharia – Complementar – 1937).

12) Qual a propriedade que justifica a igualdade:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 18 \end{vmatrix}$$

(Esc. Aeronáutica – 3.º Ano E. P. C. – 1951).

13) Quantos termos tem um determinante de 5.ª ordem?

14) O valor de um determinante é 36. Qual o seu novo valor, se multiplicarmos a sua primeira linha por 2 e dividirmos sua primeira coluna por 9?

15) Reduzir à unidade todos os elementos da primeira linha de:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

16) Reduzir a números inteiros o determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 2 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 2 & \frac{4}{5} \end{vmatrix}$$

17) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ é:

(MACK – 73 – S.P.).

18) Demonstrar a identidade:

$$\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ zx & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

(Esc. Aeronáutica – 3º Ano. E.P.C. – 1961).

Calcular os determinantes:

19) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$

(Colégio Aplicação – F. N. Filos. – 1952).

20) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

(Esc. N. Engenharia – Complementar – 1937).

21) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

22) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} =$

23) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

(U.E.G – 1972).

24) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

(E. P. C. Aeronáutica – 1959).

25) Dê, sob a forma de produto, o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} a^{-2} & a^{-1} & 1 \\ b^{-2} & b^{-1} & 1 \\ c^{-2} & c^{-1} & 1 \end{vmatrix}$$ sendo $abc \neq 0$

(Esc. Eng. UF – Est. Rio – 1963).

26) Resolver a equação: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$

(Esc. N. Engenharia – Complementar – 1937).

27) Resolver a equação: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3+x \end{vmatrix} = 0$

(Esc. Técnica do Exército – 1960).

28) Provar que o determinante D é múltiplo de 11, sem desenvolvê-lo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

(I. T. A. – 1966).

29) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$ é

Economias – UFRJ 1971).

30) Calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} =$$

(Esc. N. Engenharia – 1961).

31) Calcule: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 \end{vmatrix}$

(E. N. Eng. – 1959 e U.E.G. – 1972).

32) Estabeleça a relação que deve existir entre a e b para que seja nulo o determinante

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(Engenharia – 1966 – GB).

33) Resolvendo a equação

$$\begin{vmatrix} \log_{10} x & \log_2 10 & \log_x 10 \\ 10 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tem-se que.

(UGF - 73).

34) Resolver a equação em x:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3+x \end{vmatrix} = 0$$

a) $x = b^3 (a-c)$ b) $x = (b-c)(c-a)$
c) $x = (b-a)(c-a)$ d) $x = (a-b)(a-c)$
e) $x = (b-c)(a-b)$

(CICE - 1968)

RESPOSTAS:

1) -2 6) 0 12) Ver n.º 20, 4.ª prop.
2) $x^3 - y^3$ 7) 0 13) 5!
3) $(a-b)(b-c)(c-a)$ 8) 2 14) 8
4) 60 9) 10 15) Ver n.º 12, 3.ª prop
5) 0 10) $x = -\frac{1}{2}$ 16) Ver n.º 12, 3.ª prop.
17) -2

18) Multiplica as linhas do 1.º determinante por x, y e z, respectivamente. Após divide a 1.ª coluna por xyz.

19) 4 20) 4 21) 0 22) 0 23) 0 24) 15

25) $\frac{1}{a^2b^2c^2}(b-a)(c-a)(c-b)$ 26) $x = \frac{abc}{ab+ac+bc}$

27) $x = (b-c)(c-a)$ 28) Ver n.º 21, 2.º
29) $a^4 - 3a^2 + 1$ 30) $a(b-a)(c-b)(d-c)$
31) $2a^3$ 32) $b = 2a$
33) $x = 10$ ou $x = \frac{1}{10}$ 34) $x = (c-b)(a-c)$

CAPÍTULO VIII

Sistemas de equações lineares

1. Definições. Chama-se *equação linear* com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (I)$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes.

Se, em particular, $b = 0$ a equação (I) diz-se *equação linear homogênea*.

Denomina-se *sistema de equações lineares* a um conjunto de equações da forma (I).

Um sistema de m equações lineares com n incógnitas constitui o caso mais geral de sistemas de equações lineares.

Consideremos um sistema linear de n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_1^jx_j + \ldots + a_1^nx_n = b_1 \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_2^jx_j + \ldots + a_2^nx_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1x_1 + a_n^2x_2 + \ldots + a_n^jx_j + \ldots + a_n^nx_n = b_n \end{cases} \qquad (II)$$

Chama-se *solução do sistema* (II) ao conjunto de n valores que é, simultaneamente, solução de todas as equações do sistema.

O sistema (II) diz-se *possível*, quando admite solução; *impossível*, quando não possui solução.

Um sistema (II) linear, possível, diz-se *determinado*, quando tem uma só solução; diz-se *indeterminado*, quando tem mais de uma.

Dois sistemas dizem-se *equivalentes*, quando têm a mesma solução.

Estudaremos, a seguir, uma regra que permite achar cada valor da solução de um sistema da forma (II).

2. Regra de Cramer(*). Um sistema de n equações lineares com n incógnitas, cujo determinante formado pelos coeficientes dessas incógnitas é diferente de zero, é determinado. O valor de cada incógnita se obtém, dividindo pelo determinante dos coeficientes das incógnitas, o determinante que dele se deriva substituindo ordenadamente, os coeficientes da incógnita a calcular pelos termos independentes considerados escritos no segundo membro.

Com efeito, seja D o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas de (II):

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^s \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^s \dots a_2^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots a_n^s \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

e seja N_s o determinante que se obtém substituindo, ordenadamente, os elementos da coluna s de D (coeficientes de x_s) pelos termos independentes $b_1, b_2 \dots b_n$. Esses determinantes chamam-se *determinantes das incógnitas*.

$$N_s = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots b_1 \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots b_2 \dots a_2^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots b_n \dots a_n^n \end{vmatrix} \qquad \text{(III)}$$

Designando por $A_1^s, A_2^s, \dots A_n^s$ os complementos algébricos dos elementos da coluna s de D, e multiplicando as equações de (II) respectivamente por $A_1^s, A_2^s \dots A_n^s$, teremos:

$$\begin{cases} a_1^1 A_1^s x_1 + a_1^2 A_1^s x_2 + \dots + a_1^s A_1^s x_s + \dots + a_1^n A_1^s x_n = b_1 A_1^s \\ a_2^1 A_2^s x_1 + a_2^2 A_2^s x_2 + \dots + a_2^s A_2^s x_s + \dots + a_2^n A_2^s x_n = b_2 A_2^s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 A_n^s x_1 + a_n^2 A_n^s x_2 + \dots + a_n^s A_n^s x_s + \dots + a_n^n A_n^s x_n = b_n A_n^s \end{cases}$$

Somando membro a membro essas equações, colocando as incógnitas em evidência, obtemos:

$$(a_1^1 A_1^s + a_2^1 A_2^s + \dots + a_n^1 A_n^s) x_1 + (a_1^2 A_1^s + a_2^2 A_2^s + \dots + a_n^2 A_n^s) x_2 + \\ + \dots + (a_1^s A_1^s + a_2^s A_2^s + \dots + a_n^s A_n^s) x_s + \dots + (a_1^n A_1^s + a_2^n A_2^s + \dots + \\ + a_n^n A_n^s) x_n = b_1 A_1^s + b_2 A_2^s + \dots + b_n A_n^s$$

(*) Cramer, matemático. Século XVIII.

Notando que o coeficiente de x_s é o próprio determinante D (*Teorema de Laplace*) e que os coeficientes das demais incógnitas são nulos (*Teorema Cauchy*), temos que a última igualdade ficará:

$$Dx_s = b_1 A_1^s + b_2 A_2^s + \dots + b_n A_n^s$$

Como o segundo membro dessa equação é o determinante N_s (III), então:

$$Dx_s = N_s$$

Como essa última equação é válida para $s = 1, 2, \dots n$ podemos então escrever as n equações:

$$\begin{cases} Dx_1 = N_1 \\ Dx_2 = N_2 \\ \dots\dots\dots \\ Dx_n = N_n \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

As equações do sistema (IV) são combinações lineares das equações do sistema ((II), portanto são equivalentes os sistemas (II) e (IV).

Supondo então $D \neq 0$ a solução do sistema (IV) e, portanto, do sistema (II) será constituída pelo conjunto de valores:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{N_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{N_2}{D} \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{N_n}{D} \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

Os valores das incógnitas em (V) constituem a representação algébrica da *regra de Cramer*.

Se as equações do sistema (II) são homogêneas $N_s = 0$ e os valores de $x_1, x_2, \dots x_n$ são nulos.

3. Exemplo. Resolver pela *regra de Cramer* o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6x + 2y - 3z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Calculemos primeiro o *determinante* D *dos coeficientes das incógnitas*:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 4 - 6 - 12 + 2 = -12$$

Como $D \neq 0$, o sistema é determinado

$$Nx = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 6 - 9 - 2 + 4 = -12$$

$$Ny = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 9 + 2 + 12 - 18 + 1 = -24$$

$$Nz = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 2 + 8 + 2 - 24 - 6 = -36$$

Pelas (V), temos:

$$x = \frac{Nx}{D} = 1, \; y = \frac{Ny}{D} = 2 \text{ e } z = \frac{Nz}{D} = 3$$

4. Exemplo. Resolver pela *regra de Cramer*:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2y + 2z = 1 \\ 6z + t = 3 \\ t - 2x = 1 \end{cases}$$

Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 36 \qquad Nx = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$Ny = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \qquad Nz = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad Nt = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 72$$

Temos então:

$$x = \frac{Nx}{D} = \frac{1}{2}; \; y = \frac{Ny}{D} = \frac{1}{3}; \; z = \frac{Nz}{D} = \frac{1}{6} \text{ e } t = \frac{Nt}{D} = 2$$

5. Sistemas lineares com m equações e n incógnitas. Seja o sistema

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_1^sx_s + \ldots + a_1^nx_n = b_1 \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_2^sx_s + \ldots + a_2^nx_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r^1x_1 + a_r^2x_2 + \ldots + a_r^sx_s + \ldots + a_r^nx_n = b_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1x_1 + a_m^2x_2 + \ldots + a_m^sx_s + \ldots + a_m^nx_n = b_m \end{cases} \quad \text{(VI)}$$

e formemos a matriz dos coeficientes das incógnitas

$$\Delta = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^s \ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^s \ldots a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r^1 & a_r^2 \ldots a_r^s \ldots a_r^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1 & a_m^2 \ldots a_m^s \ldots a_m^n \end{Vmatrix}$$

Da matriz Δ, pela supressão de linhas e colunas, podem deduzir-se vários determinantes.

Chama-se *determinante principal do sistema* (VI) ao determinante, não nulo, de maior ordem deduzido da matriz.

Se houver mais de um determinante satisfazendo a essas condições, escolhe-se arbitrariamente um deles para determinante principal. E sendo p a ordem do determinante principal é claro que p será, no máximo, igual ao menor dos números m ou n.

Como é sempre possível alterar a ordem das equações e das incógnitas, podemos escrever o sistema (VI) de tal modo que os elementos do determinante D_p sejam os coeficientes das p primeiras incógnitas nas p primeiras equações, isto é, de modo que

$$D_p = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1 & a_p^2 \ldots a_p^p \end{vmatrix}$$

As incógnitas, cujos coeficientes figuram no determinante principal, chamam-se *incógnitas principais* e as equações que possuam esses coeficientes se denominam *equações principais*.

Chama-se *determinante característico* relativo à equação de ordem $r (r > p)$ ao determinante que se obtém contornando-se ou bordando-se o determinante principal com os coeficientes das incógnitas principais pertencentes à equação de ordem r e com a coluna formada pelos termos independentes dessas equações principais e do da equação de ordem r.

Se o número de equações é igual à ordem do determinante principal, isto é, se $m = p$ $(m \leq n)$ não haverá determinantes característicos, pois não haverá linhas para bordar o determinante principal; e dizemos que os característicos são nulos, considerando as linhas não existentes como se constituídas de zeros.

6. Discussão de um sistema de m equações com n incógnitas.

> Teorema de Rouché(*). Dado um sistema de m equações lineares com n incógnitas, onde p é a ordem do determinante principal:
>
> *a)* se um pelo menos dos determinantes característicos for diferente de zero, o sistema não terá solução (será impossível);
>
> *b)* se todos determinantes característicos forem nulos, o sistema será possível; terá uma solução (determinado) se $p = n$ e uma infinidade de soluções (indeterminado) se $p < n$.

Seja o sistema (VI) de m equações lineares com n incógnitas, e seja

$$D_p = \begin{vmatrix} a_1^1 \ldots a_1^p \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_p^1 \ldots a_p^p \end{vmatrix}$$ o seu determinante principal

Consideremos o sistema formado pelas p primeira equações de (VI) e pelas $m - p$ equações da forma: $E_i =$ obtidas fazendo-se i igual sucessivamente a $p+1$, $p+2$ $\ldots$, $m-1$, m e sendo

$$E_i = \begin{vmatrix} & & l_1 \\ & D_p & l_2 \\ & & \ldots \\ & & l_p \\ a_i^1 & a_i^2 \ldots a_i^p & l_i \end{vmatrix}$$

(*) Eugène Rouché, matemático (1832-1910).

onde os l, da última coluna de E_i, são obtidos fazendo-se em $l_i = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^p x_p + \ldots + a_i^n x_n - b_i$ $i = 1, 2, 3, \ldots$.

O determinante E_i é de ordem $p+1$.

Provemos que o sistema (VI) é equivalente ao sistema considerado:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^p x_p + \ldots + a_1^n x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1 x_1 + \ldots + a_p^p x_p + \ldots + a_p^n x_n = b_p \\ E_{p+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ E_m = 0 \end{cases} \qquad \text{(VII)}$$

De fato, toda solução do sistema (VI) satisfaz às p primeiras equações do sistema (VII), pois são também equações de (VI), e satisfaz às $m - p$ equações $E_i = 0$ de (VII), pois anula a última coluna dos determinantes E_i dessas equações.

Reciprocamente, toda solução de (VII) satisfaz ao sistema (VI). Com efeito, toda solução de (VII) verifica as p primeiras equações de (VI), pois essas p equações são comuns aos dois sistemas. Provemos agora que também satisfaz às $m - p$ outras equações do sistema (VI). Como qualquer solução do sistema (VII) verifica as p primeiras equações comuns aos dois sistemas, então essa solução anulará os p primeiros elementos da última coluna dos determinantes E_i e, portanto, as equações $E_i = 0$ se reduzem a:

$$\begin{vmatrix} & & 0 \\ & D_p & 0 \\ & & \ldots \\ & & 0 \\ a_i^1 & a_i^2 \ldots a_i^p & l_i \end{vmatrix} = 0$$

E pela 1.ª propriedade do n.º 20 (cap. VII), temos:

$$l_i \,.\, D_p = 0$$

$$\therefore \quad (a_i^1 x_1 + \ldots + a_i^p x_p + \ldots + a_i^n x_n - b_i)\, D_p = 0$$

Mas, sendo $D_p \neq 0$ pois D_p é o determinante principal de (VI), então: $l_i = 0$

ou $$a_i^1 x_1 + \ldots + a_i^p x_p + \ldots + a_i^n x_n - b_i = 0$$

se, portanto, a solução do sistema (VII) satisfaz também à $m-p$ últimas equações do sistema (VI).

Demonstrado, pois que os sistemas (VI) e (VII) são equivalentes, desenvolvamos os determinantes E_i de acordo com a 3.ª propriedade do n.º 20 (cap. VII). Temos $n+1$ determinantes, pois os l da última coluna tem $n+1$ parcelas.

$$E_i = \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^p\ a_1^1 x_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_p^1 \dots a_p^p\ a_p^1 x_1 \\ a_i^1 \dots a_i^p\ a_i^1 x_1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^p\ a_1^p x_p \\ \dots\dots\dots \\ a_p^1 \dots a_p^p\ a_p^p x_p \\ a_i^1 \dots a_i^p\ a_i^p x_p \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^p\ a_1^n x_n \\ \dots\dots\dots \\ a_p^1 \dots a_p^p\ a_p^n x_n \\ a_i^1 \dots a_i^p\ a_i^n x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^p - b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_p^1 \dots a_p^p - b_p \\ a_i^1 \dots a_i^p - b_i \end{vmatrix} \qquad \text{(VIII)}$$

Pondo em evidência as incógnitas $x_1, x_2 \dots x_p, x_{p+1} \dots x_n$ nos determinantes do segundo membro de (VI) vemos que os determinantes coeficientes das p primeiras incógnitas são nulos, pois têm duas colunas iguais, e os coeficientes das incógnitas $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$ são também nulos, pois se D_p é o determinante principal, eles são determinantes deduzidos da matriz do sistema (VI), de ordem maior do que p (definição de D_p, n.º 5).

Então (VIII) se reduz a:

$$E_i = -\begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^p\ b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_p^1 \dots a_p^p\ b_p \\ a_i^1 \dots a_i^p\ b_i \end{vmatrix} \qquad \text{(IX)}$$

Para $i = p+1, p+2, \dots m$.

Esses $m-p$ determinantes do 2.º membro de (IX) são, como já vimos (n.º 5), os determinantes característicos do sistema (VI).

Se um, pelo menos, desses característicos for diferente de zero as $m-p$ equações (VI) não se verificam e o sistema (VII) e, portanto, o (VI), pois são equivalentes, não têm solução.

Se todos os determinantes característicos forem nulos, E_i será nulo e o sistema (VII) ficará reduzido às suas p primeiras equações. E, se $p = n$ o sistema constituído pelas p primeiras equações de (VII) terá uma *única solução*, de acordo com a *regra de Cramer*. Se $p < n$ o sistema terá apenas p incógnitas principais podendo-se atribuir valores arbitrários às outras incógnitas e o sistema terá assim uma infinidade de soluções, será *indeterminado*.

É, pois, verdadeiro o enunciado do *teorema de Rouché*.

7. Exercício. Discutir o sistema pelo *teorema de Rouché:*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x - 2y + z = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes das incógnitas é:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

O determinante principal será: $D_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Não há característicos, isto é, são nulos (n.º 5), logo, o sistema é possível, e, como $p = n = 3$ o sistema tem uma só solução, é determinado.

8. Exercício. Discutir o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 8y - 6z = 14 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Temos: $\Delta = \begin{Vmatrix} 5 & 8 & -6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ e $D_p = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

O característico será: $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Então o sistema é possível e como $p < n$ ($p = 2$, $n = 3$) será indeterminado.

9. Exercício. Discutir, pelo *teorema de Rouché*:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema é: $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix}$ e o determinante principal é: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4$

O característico do sistema é: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$

logo, o sistema é impossível.

10. Questões de concursos resolvidas.

1) Determinar o valor de m que torna compatíveis as equações simultâneas:

$$\begin{cases} x + y - 3z + 6 = 0 \\ 5x + y - 4z + 5 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 5y + mz + 1 = 0 \end{cases}$$

(Escola Militar – 1946).

De acordo com o teorema de Rouché, o sistema será compatível, se os determinantes característicos forem nulos.

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

Logo, o sistema dado será compatível se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 5 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & m & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$-24m - 96 = 0 \quad \therefore \quad m = -4$$

2) Empregando o teorema de Rouché, determinar o parâmetro α de modo que o sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

seja determinado e resolvê-lo, pela regra de Cramer, para $\alpha = 1$.

(Colégio Naval – Admissão, 2.º Ano – 1941).

Seja $D_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha - 1 \neq 0 \quad \therefore \quad \alpha \neq \frac{1}{2}$

O característico será: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \quad -\alpha^2 + 1 = 0 \quad \therefore \quad \alpha^2 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = \pm 1$$

Então, para $\alpha = \pm 1$ o sistema dado é possível e como a ordem do principal é igual ao número de incógnitas, é determinado.

Resolvamos o sistema para $\alpha = 1$; temos:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Se o sistema tem uma só solução, resolvamos pela regra de Cramer, o sistema formado pelas suas três primeiras equações.

Temos: $D = 1$, $N_x = 1$, $N_y = 1$ e $N_z = -1$

e a solução do sistema é: $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$.

3) Aplicar o teorema de Rouché às equações:

$$x + ay + a^2 z = 1$$

$$\frac{x}{a} + y + bz = 1$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = 1$$

(Escola N. Engenharia – 1939).

É evidente que o sistema só tem solução se a e b forem diferentes de zero.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

Se $a \neq b$, o determinante $D \neq 0$ será o determinante principal do sistema. Como não existem característicos, o sistema é possível, e como $p = n = 3$ será determinado.

E a solução do sistema será, pela regra de Cramer,

$$x = \frac{a^2(1-b)}{a-b}, \quad y = \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)} \quad \text{e} \quad z = \frac{1-a}{a(a-b)}$$

Se $a=b$, $D=0$ o determinante principal não é de 3.ª ordem. Formemos os determinantes de 2.ª ordem é fácil de verificar que todos eles são nulos. Então, tomemos para determinante principal do sistema o coeficiente de x na primeira equação.

Podemos formar dois característicos:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix} = \frac{a-1}{a} \quad e \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{a^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2-1}{a^2}$$

Se $a \neq 1$, d_1 e d_2 são diferentes de zero, e o sistema será impossível Logo, o sistema é impossível para $a=b \neq 1$.

Se $a=1$, d_1 e d_2 são nulos, e o sistema será possível. Como $p=1$ e $n=3$ $(p<n)$ o sistema será indeterminado.

O sistema é, pois, indeterminado para $a=b=1$.

11. Exercícios para resolver.

Resolver pela regra de Cramer os sistemas:

1) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x+3y-2z=9 \\ 3x-4y+4z=14 \\ 4x+5y-3z=8 \end{cases}$ (Escola Militar - 1934).

3) $\begin{cases} 3x+2y-5z=-11 \\ 2x+7y+z=-3 \\ 5x-y+10z=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+z+t=10 \\ 4x-y+2z-t=4 \\ 3x+2y-4z+2t=3 \\ 2x-4y+3z-3t=-9 \end{cases}$ (E. P. C. Aer. - 1950).

5) $\begin{cases} x+y=a \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} ax+by+cz=2abc \\ 3ax+2by=-abc \\ 3by+2cz=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+z=3a \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-y-2z=-a-2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+u=4 \\ x+z+u=5 \\ y+z+u=5 \end{cases}$

Discutir os sistemas, aplicando o teorema de Rouché:

9) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x+0y=10 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x+y+4z=14 \\ x+5y+2z=10 \\ 5x+7y+10z=38 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ x-14z=0 \end{cases}$ (FGV - 73 - S. P.).

12) $\begin{cases} 2x+3y+4z+8=0 \\ 3x+2y+5z+4=0 \\ 5x+5y+9z+6=0 \\ 8x+7y+14z+8=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+2y+z=10 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x+3y+4z=-5 \\ 4x+5y+8z=-10 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2u=8 \\ 3y-z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$

17) $\begin{cases} mx+y-z=4 \\ x+my+z=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ (I. T. A. - 1953).

18) Calcule os valores de a para que o sistema

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-ay+z=0 \\ ax-y-z=0 \end{cases}$$

tenha solução diferente da solução $x=y=z=0$. (ENE - 1961).

19) Podemos afirmar que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x-2y+3z=-4 \\ 5x-6y+7z=-8 \\ 6x-8y+pz=q \end{cases}$$ é impossível se: (CESCEM - 73 - S. P.).

20) Dado o sistema $\begin{cases} 3x+2y+t=4 \\ 5x+ay+5t=b \\ x-y+2t=2 \end{cases}$

I) Discuti-lo mediante o emprego do teorema de Rouché.

II) Sendo $a=20$, para que valor de b se tem $t=5$? (E. P. C. Aer. - 1950).

21) Discutir e resolver, no caso de possibilidade, o sistema

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$$

onde k é um parâmetro real. (E. N. Engenharia - 1955).

22) Analisar, segundo os valores de a e b, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} x+y-z&=-2 \\ 2x-y+z&=b \\ -x-y+az&=4 \end{aligned}$$

(ENQ - 1962).

23) Calcule o valor de a para que as equações sejam compatíveis

$$\begin{aligned} x+y&=a \\ 2x-y&=1 \\ ax-2y&=4 \end{aligned}$$

(ENE - 1964).

24) Estabeleça a condição para que o sistema seguinte seja determinado:

$$\begin{aligned} a^2x+ay+z&=1 \\ b^2x+by+z&=a \\ c^2x+cy+z&=a^2 \end{aligned}$$

(Fac. Eng. UEG - 1964).

25) Discutir o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

26) Se $abcd \neq 0$ determinar p e q no sistema

$$\begin{cases} ax + by = e \\ px + qy = d \end{cases}$$

de modo que ele seja indeterminado.

(I. T. A. – 1957).

27) Discutir o sistema $\begin{cases} mx + y = 0 \\ my + z = 0 \\ x + mz = 0 \end{cases}$

(U.F.F. – 1971).

RESPOSTAS:

1) $-3, 4$
2) $2, 3, 5$
3) $-2, 0, 1$
4) $1, 2, 3, 4$
5) $1, 2, 3$
6) $bc, -2ac, 3ab$
7) $a, 2, 2a$
8) $1, 1, 2, 2$
9) determinado
10) indeterminado
11) indeterminado
12) impossível
13) determinado
14) indeterminado
15) determinado
16) determinado
17) determinado: $m \neq -1$
impossível: $m = -1$
18) 0 e -1
19) $p = 10$ e $q \neq -12$
20) $a \neq 0$ determinado
$a = 0$, $b = 8$ indeterminado
$a = 0$, $b \neq 8$ impossível
II) $b = 100$

21) $\begin{cases} k \neq 1$ ou $k \neq -2$ — determinado: $x = y = z = \dfrac{1}{k+2} \\ k = 1$ indeterminado $\\ k = -2$ impossível $\end{cases}$

22) $\begin{cases} a \neq 1$ – determinado $\\ a = 1$ – impossível $\end{cases}$

23) $k = 0$ e $k = 3$

24) $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$

25) determinado: $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$; indeterminado: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$; impossível: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$

26) $p = \dfrac{ad}{c}$ e $q = \dfrac{bd}{c}$

27) indeterminado: $m = -1$; determinado: $m \neq -1$.

CAPÍTULO IX

Trinômio do 2.º grau

1. Definição. Chama-se trinômio do 2.º grau à expressão $ax^2 + bx + c$ (I) onde x é variável e a, b e c são constantes, sendo $a \neq 0$.

O valor numérico do trinômio y depende do valor de x, e escreve-se: $y = ax^2 + bx + c$.

Os valores de x, para os quais $y = 0$, chamam-se *raízes* ou *zeros* do trinômio. As raízes de (I) são as raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2. Decomposição do trinômio. Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, cujas raízes são diferentes.

Colocando o fator a em evidência, temos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

somando e subtraindo $\dfrac{b^2}{4a^2}$ ao trinômio entre parênteses:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Os três primeiros termos do parênteses formam o quadrado do binômio $x + \dfrac{b}{2a}$; assim:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

ou

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \qquad (II)$$

Podemos escrever, para $\Delta > 0$:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

Fatorando a expressão entre colchetes, temos:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

ou

$$y = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Observando que os segundos termos dos parênteses são as raízes do trinômio, concluímos finalmente:

$$\boxed{y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$$

3. Variação do sinal do trinômio. Há 3 casos a considerar:

1.º Caso: As raízes do trinômio são iguais. ($\Delta = 0$)

A (II) ficará: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Como o fator quadrado é sempre positivo, para $x \neq -\frac{b}{2a}$, o trinômio terá o sinal de a para esses valores de x.

2.º Caso: O trinômio não tem raízes. ($\Delta < 0$)

A (II) terá a expressão entre colchetes igual à soma de duas quantidades positivas. Logo, a expressão entre colchetes será sempre positiva, e o trinômio terá o sinal de a, qualquer que seja o valor de x.

3.º Caso: As raízes do trinômio são diferentes. ($\Delta > 0$).

Podemos escrever: $y = a\,[(x - x_1)\,(x - x_2)]$ e temos:

1.º) Para valores de x, exteriores às raízes, a expressão entre colchetes é positiva, pois os seus dois fatores têm o mesmo sinal, e o trinômio terá então o sinal de a.

2.º) Para valores interiores de x a expressão entre colchetes é negativa, e o trinômio tem então o sinal contrário de a.

4. Resumo.

1) $\Delta < 0$, y tem o sinal de a, sempre.
2) $\Delta = 0$, y tem o sinal de a para $x \neq -\frac{b}{2a}$.
3) $\Delta > 0$, y tem o sinal de a para valores exteriores às raízes, e o sinal contrário ao de a para valores interiores.

5. Variação do valor do trinômio. Será estudada no Cap. XIII - N.ºs 44 a 51.

6. Exercícios resolvidos.

1) Estudar o sinal dos trinômios:

a) $y = 5x^2 - 2x + 9$ b) $y = x^2 - 6x + 9$
c) $y = -x^2 + 2x + 15$ d) $y = -3x^2 + x - 2$

a) $\Delta = -176 < 0$, logo, o *trinômio é sempre positivo*, pois $a = 5 > 0$ e y têm sempre o sinal de a quando $\Delta < 0$.

b) $\Delta = 0$, logo, o *trinômio será positivo* para qualquer valor de x diferente da raiz $-\frac{b}{2a} = 3$.

c) $\Delta = 64 > 0$, de acordo com o n.º 4, temos:

$y < 0$ para $x < -3$ ou $x > 5$, e $y > 0$ para $-3 < x < 5$

d) $\Delta = -23 < 0$, logo, *o trinômio é sempre negativo*, pois pelo n.º 4 y tem sempre o sinal de a, que é -3.

2) Quando é que o radicando de $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ é maior ou igual a zero?

O trinômio $y = x^2 - 5x + 4$ tem suas raízes iguais a 1 e 4, e é positivo (sinal de a) para valores exteriores às raízes.

Logo, $y \geq 0$ para $x \leq 1$ ou $x \geq 4$.

3) Calcular os valores de x, para os quais o trinômio $y = -2x^2 + x - 1$ é negativo.

$y < 0$ para qualquer valor de x, pois $\Delta = -7 < 0$ e nesse caso y tem sempre o sinal de $a = -2 < 0$.

4) Resolver $-4x^2 + 12x - 9 < 0$ e $-2x^2 + x - 5 > 0$.

A primeira inequação se verifica para valores de $x \neq 1{,}5$, pois $\Delta = 0$ e $-\frac{b}{a} = 1{,}5$ (Var n.º 4). A segunda inequação é impossível, pois como $\Delta = -39 < 0$ e $a = -2 < 0$, pelo n.º 4, o primeiro membro será sempre negativo. Logo, não há valor de x que satisfaça a segunda inequação.

9. Exercícios para resolver.

Decompor em fatores do 1.º grau:

1) $x^2 - 11x + 28$ 3) $6x^2 - 5x + 1$ 5) $12x^2 - 17x + 6$
2) $x^2 - 3x - 28$ 4) $-2x^2 + 3x - 1$ 6) $-2x^2 + 7x - 3$

Estudar a variação do sinal dos trinômios:

7) $x^2 - 8x + 7$ 8) $-4x^2 + 12x - 9$ 9) $2x^2 + 3x + 7$

Resolver as inequações:

10) $x^2 + 14x + 49 > 0$ 12) $-2x^2 + 3x - 5 < 0$ 14) $x^2 - 9x + 18 > 0$
11) $x^2 - 10x + 25 < 0$ 13) $3x^2 - 4x + 3 < 0$ 15) $x^2 - 4x - 5 < 0$

Respostas:

1) $(x-7)(x-4)$ 3) $(2x-1)(2x-1)$ 5) $(4x-3)(3x-2)$
2) $(x-7)(x+4)$ 4) $(1-2x)(x-1)$ 6) $(3-x)(2x-1)$
7) É positivo para valores exteriores a 1 e 7 e negativo para os valores compreendidos entre 1 e 7.
8) É negativo para $x \neq 1{,}5$ 9) Sempre positivo.
10) $x \neq -7$ 12) qualquer valor de x 14) $x < 3$ ou $x > 6$
11) Impossível 13) impossível 15) $-1 < x < 5$

CAPÍTULO X

Números reais e complexos

1. Noções elementares sobre conjuntos. A noção de *conjunto* é, muitas vezes, considerada como o conceito fundamental da matemática.

É, todavia, tão simples e tão usual que, comumente, nem ao menos chegamos a imaginá-lo.

É uma das noções mais úteis para definir uma série de outros conceitos, que devem ser estudados no terceiro ano colegial.

Consideraremos um *conjunto* como um conceito primitivo, isto é, um conceito que não se define.

Apresentaremos neste parágrafo apenas alguns exemplos de *conjuntos*, a fim de que possa o estudante familiarizar-se com esse conceito.

Assim, podemos dizer:

a) o conjunto de Estados do Brasil;
b) o conjunto de pessoas nascidas no Brasil;
c) o conjunto de Estados do Brasil, cuja inicial de seus nomes é B;
d) o conjunto das capitais dos Estados do Brasil, cuja inicial é D.

Em cada um desses quatro exemplos dados, nós temos uma determinada coleção, que denominaremos de *conjunto*.

Existe uma regra ou critério que nos permite dizer se um Estado, capital, ou indivíduo faz parte ou *pertence* a um desses conjuntos. E, se *pertence* ao conjunto, dizemos que é um *elemento* do conjunto, e que o conjunto *contém* esse elemento.

No conjunto do exemplo (*a*), podemos determinar o número de elementos que *contém*.

No exemplo (*b*), não podemos precisar o número de elementos do conjunto.

O conjunto do exemplo (*c*) contém um só elemento (Bahia), e o do exemplo (*d*), evidentemente, não possui elementos (conjunto vazio).

Daremos outros exemplos, para fixar idéias:

1.º) *O conjunto de alunos repetentes de minha turma.*

Todo *elemento* do conjunto tem de ser repetente e estar na minha turma. Qualquer outro aluno que não satisfaça a uma dessas duas condições *não pertence* ao conjunto.

2.º) *O conjunto dos números inteiros.*

Para um número *pertencer* ao conjunto tem de ser inteiro. Todos os outros números não são elementos do conjunto.

Conclusão: Dos exemplos que acabamos de citar, é importante observar que, quando dizemos a palavra *conjunto*, estamos pensando na regra ou lei que nos permita afirmar se um objeto ou número *pertence* ou não ao conjunto, isto é, se esse número ou objeto goza ou não das mesmas propriedades dos elementos do conjunto, e somente destas.

2. Variáveis e constantes. Chama-se *variável* ao símbolo usado para representar um elemento qualquer, não especificado, do conjunto.

Em geral, usamos as últimas letras do alfabeto para representar a *variável*.

Chama-se *domínio da variável* ao conjunto de elementos representados pela variável.

Assim, quando dizemos que a variável x representa um elemento de um conjunto X, o conjunto X diz-se *domínio da variável* x.

Um elemento qualquer de X é um *valor* de x.

E quando x é substituído por um valor, dizemos que a variável x *toma* esse valor.

Denomina-se *constante* a variável cujo domínio tem um só elemento.

Indicamos, em geral, uma constante pelas letras a, b, c, k. Assim quando dizemos que k é uma constante entendemos que k pode *tomar* um único valor.

3. Conjuntos equivalentes. *Correspondência* é um conceito primitivo, não se define.

Diz-se que entre dois conjuntos X e Y existe uma *correspondência unívoca*, no sentido de X para Y, quando a cada elemento de X corresponder um único elemento de Y.

Diz-se que entre dois conjuntos X e Y existe uma *correspondência biunívoca*, quando essa correspondência for unívoca tanto no sentido de X para Y como no sentido contrário, isto é, quando a cada elemento de X corresponder um só elemento de Y, e vice-versa.

Quando entre dois conjuntos X e Y existir uma correspondência biunívoca, dizemos que esses conjuntos são *equivalentes*.

4. Números racionais. Já conhecemos do curso primário e das primeiras séries ginasiais, os números inteiros e fracionários, positivos e negativos. Esses números, que são chamados *racionais* (*absolutos* ou *relativos*), constituem o conjunto ou o *campo dos números racionais*.

Nesse campo, as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão com divisor diferente de zero e potenciação de expoente inteiro são sempre possíveis.

5. Números irracionais. Quando estudamos a extração da raiz quadrada de números naturais que não eram quadrados, sentimos a necessidade da criação de outros números chamados *irracionais* ($\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$, ...), que constituem o conjunto ou o campo dos números irracionais.

No campo desses números, já estudados no curso ginasial, são sempre possíveis as mesmas operações dos números racionais, e mais ainda a radiciação ou potenciação de expoentes fracionários de números positivos.

6. Números reais. Consideremos o conjunto dos números racionais e *separemos* seus elementos em duas partes, tais que:

1) todo número racional pertença a uma e só uma dessas partes;
2) todo número da primeira parte seja inferior a qualquer número da segunda parte.

Tal separação denomina-se um *corte* no conjunto dos números racionais ou no campo racional.

> Todo *corte* no conjunto dos números racionais define um número real, que será *racional* se o elemento de separação das duas partes pertencer ao conjunto dos números racionais e será *irracional* em caso contrário.

Exemplos:

1) Se dividirmos o conjunto dos números racionais em duas partes A e B, tais que o número 100 seja o número de A, superior a todos os outros de A, ou o número de B inferior a todos os outros de B, então o *corte define o número racional* 100.

2) Se dividirmos o conjunto dos números racionais em duas partes, tais que todos os números da primeira parte tenham os seus quadrados menores do que 2, e todos os números da segunda parte tenham seus quadrados maiores do que 2. Então o elemento de separação $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto dos números racionais, e diz-se que o *corte define o número irracional* $\sqrt{2}$.

Temos então:

Números reais (absolutos ou relativos)... { *Números racionais*. { Números inteiros / Números fracionários ; *Números irracionais*

7. Números imaginários. Já vimos no Curso Ginasial, quando estudamos as equações do 2.º grau, que não existia número real, raiz quadrada de um número negativo, ou que, de um modo geral, não existia número real que fosse raiz de índice par, de um número negativo. Portanto, se desejarmos resolver uma equação do tipo

$$x^2 + 1 = 0$$

vemos que é necessário introduzir em nossos conhecimentos uma nova qualidade de números, que chamaremos de *números imaginários*.

8. Números complexos.

1.º) Ao número $i = \sqrt{-1}$ denominamos de *unidade imaginária*.

2.º) A um número igual a raiz quadrada de um número negativo, ou, que, na sua determinação, envolva raiz quadrada de número negativo, chamamos de *número imaginário*. Exemplos:

$$\sqrt{-1} = i \qquad \sqrt[4]{-1} = \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt{i}$$
$$\sqrt{-5} = \sqrt{5}.\sqrt{-1} = \sqrt{5}\,i \qquad 2 + \sqrt{-4} = 2 + 2i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,.\sqrt{-1} = 3i$$

3.º) Chama-se *número complexo* a todo o número da forma $a+bi$, onde a e b são números reais.

O número a é chamado *parte real* do número complexo e bi *parte imaginária* do mesmo. Exemplos:

$$0 + 3i, \quad 2 + 5i, \quad 3 + 0i \quad \text{e} \quad 2 - 5i$$

4.º) Chamam-se *números complexos conjugados* a dois números complexos da forma $a+bi$ e $a-bi$. (Um é o conjugado do outro). Exemplos:

$$2 + 3i \quad \text{e} \quad 2 - 3i$$

9. Observações. Dado um número complexo $a+bi$

1) se $b \neq 0$, o número complexo é um *número imaginário*. Exemplos: $2 + 5i$, $2 - 5i$, ...

2) se $b \neq 0$ e $a = 0$, o número complexo é um *número imaginário puro*. Exemplos: $5i$, $3i$, $-2i$, ...

3) se $b = 0$, o número complexo se reduz a um *número real*. Exemplo: $2 + 0i = 2$

10. Módulo de um número complexo. Chama-se *módulo* ou valor absoluto de um número complexo $a+bi$ o valor aritmético de

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

O módulo de $a+bi$ representa-se por $|a+bi|$. Exemplo: Achar o módulo de $3+4i$

$$|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

11. Coordenadas cartesianas. Ver Geometria Analítica, N.º 3 (cap. I).

12. Representação geométrica de um número complexo. Os números complexos da forma $a+bi$ são represen-

tados geometricamente, em um sistema de coordenadas retangulares, pelos pontos do plano desse sistema cujas coordenadas sejam (a, b).

O ponto $M\ (a, b)$ que representa o número complexo $a+bi$ chama-se *imagem*, índice ou ponto representativo do número complexo.

Como sabemos que num sistema de coordenadas a cada ponto do plano do sistema corresponde um par de números reais e vice-versa, concluímos que existe uma correspondência bi-unívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos números complexos. O plano é chamado de *plano imaginário*.

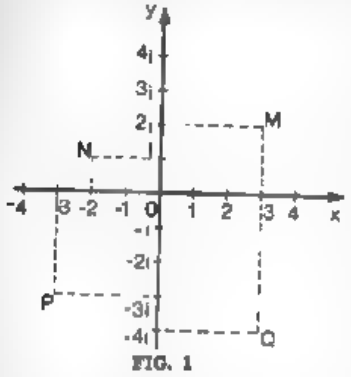


FIG. 1

Quando o número complexo for um número real, sua imagem estará sobre o eixo horizontal; isto é, os números reais são representados sobre o eixo horizontal, chamado *eixo real*.

Quando o número complexo for um número imaginário puro, sua imagem estará sobre o eixo vertical, chamado *eixo dos imaginários* ou eixo imaginário.

O número zero tem para sua *imagem* a origem do sistema de coordenadas.

A figura 1 esclarecerá melhor o que acabamos de expor.

Os pontos M, N, P e Q da figura são, respectivamente, as imagens dos números complexos:

$$3+2i;\ -2+i;\ -3-3i \text{ e } 3-4i$$

13. Argumento de um número complexo. Seja o ponto M (fig. 2) a imagem do número complexo $a+bi$. A distância de M à origem 0 é dada pela expressão

$$\overline{OM} = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

que nada mais é do que o *módulo* do complexo $a+bi$.

É fácil de ver que todos os números complexos pertencentes a uma circunferência de raio ρ têm o mesmo módulo.

Chama-se *argumento* do número complexo $a+bi$ a um qualquer dos ângulos $\alpha = \theta + 2k\pi$ sendo $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e θ o ângulo formado pela semireta OM com o semi-eixo positivo $0x$ (fig. 2).

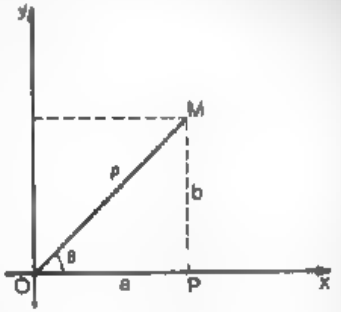


FIG. 2

14. Operações racionais sobre números complexos. De acordo com a 2.ª e 3.ª definições (n.º 8) não é difícil reduzir as operações com números complexos às regras usuais do cálculo algébrico.

Assim, podemos operar com os números complexos da forma $a+bi$, como se fossem expressões algébricas.

15. Observação. As operações racionais com os números complexos mantêm as mesmas propriedades formais das operações com os números reais, menos a propriedade monotônica, pois não é possível estabelecer a noção de *ordem* para os números complexos.

Portanto, é importante que tenhamos sempre em mente que:

a) não existem números imaginários positivos ou negativos;

b) não tem sentido dizer que um número imaginário é *maior* ou *menor* do que o outro.

16. Adição e subtração de números complexos. Por definição, somamos ou subtraímos números complexos somando ou subtraindo, respectivamente, suas partes reais e imaginárias, separadamente.

Isto é:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

Então, a soma ou diferença de dois números complexos é em geral um número complexo cuja parte real é a soma

algébrica das partes reais dos dois números e cuja parte imaginária é a soma algébrica das partes imaginárias. Exemplos:

1) $(2+3i)+(5-2i)=7+i$
2) $(5-3i)+(2-5i)=7-8i$
3) $(5-3i)-(3-2i)=2-i$
4) $(5+3i)-(2+3i)=3$

17. Produto de dois números complexos. Por definição, multiplicamos números complexos, de acordo com a regra de multiplicação de polinômios (binômios) e observando que $i^2=-1$

Isto é,

$$(a+bi)\times(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Exemplos:

1) $(5+3i)(3-3i) = 15-10i+9i-6i^2=15-i+6=21-i$
2) $(4+3i)(4-3i) = 16-9i^2 = 25$
3) $(2-3i)(2-3i) = 4-12i+9i^2 = -5-12i$

18. Potências de i. De acordo com a 2.ª definição (N.º 8)

$i=\sqrt{-1}$ $\qquad$ $i^5=i^4\,.\,i=i$
$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$ $\qquad$ $i^6=i^4\,.\,i^2=-1$
$i^3=i^2\,.\,i=-1\,.\,i=-i$ $\qquad$ $i^7=i^4\,.\,i^3=-i$
$i^4=i^2\,.\,i^2=(-1)\,.\,(-1)=1$ $\qquad$ $i^8=i^4\,.\,i^4=1$

É fácil de concluir que as potências inteiras sucessivas de i se reproduzem periodicamente através do seguinte ciclo: i, -1, $-i$, 1.

19. Produto de vários números complexos. Multiplicamos os dois primeiros números complexos; o produto obtido multiplicamos pelo terceiro e assim sucessivamente.

Ou, ainda, procedemos como se estivéssemos trabalhando com binômios reais, substituindo, no produto obtido, as potências de i por seus valores. Exemplo:

$$(2+3i)(2-3i)(3+2i) = (4+9)(3+2i)=39+26i$$

20. Potenciação. Para elevarmos um número complexo $a+bi$ a um expoente inteiro basta que se aplique o desenvolvimento do *binômio de Newton* (*), substituindo-se, no resultado, as potências de i por seus valores. Exemplos:

1) $(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4-9+12i=-5+12i$
2) $(1+2i)^3=1+6i+12i^2+8i^3=1+6i-12-8i=-11-2i$
3) $(2-i)^5=32-80i+80i^2-40i^3+10i^4-i^5=$
$=32-80i-80+40i+10-i=-38-41i$

21. Divisão. A divisão de dois números complexos $a+bi$ e $c+di$, pode ser obtida escrevendo o quociente sob a forma de fração e, a seguir, procedendo de modo análogo ao usado na racionalização do denominador de uma fração.

Exemplo: $(3+i):(3-2i)$

Podemos escrever: $\dfrac{3+i}{3-2i}=\dfrac{3+\sqrt{-1}}{3-2\sqrt{-1}}=\dfrac{7+9\sqrt{-1}}{13}=\dfrac{7}{13}+\dfrac{9}{13}i$

Na prática, basta multiplicar ambos os termos da fração obtida pelo número complexo conjugado do denominador.

Exemplo:

$$\frac{6+3i}{2+2i}=\frac{(6+3i)\,(2-2i)}{(2+2i)\,(2-2i)}=\frac{12-12i+6i-6i^2}{4-4i^2}=\frac{18-6i}{4+4}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}i$$

22. Exercícios para resolver.

Efetuar as operações indicadas dando o resultado sob a forma $a+b$

1) $(5+2i)+(3+2i)$
2) $(2-3i)+\left(3+\frac{1}{3}i\right)$
3) $(2-2i)+(3-2i)$
4) $(3+2i)+(3-2i)$
5) $(2+7i)-(3-2i)$
6) $\left(\frac{1}{2}+i\right)-\left(\frac{1}{2}-i\right)$
7) $\left(\frac{1}{2}+i\right)+\left(\frac{3}{2}-2i\right)+i^3-i^2=$
8) $(5+3i)+(3-2i)-(2-6i)$
9) $(5+2i)(3-5i)$
10) $(2+3i)(2-3i)$
11) $(3+2i)(1-i)+i^{48}-i^{18}=$
12) $(2-3i)+(2+i)(2-i)-i^2-i^3$
13) $(3+3i):(2-2i)$
14) $(3+2i):(3-2i)$
15) $\dfrac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}$
16) $\dfrac{(3+i)(3-i)}{(2+i)(3-2i)}$
17) $(2+i)^4$
18) $(2-3i)^3$
19) Calcula $\sqrt{45+28i}$

(Concurso de Professores E. Guanabara - 1964).

(*) Isaac Newton, grande matemático inglês (1642-1727).

RESPOSTAS:

1) $8+4i$
2) $5-\frac{8}{3}i$
3) $5-5i$
4) 5
5) $-1+9i$
6) $2i$
7) $3-2i$
8) $11+7i$
9) $25-19i$
10) 13
11) 6
12) $8-4i$
13) $\frac{5}{4}+\frac{11}{4}i$
14) $\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$
15) $-\frac{13}{5}-\frac{39}{5}i$
16) $\frac{16}{13}+\frac{2}{13}i$
17) $-7+24i$
18) $-48-9i$
19) $7+2i$; $-7-2i$

CAPÍTULO XI

Funções

1. Conceito elementar de função.

> Diz-se que uma variável y é uma função de uma variável x, quando a cada valor de x corresponda, mediante uma certa lei, um ou mais valores de y.

E indica-se assim: $y=f(x)$.

Então a *lei* que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é que chamamos de *função*.

A variável x é chamada *varidvel independente* e a variável y *varidvel dependente*. Exemplo:

Sabemos do segundo ano colegial, que o desenvolvimento do binômio $(x+a)^m$ tem $m+1$ termos, então, chamando de N esse número de termos, podemos escrever: $N=m+1$.

E, $N=m+1$ ou simplesmente $m+1$ é uma função de m (função linear).

2. Função real de uma variável real. Uma variável diz-se real quando seu domínio for um conjunto de números reais.

Se os domínios das variáveis x e y são dois conjuntos X e Y de números reais a função $y=f(x)$ é uma *função real de uma varidvel real.*

Estudaremos apenas em nosso trabalho as *funções reais de uma varidvel real.*

3. Funções unívocas e plurívocas. Se a cada valor de x corresponde um e somente um valor de y a função diz-se

unívoca ou *uniforme*; se a cada valor de x correspondem dois ou mais valores de y a função diz-se *plurívoca* ou *multiforme*. Exemplo:

$y = 2x + 3$ é unívoca
$y = \text{arc sen } x$ é plurívoca

4. Campo de existência da função. Ao conjunto, domínio da variável independente, chamamos de *campo de existência* ou *campo de definição* da função.

Assim quando dissemos que $y = f(x)$ o conjunto X, domínio da variável x, chama-se *campo de existência* da função. E, a função diz-se *definida* em X.

5. Intervalos. Dados dois números reais a e b, sendo $a < b$:

1.º) chama-se *intervalo fechado* de extremos a e b, e representa-se por $[a, b]$, ao conjunto de número reais x tais que

$$a \leq x \leq b$$

2.º) chama-se *intervalo aberto* de extremos a e b, e representa-se por (a, b), ao conjunto de números reais x tais que

$$a < x < b$$

3.º) diz-se que o intervalo de extremos a e b é *aberto à esquerda* ou *à direita*, e indicamos por $(a, b]$ ou $[a, b)$, ao conjunto de números reais x que satisfaçam, respectivamente, uma das relações:

$$a < x \leq b \quad \text{ou} \quad a \leq x < b$$

Exemplos:

Determinar o campo de existência de cada uma das funções abaixo:

1) $y = 3x + 5$ 2) $y = \dfrac{2}{x - 2}$ 3) $y = \text{sen } x$

O campo de definição da função (1) é todo o campo real, portanto o intervalo aberto $(-\infty, +\infty)$.

O campo de existência de (2) é constituído pelos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$, a função é definida em qualquer ponto, menos no ponto 2.

O campo de existência da função (3) é o intervalo aberto $(-\infty, +\infty)$.

6. Exercícios resolvidos.

Determinar o campo de definição das funções:

1) $y = \text{arc sec } x$

2) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 4}$

3) $y = \sqrt{9 - x^2}$ (U.E.G – 1972)

4) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

5) $y = \sqrt{-(x-2)^2}$

6) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

Soluções:

1) Vimos, na Trigonometria, que a secante só existe para valores inferiores ou iguais a -1 ou superiores ou iguais a $+1$.

Logo, seu campo de definição é: $(-\infty, -1]$ e $[+1, +\infty)$.

2) Para $x = 1$ ou $x = 4$ não existe; seu campo de definição é:

$$(-\infty, 1);\ (1, 4)\ \text{e}\ (4, +\infty)$$

3) A função (3) só tem significado se $9 - x^2 \geq 0$.

Portanto, a função só é definida para $9 - x^2 = 0$ ou $x = \pm 3$, ou para $9 - x^2 > 0$, que é uma inequação do 2.º grau, cuja solução é qualquer valor de x compreendido entre os zeros do trinômio $9 - x^2$, isto é: $-3 < x < 3$.

O campo de definição da função é: $[-3, 3]$.

4) Só é definida para $x^2 - 5x + 6 > 0$. Os zeros de $x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3. O trinômio tem o sinal do coeficiente de x^2 (positivo) para todo valor exterior aos zeros.

Logo, seu campo de definição é: $(-\infty, 2]$ e $[3, +\infty)$.

5) A função (5) só é definida se $-(x-2)^2 \geq 0$.

É fácil de ver que para $x = 2$ o radicando é zero, mas para um outro valor qualquer é negativa. A função é, pois, definida apenas no ponto 2.

Seu campo de definição se reduz a $x = 2$.

6) A função (6) só é definida, também, se $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$, portanto, para $x = 2$, ou para as soluções da inequação fracionária $\dfrac{x-2}{x+3} > 0$, que são $x < -3$ ou $x > 2$; seu campo de definição é, pois:

$$(-\infty, -3)\ \text{e}\ [2, +\infty)$$

7. Valor numérico de uma função. Dada uma função $f(x)$, se substituirmos x por um número a, obteremos um número $f(a)$ que se chama *valor numérico da função* $f(x)$ para $x = a$ ou valor numérico da função no ponto a. Exemplos:

Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad \text{e} \quad f(-1) = 1 + 3 + 2 = 6$$

São os valores da função $f(x)$ nos pontos 1 e -1, respectivamente.

8. Zeros de uma função. Chamam-se *zeros*, raízes ou soluções de uma função $f(x)$, os valores de x tais que $f(a) = 0$. Exemplo:

Os números 1 e 2 são os zeros da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, pois

$$f(1) = 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 4 - 6 + 2 = 0$$

SUCESSÕES

9. Definição.

> Denomina-se sucessão a uma função cujo campo de definição é o conjunto dos números naturais.

Em vez de representarmos por $a = f(n)$ usaremos a notação habitual $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ onde a_n indica o termo de ordem n.

A definição anterior nos mostra que o estudo das sucessões nada mais é do que um caso particular do estudo das funções.

10. Termo geral. É uma fórmula que permite calcular um termo de ordem n qualquer da sucessão. Indicamos por a_n. Exemplos:

$1, 3, 5 \ldots$	$a_n = 2n - 1$
$2, 4, 6 \ldots$	$a_n = 2n$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$	$a_n = \frac{n}{n+1}$
$1, -4, 9, -16 \ldots$	$a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2$
$1, 2, 3 \ldots$	$a_n = n$
$2, 6, 18, 54 \ldots$	$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (P. geométrica)

$\frac{1}{(\log 2)}, \frac{1}{(\log 3)^2}, \frac{1}{(\log 4)^3}$	$a_n = \frac{1}{[\log(n+1)]^n}$
$2, 5, 8, 11 \ldots$	$a_n = 2 + (n-1)\,3$ (P. aritmética)

Observação: Existem sucessões para as quais não podemos determinar o termo geral. Um exemplo interessante é a sucessão dos números primos

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

11. Exercícios para resolver.

Determinar o campo de existência das funções:

1) $y = \frac{2x+1}{x^2-4}$

2) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

3) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$

4) $y = x \log x$

5) $y = \sqrt{-(x+3)^2}$

6) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

7) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

8) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

9) $y = \sqrt{4 - x^2}$ (E. Aeronáutica – 1952).

10) $y = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ (E. Aeronáutica – 1952).

11) Provar que se $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, então $f[f(x)] = x$.

12) Provar que se $f(x) = x + \frac{1}{x}$, então $f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$.

13) Sendo $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$, calcular

$$f[f[f(x)]]$$

(Esc. Politécnica U. Católica – Rio – 1949).

14) Para que valores de x a função $y = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$ é definida?

(E. Flum. Engenharia – 1950).

15) A função $\lg(3+x)$ não tem existência no campo real para os valores de x . . . (E. Fol. U. Cat. – Rio – 1957).

Respostas:

1) $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, +\infty)$
2) $(-\infty, -4]$ e $[4, +\infty)$
3) $(-\infty, 1]$ e $[3, +\infty]$
4) $(0, +\infty)$

5) Só no ponto -3 8) $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ e $(3, +\infty)$

6) $(-\infty, +\infty)$ 9) $[-2, 2]$

7) $[0, +\infty)$ 10) $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$ ou apenas $x \neq 2$

11) Basta substituir, em $f(x)$, x por $\frac{2x+1}{x-2}$.

12) Substituindo, em $f(x)$, x por a e $\frac{1}{a}$, respectivamente obteremos o mesmo valor.

13) 2 14) $(0, 1)$ 15) $\angle -3$

CLASSIFICAÇÃO DAS FUNÇÕES

12. Funções explícitas e implícitas. Nem sempre as funções se apresentam como as temos definido até aqui, isto é, sob a forma $y = f(x)$, por exemplo, $y = x^2 - 5x + 1$; muitas vezes aparecem sob a forma $f(x, y) = 0$, por exemplo, $x^2y^3 + x + 2 = 0$.

Em geral, quando a relação que estabelece a correspondência entre x e y aparece sob a forma $y = f(x)$ dizemos que se tem uma *função sob a forma explícita*; quando aparece sob a forma $f(x, y) = 0$ dizemos que se tem uma *função sob a forma implícita*.

Existem funções implícitas que não podem ser postas sob a forma explícita mediante radicais, por exemplo:

$$y^6 - xy^2 + 1 = 0$$

13. Funções algébricas e transcendentes. Diz-se que uma função é algébrica quando pode ser colocada sob a forma implícita $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é um polinômio inteiro em x e y (Curso ginasial). Exemplos:

$$y = x^3 - 5x + 1 \qquad x^2y - xy + x - 2 = 0$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{x + 3} \qquad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

Uma função que não é algébrica chama-se *transcendente*.

Exemplos: $y = \log x$ $y = \operatorname{sen} x$ $y = \operatorname{arc\,sen} x$

14. Funções racionais e irracionais. Uma função algébrica explícita diz-se *racional* quando pode ser expressa sob a forma $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ sendo $f(x)$ e $g(x) \neq 0$ polinômios inteiros em x.

Se $g(x)$ se reduz a uma constante diferente de zero tem-se $y = F(x)$, onde $F(x)$ é um polinômio inteiro e a função diz-se *racional inteira*. Se $g(x)$ não se reduz a uma constante a função diz-se *racional fracionária*.

Uma função algébrica explícita diz-se *irracional* quando colocada sob a forma $f(x, y) = 0$, $f(x, y)$ é de grau superior ao primeiro, em relação a y. Exemplos:

$y = x^2 - 3x + 1$	racional inteira
$2xy = y + 3x^2 + x - 5$	racional fracionária
$2x - y^3 + xy - 1 = 0$	irracional

15. Funções inversas. Seja $y = f(x)$ definida em (a, b) e cujos valores de y são os pontos de (c, d) e a função $x = g(x)$, definida em (c, d) e cujos valores de x são os pontos de (a, b). Diz-se que $x = g(x)$ é a *função inversa* da função $y = f(x)$ se para cada $y_1 = f(x_1)$ de (c, d) se tem $g(y_1) = x_1$. Exemplo:

Dada a função $y = x^2$, se considerarmos x como função de y, temos: $x = \sqrt{y}$

e permutando x por y obtemos $y = \sqrt{x}$

16. Resumo da classificação das funções. Apresentaremos, a seguir, um quadro resumindo o estudo feito sobre a classificação das funções, incluindo nele as funções exigidas pelo programa, para serem representadas graficamente, e as funções ciclométricas (inversas das funções trigonométricas), que serão apresentadas adiante no estudo sobre derivação.

- Funções
  - ALGÉBRICAS.....
    - *explícitas*
      - racionais
        - inteiras
        - fracionárias
      - irracionais
    - *implícitas*
  - TRANSCENDENTES
    - *explícitas*
      - exponenciais
      - logarítmicas
      - trigonométricas
      - ciclométricas
    - *implícitas*

17. Funções elementares. As operações que, partindo da variável x, permitem obter as funções algébricas e transcendentes consideradas no quadro anterior, chamam-se *operações analíticas fundamentais.*

Uma função diz-se *elementar* quando é obtida da variável e constantes, mediante um número finito de operações analíticas fundamentais.

18. Exercícios para resolver.

Diga se as funções abaixo estão sob a forma *explícita* ou *implícita:*

1) $y = ax^2 + bx + c$ 2) $y = \frac{x-1}{x+2}$ 3) $ax + by + c = 0$ 4) $x^2 + y^2 = 25$

Coloque as funções abaixo sob a forma *implícita* :

5) $y = \frac{x^2+1}{x-8}$ 6) $y = \sqrt{x^2+x-2}$

Coloque as funções abaixo sob a forma *explícita* :

7) $x^2y - xy + x - 2 = 0$ 8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

9) Classifique as funções.

$y = \frac{3}{2}x^3 - \sqrt{x}$ $y = \sqrt{5} - \frac{3}{2}x^3 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$y = \operatorname{sen} x - (1-x^2)$

(E. N. Química – 1946).

10) Dada a função $f(x) = 2x - 3$, determine a função inversa.

(UGF – 73).

Respostas:

1) explícita
2) explícita
3) implícita
4) implícita
5) $x^2 - xy + 3y + 1 = 0$
6) $x^2 - y^2 + x - 2 = 0$
7) $y = \frac{x-2}{x-x^2}$
8) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$
9) algébrica irracional; algébrica racional inteira; transcendente.
10) $\frac{2-3x}{x}$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES USUAIS

19. Representação gráfica de uma função. Seja uma função de variável real

$$y = f(x) \qquad (I)$$

que representa uma correspondência entre dois conjuntos X e Y, domínios das variáveis x e y.

Marquemos, em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, os pontos cujas *abscissas* são os pontos de X, e cujas *ordenadas* são os pontos correspondentes de Y.

Chama-se *representação gráfica* ou *curva representativa* de uma função ao conjunto de pontos do plano, cujas coordenadas satisfazem a relação (I).

O gráfico de uma função algébrica ou transcendente é uma curva dita *algébrica* ou *transcendente.*

20. Funções crescentes e decrescentes. Seja uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo (a, b) e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer desse intervalo.

Diz-se que $y = f(x)$ é *crescente* em (a, b) se $x_1 > x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Diz-se que $y = f(x)$ é *decrescente* em (a, b) se $x_1 > x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Exemplo :

A função $y = x^2$ é *crescente* em todo o campo real positivo $(0, +\infty)$ e *decrescente* em todo campo real negativo $(-\infty, 0)$.

21. Representação gráfica da função exponencial. A função exponencial é a função da forma $y = a^x$, onde $a \neq 1$ é um número real positivo. É definida em todo campo real $(-\infty, +\infty)$.

Temos dois casos a considerar : $a > 1$ ou $a < 1$

1.º Caso : $y = a^x$ $(a > 1)$

De início, vemos que para $x = 0$, $y = 1$

Dando valores crescentes a x, a partir de zero é fácil de ver que y irá crescendo indefinidamente à medida que x também o for.

Dando a x valores decrescentes, a partir de zero, as potências irão decrescendo à medida que x decresce podendo se tornar menores do que qualquer quantidade arbitrária, e, portanto, quanto menor for x, negativo, menor será o valor de $y=a^x$. Ela é, pois, sempre crescente (N.º 20).

Com esses resultados temos uma idéia da curva (para $a>1$). Ela possui um único ramo ascendente passando pelo ponto (0, 1), aproximando-se indefinidamente do semi-eixo negativo dos x e afastando-se também indefinidamente do semi-eixo positivo dos x (fig. 3).

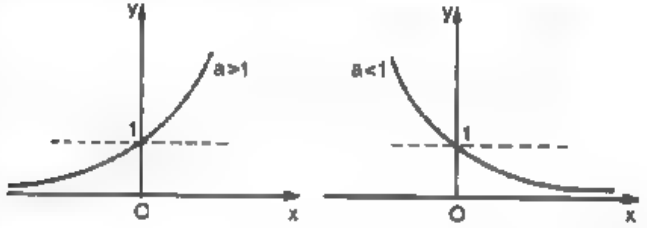


FIG. 3

2.º Caso: $y=a^x$ $(a<1)$

De início vemos que para $x=0$, $y=1$

Como $y=a^x=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ (sendo $\dfrac{1}{a}>1$, pois $a<1$)

Então em cada ponto, a ordenada da função $y=a^x$, é o inverso da ordenada de

$$y_1=\left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Mas, sendo $a<1$, $\dfrac{1}{a}>1$, portanto a função $y_1=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, recai no 1.º caso.

Como $y_1=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ é *sempre crescente* então $y=a^x$ é *sempre crescente* e é constituída de um único ramo que passa pelo ponto (0, 1), se afasta indefinidamente do semi-eixo negativo dos x e se aproxima, também indefinidamente, do semi-eixo positivo dos x (fig. 3).

22. Representação gráfica da função logarítmica. A função $y=\log_a x$ é chamada *função logarítmica.*

Ela é a função inversa da função exponencial.

De fato, da função exponencial $y=a^x$, temos $x=\log_a y$ e permutando x por y, vem $y=\log_a x$

Se $(x_1\ y_1)$ é um ponto da curva $y=a^x$ (I)

$(y_1\ x_1)$ é um ponto de $y=\log_a x$ (II)

Convém notar também que para $x=1$, na (II), $y=0$, isto é, a curva passa pelo ponto (1, 0).

Tomando, então, em (II), a base a, do sistema de logaritmos, maior do que a unidade, temos, na figura 4, a curva C', representação gráfica da função exponencial $(a>1)$, e a *curva C*, representação gráfica da *função logarítmica.*

Vemos, pela curva C, que a função $y=\log_a x$ é crescente, contínua e definida em todo campo real positivo.

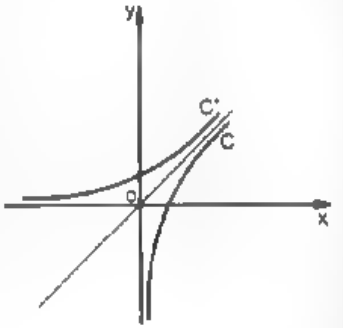


FIG. 4

23. Representação gráfica da função $y=\operatorname{sen} x$. A função $y=\operatorname{sen} x$ é representada pela curva denominada senóide (fig. 5).

Conhecendo o quadro de variação do seno (ver Trigometria) e como $y=\operatorname{sen} x$ é função periódica bastará construir o seu gráfico no intervalo $[0,\ 2\pi]$. A figura 5 é obtida tomando

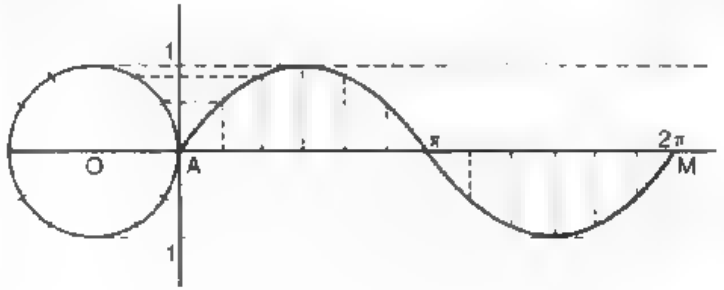


FIG. 5

como eixo dos x o suporte do diâmetro do círculo trigonométrico e para eixo dos y a tangente geométrica no ponto A.

Sobre o semi-eixo positivo dos x retifiquemos a circunferência em A, 2π e dividamo-la em oito partes iguais. A cada ponto dessa divisão façamos corresponder uma ordenada cuja medida algébrica seja igual ao valor do seno do arco considerado. Unindo as extremidades dessas ordenadas obtemos a representação gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

24. Exemplos. De modo análogo ao que foi feito para a representação gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, poderemos obter as repre-

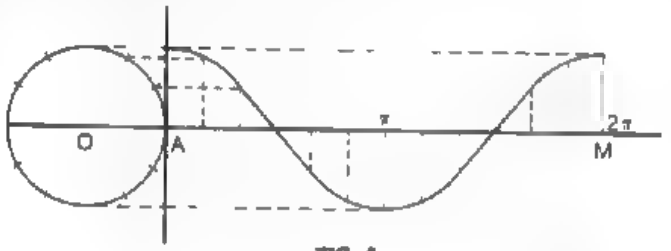


FIG. 6

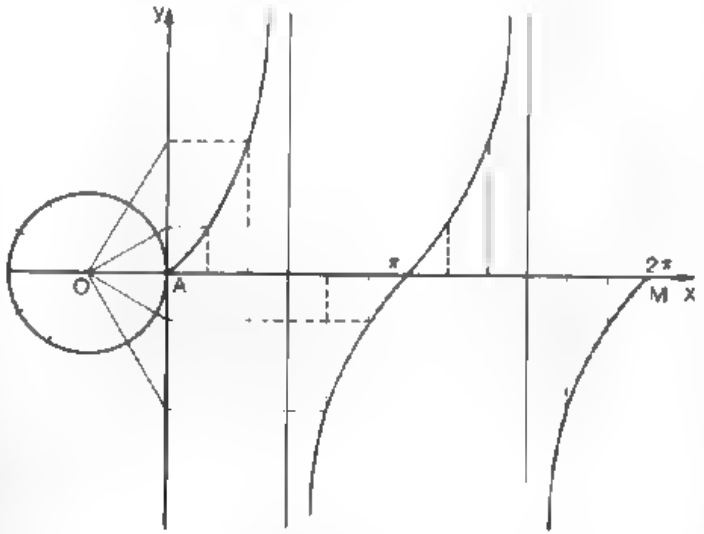


FIG. 7

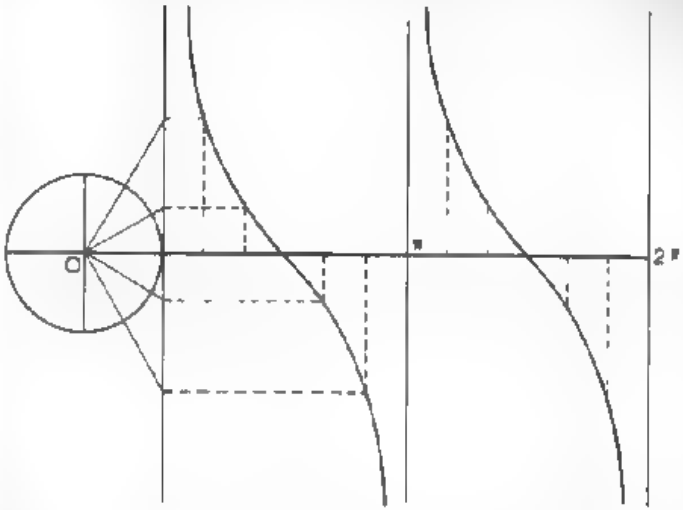


FIG. 8

sentações gráficas de $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cot} x$, que são, respectivamente, a cossenóide (fig. 6), a tangentóide (fig. 7) e a co-tangentóide (fig. 8).

25. Exercícios para resolver.

Representar graficamente as funções abaixo:

1) $y = 2x + 3$

2) $x - 2y = 0$

3) $y = x^2 + 5x + 6$
(Ext. Pedro II, S. Norte, 1.º P. Parcial, 1953).

4) $y = \dfrac{2}{x-2}$
(Ext. Pedro II, Centro, 1.º P. Parcial, 1953).

5) $y = e^{-2x}$
(E. Naval, C. Prévio, 3.º P. Parcial, 1952).

6) Dentre as equações abaixo sublinhe aquela cuja representação gráfica em coordenadas cartesianas é uma parábola:

$x = (x^2 - 1)(x + 4)$ $\quad$ $y = a \log x$
$y = x^2 - 2x$ $\quad$ $y = x^3 + 3x^2 - 2$
$y = \operatorname{sen} x$
(E. P. C. Aeronáutica – 2.º Ano – 1951).

Dizer se as funções abaixo são *crescente* ou *decrescentes*, nos intervalos indicados.

7) $y = x^2 + 3$ em $(0, +\infty)$

12) $y = x^n$ em $(-\infty, +\infty)$

8) $y = x^3 + 5$ em $(-\infty, 0)$
9) $y = x + 2$ em $(-\infty, +\infty)$
10) $y = \frac{2x}{x-2}$ em $(-\infty, 0)$
11) $y = x(x^2 - 3)$ em $(-\infty, -1)$
13) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ em $(-\infty, +\infty)$
14) $y = \log_{10} x$ em $(0, +\infty)$
15) $y = \operatorname{tg} x$ em $(0, 2\pi)$

Respostas:

1) reta
2) reta passando na origem
3) parábola
4) hipérbole
5) exponencial
6) $y = x^2 - 2x$
7) crescente
8) decrescente
9) crescente
10) decrescente
11) crescente
12) crescente
13) decrescente
14) crescente
15) crescente

CAPÍTULO XII

Limites

1. Introdução. O conceito de limite é um dos mais importantes do cálculo e da análise matemática. Sua formulação precisa é devida a Cauchy (*), o qual compreendeu que, a conceituação *dinâmica* de limite, isto é, a idéia de aproximação contínua, poderia, e, ainda mais, segundo ele, deveria ser omitida em benefício de sua definição, que poderíamos denominar de *estática* e que torna possível ao estudante a compreensão analítica das propriedades de continuidade de uma função e do indispensável conceito de derivada.

2. Limite de uma variável. Chama-se limite de uma variável x, cujo domínio é X, a uma constante a tal que a diferença $x - a$, em valor absoluto, possa sempre tornar-se e conservar-se menor do que uma quantidade dada qualquer.

Dizemos, então, que uma variável x tem para *limite finito* um número a, quando fixado um número ε, tão pequeno quanto se queira, se tenha

$$|x - a| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

e dizemos que x *tende para* a, cuja notação é $x \to a$

ou que o limite de x é a cuja representação é $\lim x = a$

Observação: Pode suceder que a variável x tenda para a por valores *superiores* ou *inferiores* a a. Dizemos então que a é, respectivamente, o *limite à direita* ou *limite à esquerda* da variável x, no ponto a.

3. Limites infinitos. Quando o domínio X da variável x for tal que para E tão grande quanto se queira, se tenha

$$|x| > E$$

dizemos que o limite da variável x é *infinito*.

(*) Augustin-Louis Cauchy, matemático francês (1789-1857).

7. Propriedades fundamentais dos limites:

Primeira propriedade: LIMITE DE UMA CONSTANTE.

> O limite de uma constante é a própria constante.

Segunda propriedade: UNICIDADE DO LIMITE.

> Uma função uniforme $y=f(x)$ não pode ter dois limites distintos, no mesmo ponto.

Terceira propriedade: PERMANÊNCIA DE SINAL. Seja $y=f(x)$ definida num intervalo qualquer.

> Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$ (I)
>
> a função $f(x)$ tem o mesmo sinal de l para
>
> $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$

Quarta propriedade:

> Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ têm valores iguais para
>
> $0 < |x-x_0| < d \qquad (d > 0)$
>
> e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, então $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

Quinta propriedade: CRITÉRIO DE CONFRONTO. Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $\varphi(x)$ funções de x definidas em (a, b) e x_0 um ponto de (a, b).

> Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$ (I)
>
> e $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ (II)
>
> para todo ponto de (a, b), diferente de x_0, então:
>
> $\lim \varphi(x) = l$

OBSERVAÇÃO: A 4.ª propriedade é de grande emprego prático, pois permite fazer simplificação nas funções cujo limite queremos determinar, tornando assim possível o cálculo desse limite. Exemplo:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$$

não pode ser logo determinado, mas, simplificando a fração, temos

$$\frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x-2$$

e

$$\lim_{x\to -2} (x-2) = -4$$

8. Operações fundamentais sobre limites. Sendo u e v funções de x e m um número inteiro, demonstram-se que:

> $\lim (u+v) = \lim u + \lim v$
> $\lim (u-v) = \lim u - \lim v$
> $\lim (uv) = \lim u \,.\, \lim v$
>
> $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v}$
>
> $(\lim v \neq 0)$
>
> $\lim (u^m) = (\lim u)^m$
> $\lim \sqrt[m]{u} = \sqrt[m]{\lim u} \quad (\lim u \neq 0)$
> $\lim \log u = \log \lim u \quad (u \text{ e } \lim u \text{ positivos})$
> $\lim u^v = (\lim u)^{\lim v}$

9. Observações. Nas aplicações do cálculo dos limites supõem-se as diversas igualdades simbólicas, que apresentaremos a seguir.

> Essas igualdades são apenas simbólicas; não podemos usar o cálculo algébrico operatório.

1.º) LIMITE DE UMA SOMA.

> a) $(l) + (\pm\infty) = \pm\infty$
> b) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
> c) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
> d) $(+\infty) + (-\infty)$ nada se pode afirmar inicialmente.
>
> O símbolo $\infty - \infty$ é um símbolo de indeterminação.

2.º) Limite de um produto.

a) $(\pm\infty)\times(\pm\infty)=+\infty$
b) $(\pm\infty)\times(\mp\infty)=-\infty$
c) $a\times(\pm\infty)=\pm\infty\ (a>0)$
d) $a\times(\pm\infty)=\mp\infty\ (a<0)$
e) $\infty\times 0$ nada se pode afirmar inicialmente.

O símbolo $\infty\times 0$ é um símbolo de indeterminação.

3.º) Limite de um quociente. (Suposto k constante e positivo)

a) $\frac{k}{\pm 0}=\pm\infty$ b) $\frac{-k}{\pm 0}=\mp\infty$ c) $\frac{k}{\pm\infty}=\pm 0$

d) $\frac{-k}{\pm\infty}=\mp 0$ e) $\frac{\pm\infty}{k}=\pm\infty$ f) $\frac{\pm\infty}{-k}=\mp\infty$

g) $\frac{0}{\infty}=0$ h) $\frac{0}{0}$ nada se pode afirmar inicialmente

i) $\frac{\infty}{\infty}$ nada se pode afirmar inicialmente.

Os símbolos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ são chamados símbolos de indeterminação. E ± 0 indica se a função tende a zero por valores superiores ou inferiores.

4.º) Limite da função exponencial.

a) $k^{+\infty}=+\infty$
b) $k^{-\infty}=0$
c) $0^{+\infty}=0$
d) $0^{-\infty}=+\infty$
e) $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$
f) $(+\infty)^{-\infty}=0$
g) $(\pm\infty)^{k}=\pm\infty$
h) $(\pm\infty)^{-k}=0$
i) 0^0, $(+\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$ nada podem afirmar inicialmente. $(k>0)$

Esses símbolos (s) são símbolos de indeterminação.

5.º) Símbolos de indeterminação.

$$\infty-\infty,\quad \infty\times 0,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}$$
$$\infty^0,\quad 0^0\ \text{e}\quad 1^{\pm\infty}$$

10. Exemplos.

Soma:

1) $u=x,\ v=x^2$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}(u+v)=\infty+\infty=+\infty$
2) $u=x^3+x,\ v=x^2+1$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}(u+v)=\infty+\infty=\infty$
3) $u=2$ e $v=-x$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}(u+v)=2-\infty=-\infty$
4) $u=x^2+x+2$ e $v=1-x$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}(u+v)=\infty-\infty$

Nada se pode afirmar. Mas,

$u+v=x^2+3$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}(u+v)=\infty+3=+\infty$

Produto:

1) $u=x^3+x+1,\ v=x-5$ $\lim_{x\to\infty}uv=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$
2) $u=x,\ v=x^3$ $\lim_{x\to\infty}uv=x\times(+\infty)=+\infty$
3) $u=x^4\ v=\frac{1}{x^3}$ $\lim_{x\to\infty}uv=\infty\times 0$

Podemos proceder assim:

$$uv=x^4\times\frac{1}{x^3}=\frac{x^4}{x^3}=x^2\ \therefore\ \lim_{x\to\infty}uv=\infty$$

Quociente:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{\infty}=0$ 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\sqrt{x}}=\infty$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{0}$ mas, $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{x}=x$ $\therefore\ \lim_{x\to\infty}x=\infty$

Exponencial:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3+x+1)^\pi = +\infty^\pi = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x = 0^{+\infty} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{-x} = 0^{-\infty} = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x-3)^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\sqrt{3}} = 0^{-\sqrt{3}} = +\infty$

11. Limite da função algébrica racional inteira.

1.º) O limite da função algébrica, racional, inteira, $f(x)$, quando $x\to\infty$ é $f(a)$.

De fato, seja

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m \qquad (I)$$

De acordo com as operações com limites, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

2.º) O limite de $f(x)$, racional, inteira, quando $x\to\infty$ é igual ao limite do termo de maior grau de $f(x)$.

Com efeito, colocando em (I) a_0x^m em evidência, temos:

$$f(x) = a_0x^m\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{a_0x^{m-1}} + \frac{a_m}{a_0x^m}\right)$$

e de acordo com as propriedades dos limites e as observações do n.º 9, a expressão entre parênteses tende para 1, e temos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_0x^m$$

12. Exemplos.

1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-1) = \lim\limits_{x\to2}(x^2)+\lim\limits_{x\to2}(x)-\lim\limits_{x\to2}1 = 5$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-5x+9) = \lim\limits_{x\to\infty}2x^3 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty}x^3 = -\infty$

13. Limite de uma função racional. Seja $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ uma função racional, na qual $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios racionais e inteiros.

I) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$

então $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ (limite de um quociente)

Exemplo: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+3x+5}{x^3-2x-8} = \frac{1+3+5}{1-2-8} = -1$

Observação: Se $f(a)=g(a)=0$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ (símbolo da indeterminação)

Levanta-se a indeterminação dividindo ambos os termos de y por $(x-a)$, e sendo $f_1(x)$ e $g_1(x)$ os quocientes encontrados, temos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \qquad (N.º\ 7-4.º)$$

Se $f_1(a)=g_1(a)=0$ procede-se de modo análogo dividindo $f_1(x)$ e $g_1(x)$ por $x-a$ e achando o $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$. E assim sucessivamente.

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-4}{x^3-5x+6} = \frac{0}{0}$ mas, $\frac{x^3-4}{x^3-5x+6} = \frac{x+2}{x-3}$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^3-4}{x^3-5x+6} = \lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-3} = -4$$

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3-4x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{0}{0}$ mas, $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^3-4x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x+1} = 1$

II) $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Temos uma forma indeterminada.

Levantemos a indeterminação. Temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} \times \frac{1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{a_0}\cdot\frac{1}{x^m}}{1 + \frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{b_0}\cdot\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Quando $x \to \infty$, vem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} \cdot 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n}$$

Temos 3 casos:

a) Se $m = n$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$

b) Se $m > n$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^{m-n}}{b_0} = \pm\infty$

conforme os sinais de a_0 e b_0

c) Se $m < n$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0 x^{n-m}} = 0$

III) $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Temos 3 casos, como para $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, e só existe diferença no caso de $m>n$, onde $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ depende dos sinais de a_0 e b_0 e da paridade do expoente $m-n$. Exemplos:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+5x^2+x+1}{x^3+5x-7} = 2$

2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3+2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+x-2}{-3x^2+x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{-3} = -\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+8}{3x^3+5x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+2x^3+3}{x^2-x-1} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+2x-1}{2x^2-x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{2} = -\infty$

14. Limites fundamentais.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$$

nada se podendo afirmar inicialmente, pois temos uma indeterminação.

Para *levantar* ou desaparecer essa indeterminação procederemos como veremos a seguir.

Consideremos então um círculo trigonométrico O e seja $\overset{\frown}{AM} = x$ um arco do seu 1.º quadrante (fig. 9), expresso em radianos.

Da observação da figura temos:

$\overline{MN} = 2\overline{MP} = 2 \operatorname{sen} x$

$\overset{\frown}{MAN} = 2\overset{\frown}{AM} = 2x$

$\overline{TT_1} = 2\overline{AT} = 2\operatorname{tg} x$

É evidente que:

$\overline{MN} < \overset{\frown}{MAN} < \overline{TT_1}$

$\therefore\ 2\operatorname{sen} x < 2x < 2\operatorname{tg} x$

$\therefore\ \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$

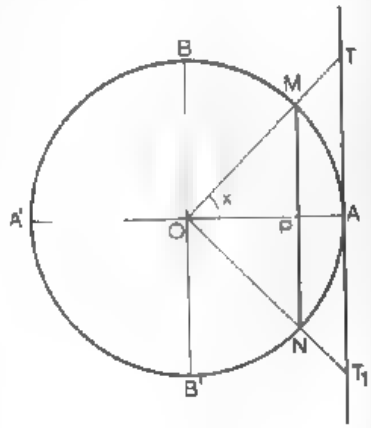


FIG. 9

E tomando os valores absolutos, o que é possível pois sen x, x e tg x são positivos, temos:

$$|\operatorname{sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

Relação deduzida da anterior porém muito mais geral pois não é válida apenas para x positivo e sim para $|x| < \frac{\pi}{2}$

Dividindo por $|\operatorname{sen} x|$ temos: $1 < \dfrac{|x|}{|\operatorname{sen} x|} < \dfrac{1}{|\cos x|}$

$$\therefore\ |\cos x| < \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} < 1 \quad \text{ou} \quad |\cos x| < \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| < 1 \quad \text{(I)}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$ temos, de acordo com o critério de confronto:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = 1 \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{(N.º 7 - 3.ª)}$$

Se x for expresso em graus, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\pi}{180^\circ}$.

Observação: É fácil provar, também, partindo de (I), que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

15. Aplicações.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx}$ $(b \neq 0)$ Temos: $\dfrac{0}{0}$ indeterminação

Mas, $\dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \dfrac{a}{a}\times\dfrac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \dfrac{a}{b}\times\dfrac{\operatorname{sen} ax}{ax}$ $(a \neq 0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{bx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{b}\times\frac{\operatorname{sen} ax}{ax}\right) = \frac{a}{b}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{ax} = \frac{a}{b}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg} 0 = 0$$

3) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}(1-\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\times\frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x} = 1\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 1\times 0 = 0$$

16. Exercícios para resolver.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} kx}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x-2\pi}$

Respostas: 1) 0 2) 1 3) k 4) 0

17. O número e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Deixamos de demonstrar esse limite por ser sua demonstração rigorosa muito difícil e trabalhosa.

x	y
1	2,000
2	2,250
3	2,369
5	2,489
10	2,594
100	2,705
1 000	2,717
10 000	2,718
.....	....
∞	e

O número irracional $e = 2{,}718281828$, aproximadamente, é a base do sistema de logaritmos neperianos (lg) (Cap. III - N.º 4 - b).

Observação: Se considerarmos a função $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ verificaremos que para os valores de x, considerados no quadro ao lado, correspondem valores de y que irão se aproximando de $e = 2{,}718\,28$, à medida que os valores de x tendem para ∞.

18. Aplicações.

1) $\lim_{x\to} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Realmente fazendo $x = \frac{1}{z}$, quando $x \to 0$, $z \to \infty$,

$$\therefore \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e$$

2) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$ (k real relativo)

Fazendo $\frac{k}{x} = z$, vem $x = \frac{k}{z}$, quando $x \to \infty$, $z \to 0$

$$\therefore \lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{k}{z}} = \lim_{z\to 0} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{k}$$

Mas, $\lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ (Aplicação 1)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = \lim_{z\to 0} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^{k} = e^{k}$$

3) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{-k} = \frac{1}{e^{k}}$

4) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+k} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{k}\right] = e \,.\, 1 = e$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \lg(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lg \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lg e = 1$

6) $\lim_{x\to 1} \frac{\lg x}{x-1}$

Fazendo $x = u + 1$, quando $x \to 1$, $u \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{\lg x}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\lg(u+1)}{u} = 1$$ (de acordo com a aplicação 5)

7) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\lg x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{\lg x}{x-1}} = \frac{1}{1} = 1$ (de acordo com a aplicação 6)

19. Exercícios para resolver.

1) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

2) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

3) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)^{2}}{x}$

5) $\lim_{x\to 1} \frac{\lg x^{3}}{x-1}$

6) $\lim_{y\to 1} \frac{2y-2}{\lg y}$

RESPOSTAS

1) $\frac{1}{e}$; 2) e^{2}; 3) e; 4) 2; 5) 3; 6) 2.

20. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \lg a}$ ($a > 0$)
($\lg a$ — logaritmo neperiano de a)

Temos $\lim_{x\to 0} \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (símbolo de indeterminação)

Se fizermos $a^{x} = 1 + \frac{1}{u}$, então, pela definição de logaritmos,

$$x = \log_{a}\left(1+\frac{1}{u}\right)$$

então,

$$\frac{a^{x}-1}{x} = \frac{1+\frac{1}{u}-1}{\log_{a}\left(1+\frac{1}{u}\right)} = \frac{\frac{1}{u}}{\log_{a}\left(1+\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{u\log_{a}\left(1+\frac{1}{u}\right)}$$

ou

$$\frac{a^{x}-1}{x} = \frac{1}{\log_{a}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}$$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e}$ pois, quando $x \to 0$, $u \to \infty$

Mas, $\log_a e \times \lg a = 1 \quad \therefore \quad \frac{1}{\log_a e} = \lg a$

e, portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lg a$

21. Exercícios para resolver.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ 2) $\lim_{x\to 1} \frac{2^{x-1} - 1}{x - 1}$ 3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

4) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{e} - 1)$ (*Sugestão*: Fazer $\frac{1}{x} = u$)

Respostas:

1) 1/2 2) lg 2 3) 1 4) 1

22. $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a}$$

Temos $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (símbolo de indeterminação)

De fato, temos: $(a \neq 0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{a \cdot \lg(1+x)} \cdot \frac{a \cdot \lg(1+x)}{x} \qquad (I)$$

Fazendo $(1+x)^a = u$, vem $a \lg(1+x) = \lg u$
Substituindo em (I):

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{\lg u} \cdot a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} \qquad (II)$$

Mas, $\lim_{u\to 1} \frac{u-1}{\lg u} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$ (N.º 18)

Substituindo em (II), temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = 1 \times a \times 1 = a$$

23. Exercícios para resolver.

1) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx}$ 2) $\lim_{x\to 0} \lg \frac{(1+x)^x - 1}{x}$ 3) $\lim_{x\to 1} \lg \frac{x^x - 1}{x - 1}$

Resposta: Todos são iguais a um.

24. Limites laterais.

1) Limite de uma função à direita de um ponto. Seja $y = f(x)$ definida em (a, b) e x_0 um ponto de (a, b).

Diz-se que a função $f(x)$ tem um *limite à direita*, l, quando a variável x tem *limite à direita*, x_0, se para cada ε positivo existe, em correspondência com ε, um número positivo d, tal que:

para $x_0 < x < x_0 + d$

se tenha $|f(x) - l| < \varepsilon$

E designa-se esse limite com a notação

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = l$$

Exemplo: $$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{\sqrt{3}\, x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) Limite de uma função à esquerda de um ponto. Seja $y = f(x)$ definida em (a, b) e x_0 um ponto de (a, b).

Diz-se que a função $f(x)$ tem um *limite à esquerda*, l, quando a variável x tem *limite à esquerda*, x_0, se para cada ε positivo existe, em correspondência com ε, um número positivo d, tal que

para $x_0 - d < x < x_0$ se tenha $|f(x) - l| < \varepsilon$

E designa-se esse limite com a notação

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = l$$

Exemplo: $$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{\sqrt{3}\, x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3) Limites laterais. Chamam-se *limites laterais* aos limites à esquerda e à direita.

Os limites laterais podem ser distintos ou não; e pode mesmo deixar de existir apenas um dos dois.

É condição necessária e suficiente para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ que existam e sejam iguais seus limites laterais.

1) $\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{\sqrt{3} \cdot x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{\sqrt{3} \cdot x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $\lim_{x \to 2+} x^2 = \lim_{x \to 2-} x^2 = 4$

3) $\lim_{x \to 3+} \sqrt{x-3} = 0$ e $\lim_{x \to 3-} \sqrt{x-3}$ não existe

25. Função contínua.

I) Diz-se que uma função $y = f(x)$, definida em (a, b) é *contínua em um ponto* x_0 de (a, b), se

1) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e é finito

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

II) Diz-se que uma função $y = f(x)$, definida em (a, b) é *contínua nesse intervalo*, se for contínua em todos os pontos de (a, b).

III) Uma função $y = f(x)$ diz-se *descontínua* em um ponto a se, uma ao menos das condições abaixo não forem satisfeitas:

1) $f(x)$ é definida em a

2) existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e é finito

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Um ponto a onde $f(x)$ não seja contínua diz-se um *ponto de descontinuidade* de $f(x)$.

Exemplos.

1) A função $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ é contínua em todo campo real, pois:

a) a função y é definida em todo campo real $(-\infty, +\infty)$

b) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ sendo x_0 um ponto de $(-\infty, +\infty)$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + 3x_0 + 2 = f(x_0)$

De modo análogo mostraríamos que uma função racional inteira de grau m é contínua em todo campo real.

2) A função $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em todo campo real, pois:

a) a função é definida em $(-\infty, +\infty)$

b) existe $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x$; sendo x_0 um ponto de $(-\infty, +\infty)$

c) $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$

o que é fácil de provar.

De fato, temos:

$$\lim_{x \to x_0} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0) = \lim_{x \to x_0} 2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0) = 2 \times 0 \times \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

3) A função $y = f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois a função não é definida no ponto $x = 3$ (N.º 25 - III).

Mas, $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x - 4) = -1$

e dizemos que o verdadeiro valor de $f(3)$ é -1.

4) A função $y = f(x) = \frac{1}{x - 4}$ tem no ponto $x = 4$ uma descontinuidade pois não é definida nesse ponto.

5) A função $y = 1 + e^{\frac{1}{x}}$ tem na origem uma descontinuidade pois $\lim_{x \to 0+} y = +\infty$ e $\lim_{x \to 0-} y = 1$.

27. Descontinuidade das funções racionais fracionárias. É fácil de ver, de acordo com as propriedades e operações dos limites, que a soma, diferença e produto de funções contínuas são funções contínuas, e que, portanto, os polinômios racionais inteiros são funções contínuas, como já observamos.

Consideremos, agora, as funções algébricas racionais da forma $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios racionais inteiros.

As funções do tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ onde $g(x) \neq 0$ para qualquer ponto x de $(-\infty, +\infty)$, são contínuas em todo o campo real.

As funções $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ apresentam *descontinuidade* infinitas nos pontos x_i onde $g(x_i) = 0$ e $f(x_i) \neq 0$.

Os pontos x_i são os *pontos de descontinuidade* de y (ou *pólos* de y). Exemplos:

I) Determinar os pontos de descontinuidade da função

$$y = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$$

Resolvendo a equação $x^2-2x-3=0$ é fácil de ver que 3 e -1 anulam o denominador, mas, não anulam o numerador.

3 e -1 são, pois, os pontos de descontinuidade ou pólos de y.

II) Estudar as descontinuidades da função

$$y = \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$$

Resolvendo a equação $x^2-5x+6=0$, vemos que o denominador se anula para $x=2$ e $x=3$.

Então, 2 e 3 são pontos de descontinuidade da função.

28. Exercícios resolvidos.

Calcular:

1) $\lim_{k\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{k}}$ Temos: 1^∞ indeterminado

Fazendo $kx = a$, quando $k \to 0$, $a \to 0$,

$$\therefore \lim_{k\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{k}} = \lim_{a\to 0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = \lim_{a\to 0} \left[(1+a)^{\frac{1}{a}}\right]^x$$

$$\therefore \lim_{k\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{k}} = e^x$$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+kx)}{x}$ Temos: $\frac{0}{0}$ indeterminado

Acabamos de ver que: $\lim_{k\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{k}} = e^x$

ou $\lim_{x\to 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$

achando o logaritmo neperiano (lg) dos dois membros, vem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lg(1+kx) = k \lg e \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+kx)}{x} = k$$

3) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} = 1 \times (-1) = -1$$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4 + \sqrt[3]{x^3-8}}{x-2}$ Temos: $\frac{0}{0}$

(E. Aeronáutica – 1948).

Dividindo ambos os termos por $x-2$, vem:

$$\lim_{x\to 2} \left(x + 2 + \sqrt[3]{\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^3}}\right) = 2 + 2 + \sqrt[3]{\frac{12}{0}} = +\infty$$

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\lg(n-1)}$

(I. T. Aeronáutica – 1951).

Temos: $$\frac{\lg n}{\lg(n-1)} = \frac{\lg n}{\lg n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lg n}{\lg n + \lg\left(1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\lg\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lg n}} \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{\lg(n-1)} = \frac{1}{1+\frac{0}{\infty}} = 1$$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$

(E. N. Química – 2.ª época – 1947).

Temos: $\frac{0}{0}$. Mas,

$$\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{e^{\operatorname{sen} x}(e^{x-\operatorname{sen} x} - 1)}{x - \operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{e^{x-\operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x} \cdot 1 = 1 \times 1 = 1$$

27. Exercícios para resolver.

Calcular os limites à esquerda das seguintes funções, nos pontos indicados:

1) $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{\sqrt{2}\,.\,x}$

2) $\lim_{x\to 1-} \sqrt{x-1}$

3) $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}$

4) $\lim_{x\to 0} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)$

5) $\lim_{x\to 3-} \frac{3x}{x-3}$

Calcular os limites à direita de

6) $\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2}$

7) $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}$

8) $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3}$

9) $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x}$

10) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}$

Calcular os limites:

11) $\lim_{x\to 2} (x^2-3x+1)$

12) $\lim_{x\to 0} \left(x^4+\frac{1}{x^2}\right)$

13) $\lim_{x\to +\infty} (x^2+3x+5)$

14) $\lim_{x\to -\infty} (x^3+x-2)$

15) $\lim_{x\to -1} \frac{5x^3+x+1}{x^2-6}$

16) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

17) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-3x+1}{4x^3+1}$
(I. T. A. – 1956).

18) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x-1}{x^3-5x+3}$

19) Calcule: $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2-x+3}{5+x-2x^2}$
(ENE – 1968).

20) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3-1}{2x^4+x-2}$

21) $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^4+3x^3-9}{2x^4-6x^3+3x}$
(E. Aer. – 1958).

22) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3+1}$
(C. Pedro II – P. Parcial – 1954).

23) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+2}{x+2}$

24) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2-5x^3}{x-3}$

25) $\lim_{x\to \infty} [\lg(x+1)-\lg x]$

26) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})$

27) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

28) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x})$

29) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2x+3}-x)$

30) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$

31) $\lim_{x\to 0} (\sqrt{1-x^2})^{1/x}$
(UFF – 1970).

32) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[x]{e}}{x}$

33) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[x]{2}}{x\ 8}$

34) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

35) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

36) $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$
(I M E. – 1971).

37) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
(UFRJ – 1970).

38) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x-\operatorname{sen} 3x}{x\cos x}$

39) $\lim_{x\to 0} \frac{a\lg(1+x)}{bx}$

40) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\lg x}$

41) $\lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{x}{a}\right)^x$

42) $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi-x}$
(C. Pedro II – P. Parcial – 1964).

43) $\lim_{x\to 2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2\pi-x}$

44) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$

45) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

46) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

47) $\lim_{x\to \infty} 2x(\sqrt[x]{e}-1)$

48) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$

49) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(e^x+1)}{e^x}$

50) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$
(E. N. Agronomia – 1950).

51) $\lim_{x\to 0} \frac{ax\operatorname{sen} bx}{\operatorname{tg}^2 bx}$
(Col. Naval – P. Parcial – 1964).

Estude as descontinuidades das funções seguintes:

52) $y=\frac{1-x}{x^2}$

53) $y=\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

54) $y=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

55) $y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$

56) $y=x+\frac{x}{|x|}$

57) $y=\frac{2x-4}{x^2-3x+2}$
(E. Naval – Admissão – 1963).

58) $y=\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

59) Estude a continuidade e as descontinuidades da função $y=\frac{2|x|}{x}$
(E. Naval – C. Prévio, 4.º P. Parcial – 1953).

60) Calcule: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x}\right)^x$

(Esc. Eng. U. F. Est. Rio - 1963).

61) Calcule: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{7x}\right)^x$

(IME - 72 S. P.)

RESPOSTAS:

1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
2) não existe
3) $-\infty$
4) 1
5) $-\infty$
6) $+\infty$
7) $+\infty$
8) $+\infty$
9) 1
10) 0
11) -1
12) ∞
13) $+\infty$
14) $-\infty$
15) -1
16) $-\frac{3}{4}$
17) $\frac{1}{4}$
18) 2
19) $-1{,}5$
20) 0
21) 3
22) 0
23) $+\infty$
24) $-\infty$
25) 0
26) 0
27) 0
28) ∞
29) 1
30) 0
31) 1
32) 0
33) 0
34) 0
35) 1
36) e^{10}
37) $\frac{1}{2}$
38) 4
39) $\frac{a}{b}$
40) 2
41) e^{-x}
42) 1
43) -1
44) $\frac{2}{3}$
45) 1
46) 2
47) 2
48) 1
49) $\lg 2$
50) $3a^3$
51) a/b

52) descontínua para $x=0$
53) descontínua para $x=0$
54) descontínua nos pontos $x=1$ e $x=2$
55) descontínua nos pontos $x=3$ e $x=2$
56) É descontínua para $x=0$ (pois os limites laterais não coincidem)
57) É descontínua para $x=1$ e $x=2$
58) É descontínua nos pontos $x=-1$ e $x=1$
59) É contínua em todo campo real menos no ponto $x=0$, onde $x=0$ é ponto de descontinuidade, pois os limites laterais da função são diferentes.

60) $e^{\frac{2}{5}}$
61) $e^{\frac{1}{7}}$

CAPÍTULO XIII

Derivadas

1. Definição da derivada em um ponto. Seja uma função $y=f(x)$ uniforme em um certo intervalo (a, b), e consideremos x_0 um ponto desse intervalo e Δx_0 o acréscimo da variável.

Quando a variável sofre um acréscimo Δx_0 a função sofre um acréscimo $\Delta y_0 = f(x_0+\Delta x_0) - f(x_0)$.

A relação $$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0} \qquad \text{(I)}$$

univocamente definida para cada valor de Δx_0, chama-se *razão dos acréscimos* ou *razão incremental*.

Chama-se *derivada* da função $y=f(x)$ no ponto x_0, ao limite, finito, caso exista, da razão incremental (I) quando $\Delta x_0 \to 0$.

E indica-se assim:

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0) \qquad \text{(II)}$$

Se a função $y=f(x)$ admite *derivada* em um ponto, diz-se *derivável* nesse ponto.

A derivada em um ponto, quando existe, é única (Unicidade do limite).

2. Função derivada. Pode acontecer que a função $y=f(x)$ seja derivável em cada ponto de (a, b). Nestas condições, a cada ponto do intervalo (a, b) corresponde um número que é a derivada de $f(x)$ nesse ponto. Assim sendo, podemos considerar uma outra função de x, definida em (a, b), que se chama *função derivada* de $f(x)$, tal que, para cada x, o valor da função coincide com o valor da derivada de $f(x)$ nesse ponto.

Esta *função derivada* costuma-se indicar por um dos símbolos

$$y' \quad \text{ou} \quad f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}$$

3. Exemplo. A função $y=f(x)=x^2+1$ é derivável em $(-\infty, \infty)$.

De fato, seja Δx o acréscimo da variável em um ponto qualquer do campo real.

Temos:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2+1-(x^2+1) =$$
$$= x^2+2x\,.\,\Delta x+(\Delta x)^2+1-x^2-1 = 2x\,.\,\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,.\,\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x+\Delta x$$

$$\therefore y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) = 2x$$

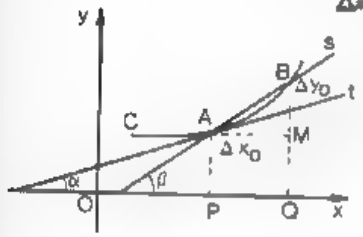


FIG. 10

4. Interpretação geométrica da derivada. Seja $y=f(x)$ uma função derivável em (a, b) e seja a curva C (fig. 10) a sua representação gráfica.

Consideremos os pontos A (x_0, y_0) e B $(x_0+\Delta x_0, y_0+\Delta y_0)$ da curva, e tracemos a secante s, passando por A e B e a tangente t à curva, no ponto A.

Se traçarmos AM paralelo ao eixo dos x, o triângulo AMB é retângulo e seus catetos são os acréscimos Δx_0 e Δy_0. Temos que:

$$\operatorname{tg} \widehat{BAM} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Como, por hipótese, $f(x)$ é derivável em (a, b), então

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0)$$

Mas, quando $\Delta x_0 \to 0$ o ponto $B \to A$ e a secante s tende para uma posição limite t, que é a tangente à curva C, no ponto A, e, o ângulo β tenderá então para o ângulo α, inclinação de t.

Logo, podemos escrever

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Conclusão: A derivada de uma função $y=f(x)$ em um ponto x_0 do seu campo de definição é igual ao coeficiente angular da tangente geométrica a essa curva no ponto x_0.

5. Interpretação cinemática da derivada. Seja um móvel animado de um movimento retilíneo e suponhamos que a distância d por ele percorrida seja uma função do tempo

$$d = f(t)$$

Se num instante t o móvel percorre uma distância $f(t)$, em um instante $t+\Delta t$ percorrerá $f(t+\Delta t)$. Então para um acréscimo de tempo Δt corresponde um acréscimo

$$\Delta d = f(t+\Delta t)-f(t)$$

A velocidade média com que o móvel percorreu a distância Δd é dada pela expressão:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

Se o intervalo de tempo for decrescendo, isto é, $\Delta t \to 0$, a relação $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ vai se aproximando da velocidade no ponto, ou instantânea. Logo, se tomarmos o limite, quando $\Delta t \to 0$ teremos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = v_t$$

que é a velocidade do móvel em um instante t.

Portanto, a velocidade do móvel em um instante considerado é a derivada da distância em relação ao tempo.

6. Diferencial de uma função. Seja uma função $y=f(x)$ admitindo derivada finita em (a, b) sejam Δx e Δy os acréscimos, da variável e da função.

Chama-se *diferencial da função* $f(x)$ correspondente ao acréscimo Δx ao produto da derivada $f'(x)$ pelo acréscimo Δx, e indicamos assim:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \qquad (I)$$

O símbolo dy representa a *diferencial*.

O símbolo $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ indica uma *diferença*.

9. Cálculo da diferencial de uma função. Empreguemos a definição de diferencial para o caso particular da função $y = x$.

Como $\Delta y = \Delta x$, então $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

e, portanto, $f'(x) = 1$ e, de acordo com a (I):

$$dx = f'(x) \cdot \Delta x = \Delta x$$

Então, a expressão da diferencial de uma função $f(x)$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

pode ser escrita assim:

$$dy = f'(x)\, dx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (II)$$

isto é, a derivada de uma função é igual ao quociente das diferenciais da função e da variável independente.

A expressão (II) nos permite concluir que o cálculo das diferenciais reduz-se ao cálculo das derivadas.

8. Interpretação geométrica da diferencial. Seja C a curva representativa da função $y = f(x)$ (fig. 11).

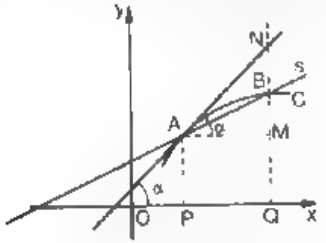


FIG. 11

E sejam A e B dois pontos da curva de abscissas, respectivamente iguais a x e $x + \Delta x$.

Traçando a tangente t e a secante s, temos, do triângulo AMN:

$$MN = AM \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot f'(x)$$

e, de acordo com a definição de diferencial,

$$MN = \Delta x \cdot f'(x) = dy$$

Logo, graficamente, a diferencial dy representa o acréscimo MN da ordenada do ponto de tangência A.

OBSERVAÇÃO: A *diferença* Δy da função e a diferencial dy, para certos valores de Δx são aproximadamente iguais.

Este fato é de grande importância porque nos permite substituir, em certos casos, a *diferença* Δy pela *diferencial* dy. Exemplo:

Sendo $y = f(x) = x^3 + 1$, calcular a diferença da função nos pontos $x_1 = 12$ e $x_2 = 12,1$ e a diferencial da função no ponto $x_1 = 12$.

$$\Delta x_1 = 12,1 - 12 = 0,1$$
$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1) = f(12+0,1) - f(12) =$$
$$= 147,41 - 145 = 2,41$$
$$dy = 3x_1^2 \cdot \Delta x_1 = 3 \times 12^2 \times 0,1 = 2,4$$

É fácil de ver que o erro cometido em tomar a *diferencial* no lugar da diferença é muito pequeno.

REGRAS GERAIS DE DERIVAÇÃO

9. Definição. A expressão (II) do N.º 1 nos permite calcular de um modo geral a derivada de uma função, aliás, como fizemos no exemplo dado (N.º 3). Veremos a seguir apenas as regras gerais que nos possibilitam a derivação das funções que se apresentam comumente.

Usaremos, daqui para diante, no cálculo das derivadas, a denominação de *derivada* no sentido de *função derivada*.

10. Derivada de uma constante. Se $y = k$ em qualquer ponto e qualquer que seja o acréscimo Δx,

$$\Delta y = k - k = 0$$

logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

e, portanto:

> A derivada de uma constante é nula.

Exemplos: 1) Se $y = 2x$ $\quad y' = 0$
2) Se $y = \text{sen } kx$ $\quad y' = 0$

11. Derivada de uma variável. Se $y = f(x) = x$, temos que:

$$y + \Delta y = x + \Delta x \therefore \Delta y = \Delta x \text{ e } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

e, portanto:

> A derivada de uma variável em relação a ela mesma é igual à unidade.

12. Derivada de função de função. Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ deriváveis em (a, b) então $y = f[g(x)] = F(x)$ e diremos que y é uma *função de função* de x.

Dando a x um acréscimo Δx, mediante $u = g(x)$ corresponde a u um acréscimo Δu e a este, mediante $y = f(u)$, um acréscimo Δy.

Partindo da identidade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

e admitindo que existam os limites dessas razões incrementais, quando $\Delta x \to 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x)$$

pois, quando $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$ e $\Delta y \to 0$

ou

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \qquad (I)$$

E dizemos:

> A derivada de uma função y, que é função de x mediante a função u, é igual ao produto da derivada de y em relação a u pela derivada de u em relação a x.

O resultado (I) pode ser generalizado para o caso em que se tenha:

$$y = f_1(u),\ u = f_2(v),\ v = f_3(t),\ \ldots,\ s = f_n(x)$$

a função de função $y = F(x)$ admite para derivada:

$$y' = f'_1(u) \cdot f'_2(v) \cdot f'_3(t) \ldots f'_n(x) \qquad (II)$$

suposto que existam essas derivadas.

13. Derivada de funções inversas. Sejam as funções inversas, deriváveis em (a, b)

$$y = f(x) \text{ e } x = g(y)$$

A um acréscimo Δx, corresponde, mediante $y = f(x)$ um acréscimo Δy; e a este acréscimo Δy corresponde, reciprocamente, mediante $x = g(y)$, o mesmo acréscimo Δx anterior.

Supondo Δx e Δy diferentes de zero, da identidade $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$ podemos escrever:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y)}$$

ou

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]}} \qquad (I)$$

> A derivada de y em relação a x é o inverso da derivada de x em relação a y.

Observação: Esta propriedade das funções inversas é importante para o cálculo das derivadas das funções circulares inversas que veremos adiante.

14. Derivada de uma soma algébrica. Seja

$$y = u + v - z$$

sendo u, v e z funções de x deriváveis em (a, b).

Dando a x um acréscimo Δx, correspondem acréscimos Δu, Δv e Δz de u, v e z, respectivamente, e, portanto, um acréscimo Δy de y.

Então,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (z + \Delta z)$$
$$\therefore \quad \Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z$$

e dividindo por Δx, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

e calculando os limites de ambos os membros, quando $\Delta x \to 0$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

ou

$$\boxed{y' = u' + v' - z'} \qquad (I)$$

Esta regra (I) pode ser generalizada facilmente para um *número finito* qualquer de funções.

> A derivada de uma soma algébrica de um número finito de funções, deriváveis em um mesmo intervalo, é a soma algébrica das derivadas dessas funções.

15. Derivada de um produto. Seja $y = uv$ sendo u e v funções de x deriváveis em (a, b).

Dando a x um acréscimo Δx, correspondem acréscimos Δu e Δv, de u e v, respectivamente, e, portanto, um acréscimo Δy, de y.

Então,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$
$$\therefore \quad \Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

Dividindo ambos os membros por Δx, vem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Calculando os limites de ambos os membros, quando $\Delta x \to 0$, temos, de acordo com a definição de derivada:

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

ou

$$\boxed{y' = uv' + vu'} \qquad (I)$$

> A derivada do produto de duas funções, deriváveis em um mesmo intervalo, é igual à soma dos produtos de cada uma delas pela derivada da outra.

16. Observações sobre derivada de um produto.

1.ª) A regra de derivação (I), estende-se facilmente ao caso de três funções $y = uvz$ bastando observar que podemos escrever

$$y = (uv)\, z$$
$$\therefore \quad y' = (uv)' \cdot z + (uv) \cdot z'$$

e substituindo $(uv)'$ pelo seu valor em (I) do N.º 17,

temos: $$y' = uvz' + uz'z + u'vz$$

e pelo método de recurrência podemos generalizar a regra (I) para o produto de um número finito de funções.

> A derivada do produto de um número finito de funções deriváveis em um mesmo intervalo é igual à soma dos produtos das derivadas de cada uma das funções pelas outras restantes.

2.ª) *A derivada do produto de uma constante por uma função derivável é igual ao produto dessa constante pela derivada dessa função.*

É uma conseqüência da (I) tendo em vista que a derivada de uma constante é nula.

Isto é $y = u \cdot k$, $y' = u \cdot 0 + k \cdot u' = ku'$

19. Derivada de um quociente (ou fração). Seja $y = \frac{u}{v}$, sendo u e v funções de x deriváveis em (a, b).

Dando a x um acréscimo Δx, correspondem acréscimos Δu e Δv, de u e v, respectivamente, e, portanto, um acréscimo Δy, de y.

Então, $$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\therefore \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

Dividindo ambos os membros por Δx, vem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

Calculando os limites de ambos os membros, quando $\Delta x \to 0$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2 + v \cdot 0} \text{ ou } \boxed{y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}} \quad \text{(I)}$$

> A derivada de uma fração, cujos termos são funções deriváveis em um mesmo intervalo, é igual ao denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, e a diferença dividida pelo quadrado do denominador.

Exemplos:

1) $y = \frac{x+1}{x} \therefore y' = \frac{x \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

2) $y = \frac{k}{x}$ $(k = c^{te})$ $\therefore y' = \frac{x \cdot 0 - k \cdot 1}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$

18. Derivada de uma potência. Seja a função

$$y = u^m \quad (u > 0)$$

sendo u uma função de x derivável em (a, b) e m um número real qualquer.

Dando a x um acréscimo Δx corresponde a u um acréscimo Δu e, portanto, a y um acréscimo Δy.

Então, $y + \Delta y = (u + \Delta u)^m$

$$\therefore \Delta y = (u + \Delta u)^m - u^m = \left[u\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)\right]^m - u^m$$

$$\therefore \Delta y = u^m\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^m - u^m = u^m\left[\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^m - 1\right]$$

Dividindo por Δx, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u^m \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^m - 1}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = u^m \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^m - 1}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ou $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u^{m-1} \cdot \left[\frac{\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^m - 1}{\frac{\Delta u}{u}}\right] \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Calculando os limites de ambos os membros, quando $\Delta x \to 0$, e tendo em vista que o limite da expressão entre colchetes é igual a m temos:

$$\frac{dy}{dx} = u^{m-1} \cdot m \cdot \frac{du}{dx}$$

ou, finalmente, $$\boxed{y' = mu^{m-1} \cdot u'} \quad \text{(I)}$$

Exemplos:

1) A derivada de $y = x^3$ é $y' = 2x$

2) A derivada de $y = (x+3)^5$
é $y' = 5(x+3)^4 \cdot (1+0) = 5(x+3)^4$

19. Derivada de um polinômio. É uma conseqüência dos N.os 10, 11, 14, 15 e 18.

Se $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

temos: $\boxed{y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}$

Exemplos:

1) A derivada de $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$
é $y' = 3x^2 - 10x + 2$

2) A derivada de $y = 3x^5 - 2x$ é $y' = 15x^4 - 2$

20. Derivada de uma raiz. Seja $y = \sqrt[n]{u}$, onde n é inteiro e positivo.

Temos que $y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$

Como $\frac{1}{n}$ é um número real, de acordo com o N.º 18, vem:

$$y' = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u' = \frac{1}{n}u^{\frac{1-n}{n}} \cdot u' = \frac{1}{n}u^{-\frac{n-1}{n}} \cdot u'$$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{nu^{\frac{n-1}{n}}} \cdot u'$$

$$\therefore\quad \boxed{y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{\sqrt[n]{u}}{n} \qquad (I)$$

Exemplos:

1) A derivada de $y = \sqrt{x^2+1}$ é

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) Se $y = \sqrt[3]{8x^2}$,

$$y' = \frac{24x^2}{4\sqrt[3]{(8x^2)^2}} = \frac{6x^2}{\sqrt[3]{2^6 \cdot x^6}} = \frac{6x^2}{4x^2\sqrt[3]{2x}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{2x}}$$

21. Derivada da função exponencial. Seja a função $y = a^u$, sendo $a \neq 1$ e positivo uma constante e u uma função de x derivável em (a, b).

Dando um acréscimo Δx a x, corresponde um acréscimo Δu de u e, portanto, um acréscimo Δy de y.

Então, $y + \Delta y = a^{u+\Delta u}$

$$\therefore\ \Delta y = a^{u+\Delta u} - a^u = a^u(a^{\Delta u} - 1)$$

Dividindo ambos os membros por Δx, vem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^u \cdot \frac{a^{\Delta u} - 1}{\Delta x} = a^u \cdot \frac{a^{\Delta u} - 1}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Achando os limites, quando $\Delta x \to 0$, e tendo em vista que:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{a^{\Delta u} - 1}{\Delta u} = \lg a$$

temos:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \cdot \lg a \cdot \frac{du}{dx} \qquad (I)$$

ou $$\boxed{y' = a^u \cdot \lg a \cdot u'} \qquad (I)$$

Observação: Se a exponencial é $y = e^u$

$$y' = e^u \cdot \lg e \cdot u' \quad \therefore\ y' = e^u \cdot u' \quad (\text{pois } \lg e = 1)$$

e, em particular, se $y = e^x$

$$y' = e^x \quad (\text{a derivada de } e^x \text{ é ainda } e^x)$$

Exemplos:

1) Se $y = x^{2x}$, $y' = x^{2x} \lg x \cdot 2 = 2x^{2x} \lg x$

2) Se $y = e^{x+2} - e^x$, $y' = e^{x+2} \cdot 1 - e^x = e^x(e^2 - 1)$

22. Derivada da função logarítmica. Seja $y = \log_a u$ sendo $u = f(x)$ derivável em um certo intervalo $(u > 0)$.

De acordo com a definição de logaritmos:

$$u = a^y$$

derivando, vem:

$$u' = a^y \lg a \cdot y' \qquad y' = \frac{u'}{a^y \cdot \lg a}$$

Donde, finalmente:

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u \cdot \lg a}} \qquad \text{(I)}$$

ou, como $\frac{1}{\lg a} = \log_a e$ então, temos também

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u} \log_a e} \qquad \text{(II)}$$

Observação: Se $y = \lg u$ (logaritmo neperiano de u)

De acordo com a (I) temos: $y' = \frac{u'}{u \lg e}$

ou

$$\boxed{y' = \frac{u'}{u}} \qquad \text{(III)}$$

Exemplos:

1) Se $y = \lg x$ $y' = \frac{1}{x}$

2) Se $y = \lg 2x^2$ $y' = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x}$

3) Se $y = \log_a (x^2 - 2x + 1)$, $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x+1)\lg a} = \frac{2}{(x-1)\lg a}$

ou $$y' = \frac{2}{x-1} \log_a e = \frac{2 \log_a e}{x-1}$$

23. Derivada da função exponencial geral. Seja a função $y = u^v$ onde u e v são funções de x deriváveis em (a, b) e u positiva nesse intervalo.

Calculando os logaritmos neperianos dos dois membros, temos:

$$\lg y = v \cdot \lg u$$

Derivando, de acordo com os N.os 15 e 22, temos:

$$\frac{y'}{y} = v \cdot \frac{u'}{u} + v' \lg u$$

$$\therefore y' = y \cdot v \cdot \frac{u'}{u} + y \cdot v' \cdot \lg u$$

$$\therefore y' = v \cdot \frac{u^v}{u} \cdot u' + u^v \lg u \cdot v'$$

ou

$$\boxed{y' = v\, u^{v-1}\, u' + u^v \lg u \cdot v'} \qquad \text{(I)}$$

Exemplos:

1) Derivar: $y = (\lg x)^x$

$$y' = x (\lg x)^{x-1} \cdot \frac{1}{x} + (\lg x)^x \cdot \lg (\lg x) \cdot 1 =$$

$$= (\lg x)^{x-1} + (\lg x)^x \cdot \lg (\lg x) = (\lg x)^{x-1} [1 + \lg x \cdot \lg (\lg x)]$$

2) Derivar: $y = x^x$

Temos: $y' = x \cdot x^{x-1} \cdot 1 + x^x \lg x \cdot 1 = x^x (1 + \lg x)$

24. Exercícios (Sobre N.os 10 a 23).

Derivar:

1) $y = x^3 - x - 1$

2) $y = -\frac{2}{x}$

3) $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

4) $y = 2xe^x$

5) $y = \sqrt{3t}$

6) $y = \lg x^2$

7) $y = \pi^x$

8) $y = \log_{10}(x^2+1)$

9) $y = x^{x+1}$

10) $y = x - \lg e^x + 2 \operatorname{sen} \pi$

Respostas:

1) $3x^2 - 1$

2) $2/x^2$

3) $\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}$

4) $2e^x(x+1)$

5) $\frac{\sqrt{3t}}{2t}$

6) $2/x$

7) $\pi^x \lg \pi$

8) $\frac{2x}{x^2+1} \log_{10} e$

9) $x^{x+1} \cdot \lg x + (x+1)x^x$

10) zero

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRETAS

25. Derivada do seno. Seja $y = \text{sen } u$, sendo $u = f(x)$ derivável em (a, b).

Dando a x um acréscimo Δx corresponde a u um acréscimo Δu e, portanto, a y um acréscimo Δy.

Então, $\Delta y + y = \text{sen}(u + \Delta u)$

$$\therefore \Delta y = \text{sen}(u + \Delta u) - \text{sen } u$$

Mas, desenvolvendo o segundo membro (trigonometria) vem:

$$\Delta y = 2 \text{ sen } \frac{u + \Delta u - u}{2} \cos \frac{u + \Delta u + u}{2} = 2 \text{ sen } \frac{\Delta u}{2} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$$

Dividindo por Δu temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = 2 \times \frac{\text{sen } \frac{\Delta u}{2}}{\Delta u} \cdot \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) = \left[\frac{\text{sen } \frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}\right] \cdot \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)$$

Achando os limites de ambos os membros, quando $\Delta u \to 0$,

obtemos:

$$\frac{dy}{du} = 1 \times \cos u = \cos u$$

E, de acordo com o N.º 12, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

ou

$$\boxed{y' = \cos u \cdot u'}$$

Exemplos: 1) Derivar $y = \text{sen } x^2$

Temos: $y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

2) Derivar $y = \text{sen}^2 x$

Temos: $y = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x$

26. Derivada do co-seno. Seja $y = \cos u$ sendo $u = f(x)$ derivável em todo campo real.

ou

$$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

Derivando, de acordo com o N.º 25, vem:

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot (0 - u')$$

$$\therefore y' = \text{sen } u \cdot (-u')$$

ou

$$\boxed{y' = -\text{sen } u \cdot u'} \qquad (I)$$

Exemplos: Calcular a derivada de

1) $y = \cos(\lg x)$

Temos: $y' = -\text{sen}(\lg x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\text{sen lg } x}{x}$

2) $y = \cos^2 x \therefore y' = 2 \cos x (-\text{sen } x) = -\text{sen } 2x$

27. Derivada da tangente. Seja $y = \text{tg } u$

ou

$$y = \frac{\text{sen } u}{\cos u}$$

Derivando como um quociente de funções temos:

$$y' = \frac{\cos u (\cos u \cdot u') - \text{sen } u(-\text{sen } u \cdot u')}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u + \text{sen}^2 u}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

ou

$$\boxed{y' = \sec^2 u \cdot u'} \qquad (I)$$

28. Derivada da cotangente. Seja $y = \cot u$.

Podemos pôr $y = \frac{\cos u}{\blacksquare}$

Derivando, obtemos:

$$y' = \frac{\operatorname{sen} u\,(-\operatorname{sen} u \cdot u') - \cos u\,(\cos u \cdot u')}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{-\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'$$

$$y' = -\frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}\,u'$$

ou $$\boxed{y' = -\operatorname{cossec}^2 u \cdot u'} \qquad (I)$$

29. Derivada da secante. Seja $y = \sec u$ ou $y = \frac{1}{\cos u}$

Derivando, vem:

$$y' = \frac{\cos u\,(0) - 1 \cdot (-\operatorname{sen} u \cdot u')}{\cos^2 u} = \frac{\operatorname{sen} u\,u'}{\cos^2 u} = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot u'$$

ou $$\boxed{y' = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'} \qquad (I)$$

30. Derivada da co-secante. Seja $y = \operatorname{cosec} u$ ou $y = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$

Derivando, temos:

$$y' = \frac{\operatorname{sen} u \cdot (0) - 1 \cdot (\cos u \cdot u')}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{-\cos u\,u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -\frac{1}{\operatorname{sen} u} \cdot \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} \cdot u'$$

ou $$\boxed{y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cot} u \cdot u'} \qquad (I)$$

31. Exercícios resolvidos.

1) $y = \operatorname{sen}(x+2)\cos(x-2)$
$y' = \operatorname{sen}(x+2)[-\operatorname{sen}(x-2)] + \cos(x-2)\cos(x+2) =$
$= \cos(x+2)\cos(x-2) - \operatorname{sen}(x+2)\operatorname{sen}(x-2) =$
$= \cos(x+2+x-2) = \cos 2x$

2) $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$

$$y' = \frac{\sec x \cdot \sec^2 x - (\operatorname{tg} x - 1)\sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \frac{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x}{\sec x} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x}{\sec x} = \frac{1}{\sec x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \cos x + \operatorname{sen} x$$

3) $y = \operatorname{sen}^3 \operatorname{tg} x^2$

Temos: $y = (\operatorname{sen} \operatorname{tg} x^2)^3$
$y' = 3\operatorname{sen}^2 \operatorname{tg} x^2 \cdot \sec^2 x^2 \cdot 2x = 6x \operatorname{sen}^2 \operatorname{tg} x^2 \cdot \sec^2 x^2$

32. Exercícios para resolver.

Derivar:

1) $\lg \operatorname{sen} x$
2) $y = e^x \operatorname{sen} x$
3) $y = \frac{\lg \operatorname{tg} x}{2}$
4) $y = \sec x - \lg \cos x$
5) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x$
6) $y = \lg \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{cosec} x$
7) $y = 2\operatorname{sen}(x+a)\cos(x-a) - \operatorname{sen} 2x$

RESPOSTAS:

1) $\operatorname{cot} x$
2) $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$
3) $\operatorname{cosec} 2x$
4) $(\sec x + 1)\operatorname{tg} x$
5) $\frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}$
6) $2\operatorname{cot} x\,(1 - \operatorname{cosec} x)$
7) 0

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

33. Funções inversas. As funções inversas das funções trigonométricas diretas

$$\text{I)} \begin{cases} y = \operatorname{sen} u; & y = \operatorname{tg} u; & y = \sec u \\ y = \cos u; & y = \operatorname{cot} u; & y = \operatorname{cosec} u \end{cases}$$

são, respectivamente, as funções indicadas abaixo:

$$\text{II)} \begin{cases} u = \operatorname{arc\,sen} y; & u = \operatorname{arc\,tg} y; & u = \operatorname{arc\,sec} y \\ u = \operatorname{arc\,cos} y; & u = \operatorname{arc\,cot} y; & u = \operatorname{arc\,cosec} y \end{cases}$$

que significam: u igual ao arco cujo seno ou co-seno, etc... é igual a y.

Como há uma infinidade de arcos que satisfazem qualquer uma das funções (II), então essas funções são multiformes.

Mas, de acordo com a definição de função inversa e para ser possível aplicar a propriedade (N.º 13), teremos que determinar para cada uma dessas funções (II) um intervalo onde elas sejam uniformes.

34. Derivada de arc sen u. Seja a função

$$y = \text{arc sen } u, \quad u = f(x)$$

o domínio de u é $[-1, +1]$ e o de y é $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore u = \text{sen } y$$

e, $$y' = \frac{1}{u'} \text{ ou } \frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

Mas, y é função de função, então (N.º 12)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \therefore y' = \frac{1}{\cos y} \cdot u'$$

E, como $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - u^2}$

temos:

$$\boxed{y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

Observação: O radical de $\sqrt{1-\text{sen}^2 y}$ é positivo porque, pertencendo y a $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos y > 0$.

Exemplo:

$$y = \text{arc sen } \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$u = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \therefore u' = \frac{\frac{2 \text{ sen } x}{4}}{2\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}} = \frac{\text{sen } x}{4\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}$$

$$\therefore y' = \frac{\frac{\text{sen } x}{4\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}}{\sqrt{1 - \frac{1 - \cos x}{2}}} = \frac{\text{sen } x}{4\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{4}}} = \frac{\text{sen } x}{4 \times \frac{\text{sen } x}{2}} = \frac{1}{2}$$

35. Derivada de arc cos u. Seja $y = \text{arc cos } u$, sendo $u = f(x)$

$[-1, +1]$ o domínio de u e $[0, \pi]$ o domínio de y.

De modo análogo ao do N.º 34, temos:

$$u = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{-\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Como y é função de função (N.º 12):

$$\boxed{y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

O sinal do radical é positivo porque para y no intervalo $[0, \pi]$, $\text{sen } y > 0$. Exemplo:

$$y = \text{arc cos } \sqrt{x}, \quad u = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1 - x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

36. Derivada de arc tg u. Seja $y = \text{arc tg } u$, sendo $u = f(x)$, $(-\infty, +\infty)$ o domínio de u e $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ o domínio de y.

De modo análogo ao N.º 34, temos: $u = \text{tg } y$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + u^2}$$

$$\therefore \boxed{y' = \frac{u'}{1 + u^2}}$$

Exemplo:

$$y = \text{arc tg } \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$y' = \frac{\frac{1 - x - (1 + x)(-1)}{(1 - x)^2}}{1 + \frac{(1 + x)^2}{(1 - x)^2}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

37. Derivada de arc cot u. Seja $y = \text{arc cot}\, u$, sendo $u = f(x)$, $(-\infty, +\infty)$ o domínio de y e $(0, \pi)$ o domínio de y.

Temos: $u = \cot y$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+u^2}$$

$$\boxed{y' = -\frac{u'}{1+u^2}}$$

Exemplo:

$$y = \text{arc cot}\, \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2+1}$$

38. Derivada de arc sec u. Seja $y = \text{arc sec}\, u$ sendo $u = f(x)$, $(-\infty, -1]$ e $[+1, +\infty)$ o domínio de u e $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ o domínio de y.

Temos: $u = \sec y$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$$

o sinal do radical é sempre o sinal de $\operatorname{tg} y$.

$$\therefore \boxed{y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$$

Exemplo:

$$y = \text{arc sec}\, e^x \quad \therefore \quad y' = \frac{e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

39. Derivada de arc cosec u. Seja $y = \text{arc cosec}\, u$, sendo $u = f(x)$, $(-\infty, -1]$ e $[+1, +\infty)$, o domínio de u e $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right]$ o domínio de y.

Temos: $u = \operatorname{cosec} y$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{-\operatorname{cosec} y \cot y} = -\frac{1}{u\sqrt{y^2-1}}$$

$$\therefore \boxed{y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$$

o radical tem o sinal $\cot y$.

Exemplo: $y = \text{arc cosec}\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \quad u' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\ y' = -\frac{\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}-1}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

40. Derivações sucessivas. A derivada $f'(x)$ de $y = f(x)$ é, em geral, uma função de x. Pode acontecer que $f'(x)$ seja derivável e sua derivada seja $f''(x)$.

$f''(x)$ chama-se *derivada segunda* de $f(x)$.

E indicamos, também, com as notações y'' ou $\frac{d^2y}{dy^2}$

Se ainda a função $f''(x)$ for derivável, a sua derivada $f'''(x)$ chama-se *derivada terceira* de $f(x)$. E assim sucessivamente definiremos a *função derivada* ou apenas *derivada de ordem n* ou *derivada enésima* de $f(x)$. E indicamos por $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$.

Exemplos:

1) Qual a derivada segunda de $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$?

Temos: $y' = 3x^2 - 4x + 3$ e $y'' = 6x - 4$

2) Qual a derivada terceira de $y = \operatorname{sen} x$?

Temos:

$$y' = \cos x,\ y'' = -\operatorname{sen} x \text{ e } y''' = -\cos x$$

3) A derivada enésima de $y = e^x$ é $y^{(n)} = e^x$

41. Quadro sinótico das regras de derivação.
(u, v e z são funções de x; a, m e k são constantes)

FUNÇÕES	DERIVADAS
1) $y = k$ (constante)	$y' = 0$
2) $y = x$	$y' = 1$
3) $y = F(u),\ u = f(x)$ (Função de função)	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
4) $y = f(x)$ (Função inversa)	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$
5) $y = u + v - z$	$y' = u' + v' - z'$
6) $y = ku$	$y' = ku'$
7) $y = uv$	$y' = uv' + vu'$
8) $y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
9) $y = u^m$ (m real qualquer)	$y' = m\,u^{m-1} \cdot u'$
10) $y = \sqrt[m]{u}$ (m inteiro)	$y' = \dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}} = \dfrac{u'}{u} \cdot \dfrac{\sqrt[m]{u}}{m}$
11) $y = a^u$ ($a > 0$)	$y' = a^u \lg a\, u'$
12) $y = e^u$ (número neperiano)	$y' = e^u u'$
13) $y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e = \dfrac{u'}{u \lg_a}$
14) $y = \lg u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
15) $y = u^v$ ($u > 0$)	$y' = vu^{v-1} \cdot u' + u' \lg u \cdot v'$
16) $y = \operatorname{sen} u$	$y' = \cos u \cdot u'$

(continua)

(continuação)

FUNÇÕES	DERIVADAS
17) $y = \cos u$	$y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$
18) $y = \operatorname{tg} u$	$y' = \sec^2 u \cdot u'$
19) $y = \operatorname{cot} u$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$
20) $y = \sec u$	$y' = \sec u \operatorname{tg} u\, u'$
21) $y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cot} u \cdot u'$
22) $y = \operatorname{arc\,sen} u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
23) $y = \operatorname{arc\,cos} u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
24) $y = \operatorname{arc\,tg} u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
25) $y = \operatorname{arc\,cot} u$	$y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
26) $y = \operatorname{arc\,sec} u$	$y' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
27) $y = \operatorname{arc\,cosec} u$	$y' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

42. Exercícios resolvidos.

1) Calcular o valor da derivada de $y = \operatorname{sen}(x+1)\cos(x-1)$ no ponto $x = 0$.

Temos: $y' = \cos 2x \quad \therefore \quad y'_0 = \cos 0 = 1$

2) Determine o valor da derivada de $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x}{1-x}$ no ponto $x = 1$.

Temos: $y' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \therefore \quad y'_1 = \dfrac{1}{2}$

3) Calcular o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2 - 5x + 7$ no ponto de abscissa $x = 3$.

O coeficiente angular da tangente a uma curva de equação $y = f(x)$, em um ponto de abscissa x_0, é o valor da derivada de $f(x)$ no ponto x_0 (N.º 4).

Então, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) \quad y' = 2x - 5$

e o coeficiente angular é $y'_3 = 6 - 5 = 1$.

4) Qual a inclinação da curva $y=10^x$ no ponto $x=2$?
(E. Naval – C. Prévia, 4.ª P. Parcial – 16/9/52).

A inclinação da curva em um ponto é a inclinação da tangente à curva nesse ponto.

Então, temos:

$$y' = 10^x \cdot \lg 10 = \frac{10^x}{\log_{10} e} \quad \therefore \quad y'_2 = \frac{100}{\log_{10} e} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\therefore \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{100}{\log_{10} e} \cong 89° 45'$$

5) Calcular $\dfrac{1+f'(0)}{F'(1)}$

Sendo $f(x) = \operatorname{sen}^3(\sqrt{1+x^3})$

e $F(x) = \sqrt{2x-1} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$
(E. N. Engenharia – 1948).

$$f'(x) = \frac{3x \operatorname{sen}^2 \sqrt{1+x^3}}{\sqrt{1+x^3}} \cdot \cos \sqrt{1+x^3} \quad \therefore \quad f'(0) = 0$$

Como $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$ é uma constante, temos:

$$F'(x) = (2x-1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{x} (2x-1)^{-1} - \frac{1}{x^2} \lg (2x-1) \right]$$

logo, $F'(1) = (2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot [2(2-1)^{-1} - 1 \cdot \lg (2-1)] = 1 \cdot [2-0] = 2$

Então, $\dfrac{1+f'(0)}{F'(1)} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$

6) Derivar $y = \operatorname{sen}^3 x^2$

ou $y = (\operatorname{sen} x^2)^3 \quad \therefore \quad y' = 3 (\operatorname{sen} x^2)^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x^2 = 6x^2 \operatorname{sen}^2 x^2 \cos x^2$

7) Derivar $y = \operatorname{tg} \operatorname{sen} 2x$

$y' = \sec^2 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$

$y' = 2 \cos 2x \cdot \sec^2 \operatorname{sen} 2x$

8) Calcular a equação da tangente à curva $y=x^2+1$ no ponto de abscissa $x=1$.

O ponto de tangência é (1, 2). O coeficiente angular da tangente é o valor da derivada para $x=1$, então temos: $y'_1 = 2 \times 1 = 2$ e a equação da tangente será:

$$y-2 = 2(x-1) \quad \text{ou} \quad 2x-y = 0$$

9) Determinar um valor aproximado de $\sqrt[3]{8,0857}$.

Se $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, então $\sqrt[3]{8,0857} = f(8,0857)$.

De acordo com o N.º 8 (Observação):

$$\sqrt[3]{8,0857} = y + \Delta y = (8,0857)^{\frac{1}{3}}$$

ou, aproximadamente, $y + dy = (8,0857)^{\frac{1}{3}}$

$$y = \sqrt[3]{8} = 2$$

e $dy = y'dx = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8^{2/3}} \cdot 0,0857 = \frac{0,0857}{12} = 0,007\,14$

$$\therefore \quad y + dy = 2,007\,14$$

(Por logaritmos o aluno achará uma raiz cúbica bem aproximada)

43. Exercícios para resolver.

1) Calcule a derivada da função $y=x^3-1$ aplicando a definição de derivada.

Calcule as derivadas das seguintes funções:

2) $y = e^x + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$
3) $y = x^3 - x^2 + 3$
4) $y = ax^4 - bx$
5) $y = x - \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{4}$
6) $y = \frac{2}{3} x^4$
7) $y = x^{n+1}$
8) $y = \frac{2x^3}{3}$
9) $y = \frac{x^m}{m}$
10) $y = \frac{1}{x^m}$
11) $y = \frac{1-x}{1+x}$
12) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$
13) $y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$
14) $y = \sqrt{2x}$
15) $y = \sqrt{x^2+1}$
16) $y = \operatorname{sen} x^2$
17) $y = \operatorname{sen}^2 x$
18) $y = \cos(3x^2+x)$
19) $y = \operatorname{tg} 2x$ (UEG – 1972).
20) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$
(Fac. Eng. UEG – 1969).
21) $y = \sqrt[3]{x^2}$
(Fac. Eng. UEG – 1968).
22) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
23) $y = 2 \operatorname{sen} x$
24) $y = e^{x^2}$
(Fac. Eng. UEG – 1968).
25) $y = \lg x^4$
26) $y = \lg \frac{e^x}{e^x+1}$
27) $y = \log_e (x + \sqrt{x^2-1})$
(PUC – 1968).
28) $y = \log_x x$
29) $y = \log_{10} \operatorname{sen} x$
30) $y = x^x$
31) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
(E. Eng. Mackenzie – S. Paulo – 1941).
32) $y = \lg \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$
(E. Eng. Mackenzie – S. Paulo – 1947).
33) $y = (\cos x)^x$
34) $y = e^{x^2}$

35) $y = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}} e}$

36) $y = \frac{2x}{\lg^2 3x}$

(E. N. Química – 1958).

37) $y = (3x^2+2)\sqrt{1+5x^2}$

38) $y = \frac{(x-1)^2}{x^{\frac{1}{2}}}$

(C. Pedro II, Ext., Centro – 1.ª P. Parcial – 1962).

39) $y = x^3 \operatorname{arc\,tg} x$

(E. Eng. Mackenzie – S. Paulo – 1943)

40) $y = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3}$

41) $y = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x}$

42) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}$

43) $y = \operatorname{arc\,cot} \frac{1}{x} + \lg \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

44) $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

45) $y = \operatorname{arc\,sec} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

46) $y = \operatorname{arc\,cossec} \sec x$

Calcule a derivada de 2.ª ordem das funções:

47) $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$

48) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$

Calcule o valor das derivadas das funções abaixo no ponto de abscissa $x = -1$

49) $y = x^3 - 3x^2 - x - 1$

50) $y = e^{-x} + ex - \log_{10} e$

Calcule o coeficiente angular das tangentes às curvas abaixo indicadas, no ponto de abscissa $x = 2$

51) $y = x^4 + x + 1$

52) $y = \sqrt{x-1}$

53) Calcule a inclinação da tangente à curva, de equação abaixo indicada, no ponto de abscissa $x = 0$

$y = x^3 + x + 3$

54) Sendo $y = f(\sqrt{1-\cos x})$, dê a expressão de $\frac{dy}{dx}$.

(F. Eng. da U. Rio de Janeiro – 30/5/61).

55) Calcule o valor de $\frac{F'(1)}{f'(1)}$ sendo $f(x) = e^x$ e $F(x) = (2x-1)\,e^{x^2-x+1}$

(E. P. U. C. – 1966).

56) Sendo $f(x) = e^{\operatorname{sen} 4x}$, calcular $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(E. Flum. Eng. – 1969).

57) $y = \operatorname{arc\,cos} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

(E. Sup. Agronomia – Pernambuco – 1948).

58) Calcule a função derivada de 1.ª ordem da função

$y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1-x^2}$

(E. N. Engenharia – 1939).

59) Se $f'(a) = -1$, qual é a inclinação da curva representativa de $y = f(x)$ no ponto de abscissa $x = a$?

(E. Naval – 12/3/32).

60) Calcule a derivada da função $y = e^{-x} \log_e x$

(UFF – 1971).

61) Diferencie a função $y = (1+2x)^5$

E. Eng. Mackenzie – S. Paulo – 1940).

62) Determine dy da função $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

(E. Engenh. Mackenzie – S. Paulo – 1942).

63) Ache a derivada da função $y = \frac{x}{\sqrt{m - nx^2}}$ reduzindo-a à forma mais simples.

(E. Técnica do Exército – 1945)

64) A derivada primeira de $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2-1}$ é igual a .....

(Fac. Flum. Engenharia – 1967).

65) Qual o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^3 - 12x^{1/2} + 4$, no ponto de abscissa 8?

(UFRJ – 1970).

66) A equação da tangente à curva $y = x^3$ no ponto $x = 1$ é

MACK – 73 – S. P.).

67) Calcule, com auxílio da diferencial, um valor aproximado de $\sqrt[4]{37}$

68) Sendo $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$, calcule $f'(2)$

(U.E.G. – 1972).

69) Sendo $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x$, calcule $f''''\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(Fac Eng. UEG – 1963).

70) Calcule o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^{1/3} - \frac{1}{3}x + 2$ no ponto cuja abscissa é 8.

(Engenharia – 1966 – GB).

RESPOSTAS

1) $y' = 2x$
2) e^2
3) $3x^2 - 2x$
4) $4ax^3 - b$
5) 1
6) $2x^2$
7) $y' = (a+1)x^a$
8) $2x^2$

9) x^{m-1}

10) $-\frac{m}{x^{m+1}}$

11) $-\frac{2}{(x+1)^2}$

12) $\frac{-2\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$

13) x^m

14) $\frac{1}{\sqrt{2x}}$

15) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

16) $2x\cos x^2$

17) $\operatorname{sen} 2x$

18) $-\operatorname{sen}(3x^2+x)\,.\,(6x+1)$

19) $2\sec^2 2x$

20) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^3 x$

21) $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$

22) $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

23) $2^{\operatorname{sen} x}\lg 2\,.\,\cos x$

24) $2x\,.\,e^{x^2}$

25) $\frac{4}{x}$

26) $\frac{1}{x^2+1}$

27) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

28) $\frac{\log_e 4}{x}$

29) $\operatorname{cotg} x\log_{10} e$

30) $x^x(\lg x+1)$

31) $-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{(x^2+a^2)^2}$

32) $\sec x$

33) $(\cos x)^{x-1}\,.\,[\cos x\lg\cos x-x\operatorname{sen} x]$

34) $e^{x^x}(1+\lg x)x^x$

35) 0

36) $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 2x}\cdot\left(1-\frac{12x}{\operatorname{sen} 6x}\right)$

37) $\frac{45x^4+16x}{\sqrt{1+5x^2}}$

38) $\frac{8x^3-15x^2+6x+1}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

39) $\frac{x^2}{1+x^2}+2x\,.\,\operatorname{arc\,tg} x$

40) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

41) $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

42) $\frac{2}{x^2+4}$

43) $\frac{2x^2}{x^4-1}$

44) $\frac{1}{2}$

45) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

46) -1

47) $12x^2-6$

48) $\cos x-\operatorname{sen} x$

49) -5

50) 0

51) 33

52) 0,5

53) 45°

54) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos x}$

55) 3

56) $4a^3$

57) $\frac{2}{x^2+1}$

58) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-1}$

59) 135°

60) $e^{x}\left(\frac{1}{x}\quad\log_e x\right)$

61) $10(1+2x)^4\,dx$

62) $-x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\,dx$

63) $\frac{m}{\sqrt{(m-nx^2)^3}}$

64) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

65) 15

66) $y=3x-2$

67) 2,062 5

68) $-\frac{1}{16}$

69) -8

70) $-\frac{1}{4}$

APLICAÇÃO DA TEORIA DAS DERIVADAS AO ESTUDO DA VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

44. Funções crescentes e decrescentes. Já vimos as definições de funções crescente e decrescentes em um intervalo.

Vejamos agora, as representações geométricas de uma função *crescente* (fig. 12) e de uma função *decrescente* (fig. 13),

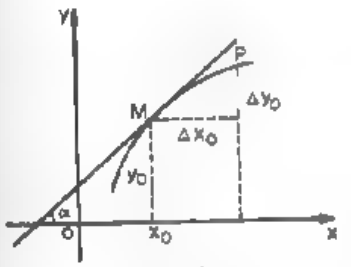


FIG. 12

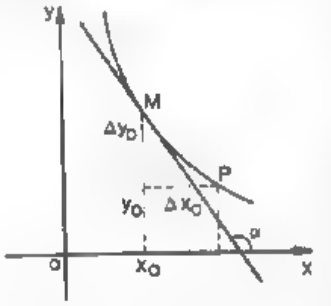


FIG. 13

examinando, também, a inclinação dessas curvas representativas.

Seja uma função $y=f(x)$ definida em (a, b) e sejam M e P, de abscissas x_0 e $x=x_0+\Delta x_0$, dois pontos de sua curva representativa.

I) Na figura 12, todo ponto P, à direita de M $[x_0, f(x_0)]$ tem sua abscissa $x>x_0$, pois $\Delta x_0>0$, e também sua

9) x^{m-1}

10) $-\frac{m}{x^{m+1}}$

11) $-\frac{2}{(x+1)^3}$

12) $\frac{-2\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$

13) x^m

14) $\frac{1}{\sqrt{2x}}$

15) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

16) $2x\cos x^2$

17) $\operatorname{sen} 2x$

18) $-\operatorname{sen}(3x^2+x)\,.\,(6x+1)$

19) $2\sec^2 2x$

20) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^3 x$

21) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3x}$

22) $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

23) $2^{\operatorname{sen} x}\lg 2\,.\,\cos x$

24) $2x\,.\,e^{x^2}$

25) $\frac{4}{x}$

26) $\frac{1}{x^2+1}$

27) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

28) $\frac{\log_a e}{x}$

29) $\operatorname{cotg} x\log_{10} e$

30) $x^x(\lg x+1)$

31) $-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{(x^2+a^2)^2}$

32) $\sec x$

33) $(\cos x)^{x-1}\,.\,[\cos x\lg\cos x - x\operatorname{sen} x]$

34) $e^{x^x}(1+\lg x)x^x$

35) 0

36) $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 3x}\,.\left(1-\frac{12x}{\operatorname{sen} 6x}\right)$

37) $\frac{45x^2+16x}{\sqrt{1+5x^2}}$

38) $\frac{8x^3-15x^2+6x+1}{8x\sqrt{x}}$

39) $\frac{x^2}{1+x^2}+2x\,.\operatorname{arc\,tg} x$

40) $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

41) $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

42) $\frac{2}{x^2+4}$

43) $\frac{2x^2}{x^4-1}$

44) $\frac{1}{2}$

45) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

46) -1

47) $12x^2-6$

48) $\cos x-\operatorname{sen} x$

49) -5

50) 0

51) 33

52) 0,5

53) 45°

54) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos x}$

55) 3

56) $4e^2$

57) $\frac{2}{x^2+1}$

58) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-1}$

59) 135°

60) $e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\log_e x\right)$

61) $10(1+2x)^4\,dx$

62) $-\frac{1}{3}(a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\,dx$

63) $\frac{m}{\sqrt{(m-nx^2)^3}}$

64) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

65) 15

66) $y=3x-2$

67) 2,062 5

68) $-\frac{1}{16}$

69) -8

70) $-\frac{1}{4}$

APLICAÇÃO DA TEORIA DAS DERIVADAS AO ESTUDO DA VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

44. Funções crescentes e decrescentes. Já vimos as definições de funções crescente e decrescentes em um intervalo.

Vejamos agora, as representações geométricas de uma função *crescente* (fig. 12) e de uma função *decrescente* (fig. 13),

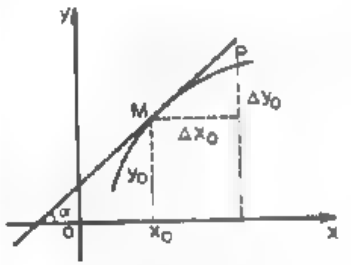


FIG. 12

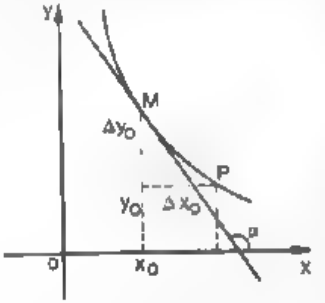


FIG. 13

examinando, também, a inclinação dessas curvas representativas.

Seja uma função $y=f(x)$ definida em (a, b) e sejam M e P, de abscissas x_0 e $x=x_0+\Delta x_0$, dois pontos de sua curva representativa.

1) Na figura 12, todo ponto P, à direita de M $[x_0, f(x_0)]$ tem sua abscissa $x>x_0$, pois $\Delta x_0>0$, e também sua

ordenada $y=f(x_0)+\Delta y_0>f(x_0)$, pois $\Delta y_0>0$, então, a função é crescente e a razão $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ é positiva, e, portanto, $\lim \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=f'(x_0)>0$, o que verificamos, notando que a tangente à curva, em M, tem seu coeficiente angular $m>0$, pois $m=\operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha<90°$).

Concluímos, então, que, quando a função é *crescente*, *a sua derivada é positiva.*

II) Na figura 13, todo ponto P, à direita de M (x_0, y_0) tem sua abscissa $x>x_0$, pois $\Delta x_0>0$, mas, sua ordenada $y<y_0=f(x_0)$, pois $\Delta y_0<0$, então, a função é *decrescente.* A razão $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}<0$ e, portanto, $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}=f'(x_0)<0$, o que verificamos notando que a tangente geométrica à curva, no ponto M, tem seu coeficiente angular $m=\operatorname{tg}\alpha<0$, pois α, neste caso, é do 2.º quadrante.

Concluímos, então, que, quando a função é *decrescente*, *a sua derivada é negativa.*

Observação: É fácil de verificar, também, que se a função $y=f(x$ é derivável em (a, b) se em cada ponto x_0, de (a, b), se tiver:

1.º) $f'(x_0)>0$ a função é *crescente;*
2.º) $f'(x_0)<0$ a função é *decrescente.*

45. Máximos e mínimos relativos. Seja uma função $y=f(x)$, definida em um intervalo (a, b).

Diz-se que a função $y=f(x)$ passa por um *máximo* (relativo), num ponto x_0 de (a, b), ou que o valor que toma a função, em x_0, é um máximo (relativo) de $y=f(x)$ se fixado $\varepsilon>0$, arbitrariamente pequeno, se tenha

$$f(x)<f(x_0) \quad \text{para} \quad |x-x_0|<\varepsilon$$

isto é, quando o valor da função, $f(x_0)$, for maior do que qualquer outro valor de $f(x)$ para $|x-x_0|<\varepsilon$.

De modo análogo define-se *mínimo relativo.*

Observações:

1.º) Quando quisermos nos referir a máximos ou mínimos relativos, diremos apenas *máximos e mínimos.*

2.º) Os valores de máximo (relativo) ou de mínimo (relativo) de uma função denominam-se *extremos*; o ponto x_0 onde a função é um extremo chama-se um *extremante* (maximante ou minimante).

3.º) Em um ponto x_0, extremante da função ela não pode ser crescente nem decrescente.

4.º) Em um intervalo (a, b) *podem existir* vários ou infinitos valores x_i para os quais a função tenha valores extremos (relativos).

5.º) Um máximo ou mínimo, relativos, de uma função, definida em (a, b), geralmente não é o maior ou menor valor da função em (a, b). E um máximo pode ser menor do que um mínimo (fig. 14 — M_1 e P).

46. Representação geométrica dos máximos e mínimos. Seja uma função $y=f(x)$ cuja curva representativa é C (fig. 14) e uma curva $y=g(x)$ cuja curva representativa é C'.

Quando uma curva passa por um máximo, como em M, M_1 e M_2 (fig. 14) as ordenadas correspondentes são maiores do que aquelas que a precedem e seguem, imediatamente (N.º 44 — I).

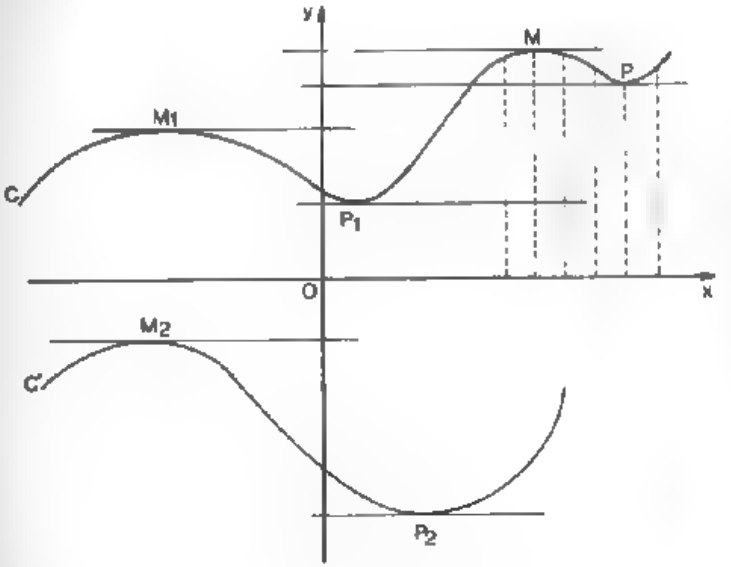


FIG. 14

Quando uma curva passa por um mínimo como em P, P_1 e P_2 (fig. 14) as ordenadas correspondentes são menores do que aquelas que a precedem e seguem, imediatamente (N.º 44 — II).

As tangentes às curvas nos extremos são paralelas aos eixos dos x, isto é, tg $\alpha = 0$, e a função não é crescente nem decrescente nesse ponto (N.º 45 — Obs. 3).

É fácil, pois, de concluir que, *num ponto extremo a derivada da função é nula.*

47. Sinal da derivada segunda. A conclusão anterior não é suficiente para afirmar se o ponto é de máximo ou mínimo.

Estudemos o sinal da derivada segunda da função a fim de possibilitar o cálculo dos pontos extremos.

a) Determinação do máximo. Seja $y = f(x)$ uma função definida em (a, b) e admitindo um máximo em um ponto de (a, b). Seja, por exemplo (fig. 14) M_1 esse ponto.

O valor x_0 que torna máximo a função y, anula y', e, portanto, nesse intervalo onde a função y é crescente até M_1 e depois decrescente, y' passa de positiva para negativa. Então, se a função y', em (a, b), era positiva, se anulou e depois passou a negativa y' é decrescente em (a, b), logo, (N.º 44), sua derivada $y'' < 0$.

> Então, um valor x_0 de (a, b) que anule $f'(x)$ e torne $f''(x) < 0$ é um ponto máximo de $f(x)$.

Quando $f''(x_0) < 0$ a curva volve a *concavidade* para baixo no ponto x_0.

b) Determinação do mínimo. Seja a função $y = f(x)$ definida em (a, b) e admitindo um mínimo em um ponto de (a, b).

Seja, por exemplo (fig. 14), P_1 esse ponto.

O valor x_0 que torna mínimo a função, anula y', e, portanto, nesse intervalo, onde a função decresce até P_1, se anula em P_1 e em seguida cresce, a derivada y' é negativa,

se anula e após torna-se positiva, então, a função y' é crescente nesse intervalo e, portanto (N.º 46) sua derivada $y'' > 0$, nesse intervalo.

> Logo, um valor x_0 de (a, b) que anule $f'(x)$ e torne $f''(x) > 0$ é ponto de mínimo.

Quando $f''(x_0) > 0$ a curva volve a *concavidade* para cima no ponto x_0

48. Pontos de inflexão. Demonstra-se que se x_0 anula $f'(x)$ e $f''(x)$, podendo mesmo ocorrer que anule $f'''(x), \ldots,$ se $f^{(n)}(x)$ é a primeira derivada que não se anula para $x = x_0$, se tem:

$$n \text{ par} \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \ldots \text{mínimo} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \ldots \text{máximo} \end{cases}$$

$$n \text{ ímpar} \begin{cases} f^{(n)}(x_0) \neq 0 \ldots \text{ponto de inflexão.} \end{cases}$$

Chama-se *ponto de inflexão*, ao ponto onde a curva não volve a concavidade nem para baixo nem para cima, isto é, onde a derivada segunda é nula.

Num ponto de inflexão, a curva é cortada pela tangente, nesse ponto. Exemplo:

A parábola cúbica (fig. 15), cuja equação representativa é $y = x^3$, tem, no ponto $x = 0$, um ponto de inflexão.

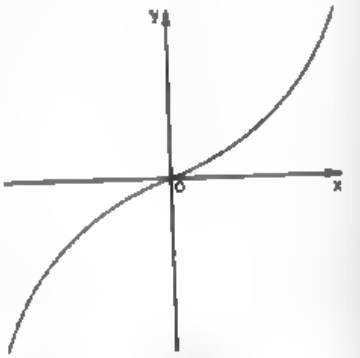


FIG. 15

49. Determinação dos extremantes e extremos. Podemos, resumindo, estabelecer a seguinte regra para a determinação dos máximos ou mínimos de uma função derivável em (a, b) e com derivadas sucessivas finitas.

Regra:

1.º) Calculamos as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$

2.º) Achamos as raízes x_1 da equação $f'(x) = 0$

3.º) Calculamos $f''(x_1)$, e se:

a) $f''(x_i) > 0$, x_i é um valor que torna *mínimo*;

b) $f''(x_i) < 0$, x_i é um valor que torna *máximo*;

c) $f''(x_i) = 0$, calcula-se n, que é a ordem da primeira derivada: $f^{(n)}(x_i) \neq 0$ e se tem um mínimo, máximo ou ponto de inflexão, conforme vimos nos Nºs 47 e 48.

Esta regra pode ser resumida no seguinte quadro:

$$f'(x_i) = 0 \begin{cases} f''(x_i) > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ mínimo} \\ f''(x_i) < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ máximo} \\ f''(x_i) = 0 \begin{cases} n \text{ par} \begin{cases} f^{(n)}(x_i) > 0. & \text{mínimo} \\ f^{(n)}(x_i) < 0. & \text{máximo} \end{cases} \\ n \text{ ímpar} \quad f^{(n)}(x_i) \neq 0. \quad \text{ponto inflexão} \end{cases} \end{cases}$$

50. Observação. Quando o cálculo de $f''(x)$ é muito laborioso, ou mesmo em outros casos, podemos determinar se x_i é *maximante* ou *minimante*, bastando para isso verificar a variação do sinal da derivada $f'(x)$.

Se em x_i, $f'(x)$ passa de positiva para negativa, $f(x_i)$ é *máximo*. Se em x_i, $f'(x)$ passa de negativa para positiva, $f(x_i)$ é *mínimo*. Isto é, se para valores à esquerda de x_i, $f'(x) > 0$, e para valores à direita de x_i, $f'(x) < 0$, $f(x_i)$ é *máximo*; e, se à esquerda de x_i, $f'(x) < 0$ e à direita de x_i, $f'(x) > 0$, $f(x_i)$ é *mínimo*.

Esta maneira de proceder constitui uma outra regra para determinação dos extremos e, geralmente, é a mais indicada, pois oferece menor trabalho, além de permitir a determinação dos extremos de $f(x)$ em condições que a 1.ª regra não permitia.

Pode ser resumida assim:

1.º) Acham-se os valores x_i que anulam $f'(x)$.

2.º) Se $f'(x)$ tem nas proximidades de x_i um sinal constante negativo para $x < x_i$ e um sinal constante positivo para $x > x_i$, x_i é *minimante*; se, ao contrário, $f'(x)$ é positiva para $x < x_i$ e negativa para $x > x_i$ então x_i é *maximante*.

51. Exercícios resolvidos sobre máximos e mínimos.

1) Achar os extremantes da função: $y = x^2 - 2x + 3$.

Temos (de acordo com a regra do N.º 49):

a) $y' = 2x - 2$ $\qquad y'' = 2$

b) $2x - 2 = 0$ $\qquad \therefore\ x_1 = 1$

c) Como $y'' > 0$, sempre, então, $x_1 = 1$ é um *minimante*. (O mínimo da função é $y_1 = 1 - 2 + 3 = 2$).

NOTA: De modo análogo poderemos estudar a variação do valor de qualquer trinômio do 2.º grau.

2) Achar os extremos da função: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 17$.

Temos (de acordo com a regra do N.º 49):

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$ e $y'' = 6x - 12$

b) $3x^2 - 12x + 9 = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\therefore\ x_1 = 3$ e $x_2 = 1$

c) $y''_1 = 6 - 12 = -6$; logo, 1 é um *maximante*.

$y''_3 = 18 - 12 = +6$; logo, 3 é um *minimante*.

O máximo da função é $y_1 = 1 - 6 + 9 - 17 = -13$.

O mínimo da função é $y_3 = 27 - 54 + 27 - 17 = -17$.

3) Achar os extremos da função $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 17$, sem calcular sua derivada segunda.

Temos (de acordo com a regra do N.º 50):

1.º) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ ou $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$

2.º) É fácil de ver que, no ponto $x = 1$, $f'(x)$ passa de positiva para negativa; logo, $f(1)$ é um *máximo*.

E, no ponto $x = 3$, $f'(x)$ passa de negativa para positiva; logo, $f(3)$ é um *mínimo*.

4) Achar os extremantes da função $y = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 5$

a) $y' = 6x^2 - 24x + 24$ e $y'' = 12x - 24$

b) $x_1 = x_2 = 2$

c) $y''_2 = 0$ e $y''' = 12$

n ímpar, $y''' \neq 0$, então, 2 é um ponto de inflexão.

A função não tem extremantes.

5) Achar os extremantes da função

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 1$$

Temos (N.º 50)

1.º) $f'(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$

2.º) É fácil de ver que $f'(x)$, no ponto $x=0$ ou no ponto $x=1$, não muda de sinal pois na proximidade de $x=0$ ou $x=1$, $f'(x)$ é sempre positiva.

Então, $x=0$ e $x=1$ são pontos de inflexão.

6) Achar os extremantes da função $y = x^3 + 3x^2 + 15x - 2$.

Temos (N.º 49):

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 15$ e $f''(x) = 6x + 6$

b) $3x^2 + 6x + 15 = 0$ ou $x^2 + 2x + 5 = 0$
cujas raízes não existem no campo real.

c) Não é possível verificar o sinal de $f''(x)$.

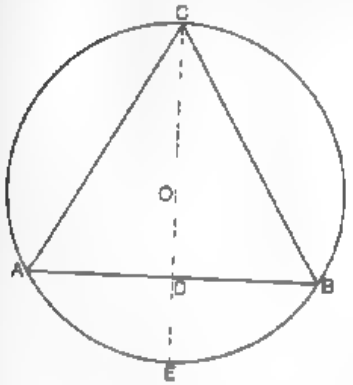


FIG. 16

Dizemos então que a função não tem máximos nem mínimos.

A regra do N.º 52 também confirma esse resultado, pois, não há valores reais que anulem $f'(x)$ nem valores onde $f'(x)$ apresente descontinuidade pois $f'(x)$ é contínua em todo campo real.

7) Dividir um número N em duas partes tais, que o seu produto seja máximo

Sejam x e $N-x$ essas partes.

Achemos o máximo da função:

$$y = x(N-x) = -x^2 + Nx$$

a) $y' = -2x + N$ e $y'' = -2$

b) $-2x + N = 0 \quad \therefore \quad x_1 = \frac{N}{2}$

c) Como $y'' < 0$, sempre, $x_1 = \frac{N}{2}$ é um *maximante*. Logo, o número deve ser dividido em partes iguais.

8) Qual o triângulo isósceles de maior área que se pode inscrever num círculo dado?

Seja ABC um triângulo isósceles de altura x inscrito em um círculo de raio R (fig. 16).

Sua área será:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = AD \times CD$$

Mas, $CD = x$ e $AD^2 = x(2R - x)$
("Relação métrica no círculo" — C. Ginasial)

Temos então a função:

$$S = x \cdot \sqrt{x(2R-x)}$$

ou $$S = \sqrt{2Rx^3 - x^4}$$

Achemos, então, os extremos da função $S = f(x) = \sqrt{2Rx^3 - x^4}$

Temos: $$S' = \frac{6Rx^2 - 4x}{2\sqrt{2Rx^3 - x^4}} = \frac{x(3R - 2x)}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

É fácil de ver que $S' = 0$ para $x(3R - 2x) = 0$, isto é, para $x = 0$ ou $x = \frac{3R}{2}$, mas, se $x = 0$ não satisfaz, então, no nosso caso, $x = \frac{3R}{2}$ é o valor que anula S'.

Como para $x < \frac{3R}{2}$, $S' > 0$ e para $x > \frac{3R}{2}$ $S' < 0$, então, no ponto $x = \frac{3R}{2}$, S' passa de positivo para negativo e, portanto, $x = \frac{3R}{2}$ é um *maximante* (N.º 50).

E o máximo é $S = \sqrt{2Rx^3 - x^4} = x\sqrt{x(2R-x)} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

E como $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ é a área do triângulo equilátero, então o triângulo procurado é *equilátero*.

52. Estudo da variação de funções. Para o estudo da variação de funções de uma variável real, podemos, de acordo com o que acabamos de estudar nos itens anteriores, estabelecer a seguinte marcha:

a) determina-se o campo de definição da função;

b) calcula-se a derivada da função e estuda-se o sinal dessa derivada, determinando nos intervalos de continuidade os valores da variável que anulam a derivada;

c) acham-se os máximos, mínimos ou pontos de inflexão;

d) verificamos os intervalos onde a função é crescente ou decrescente;

e) acham-se os valores particulares da função nos pontos $x=0$, $x = \pm\infty$ e nos pontos onde ela se anula (quando possível);

f) faz-se um quadro com um resumo geral dos resultados encontrados e com o seu auxílio faz-se a representação gráfica da função.

Vejamos a seguir dois exercícios exemplificando esse estudo.

53. Exercício.

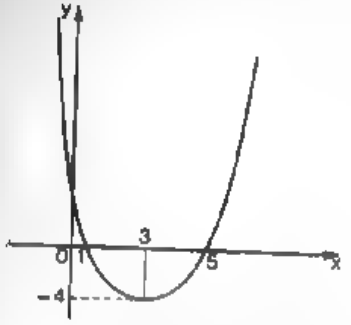


FIG. 17

Estudar a variação da função:

$y = f(x) = x^2 - 6x + 5$

a) Campo de definição: $(-\infty, +\infty)$.

b) Não apresenta pontos de descontinuidade.

c) $y' = 2x - 6$ $2x - 6 = 0$ $\therefore$ $x = 3$

d) $y'' = 2$ logo, $x = 3$ é um mínimante

e) $y' > 0$ para $2x - 6 > 0$ $\therefore$ $x > 3$
$y' < 0$ para $x < 3$

A função é, pois, *decrescente* em $(-\infty, 3)$ e *crescente* em $(3, +\infty)$

f) $f(0) = 5$, $f(5) = 0$ e $f(1) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

g)

x	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	3	↗	5	↗	$+\infty$
y'		−	−	−	−	−	0	+	+	+	
y	$+\infty$	↘	5	↘	0	↘	−4	↗	0	↗	$+\infty$

Gráfico (fig. 17)

54. Outro exercício.

Estudar a variação da função

$$y = \frac{x}{x-1}$$

a) Campo de definição: $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$

b) É descontínua no ponto $x = 1$

c) $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ não há valores que anulem y'

d) $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ não há pontos de inflexão, pois sempre $y'' \neq 0$.

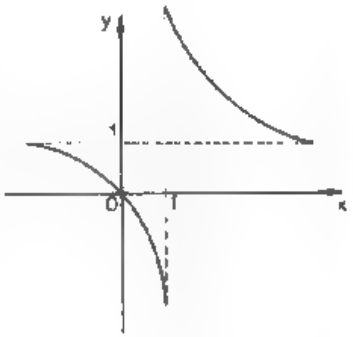


FIG. 18

e) $y' < 0$, sempre, logo, a função é sempre decrescente.
Para $x < 1$, $f''(x) < 0$, e a curva volve a concavidade para baixo.
Para $x > 1$, $f''(x) > 0$, e a curva volve a concavidade para cima.

f) $f(0) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

g)

x	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
y'		−	−1	−	∞	−	
y	1	↘	0	↘	∞	↘	1

Gráfico (fig. 18)

55. Questões de concursos resolvidas.

I) Sendo $m = \frac{3^h + 1}{2}$ exprimir h, explicitamente como função de m determinar os valores de m que tornam h negativo.

Dizer em seguida se, para esses valores de m, a função $y = \frac{mx + 10}{x + m - 3}$ é *crescente* ou *decrescente*, justificando a resposta.

(E. N. Engenharia – 1947).

a) h em função de m

Temos: $3^h = 2m - 1$ . . $\boxed{h = \frac{\log(2m-1)}{\log 3}}$

b) valores de m que tornam $h < 0$

Para que se tenha $h < 0$, basta que

$$\log(2m-1) < 0 \quad \therefore \quad 0 < 2m - 1 < 1$$

Então $h < 0$ para $\boxed{\frac{1}{2} < m < 1}$

c) Crescimento de y no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 10}{(x + m - 3)^2}$$

Como y' tem o sinal de seu numerador, pois o denominador é, para $x \neq 3 - m$, sempre positivo, então o sinal de y' é o sinal de $m^2 - 3m - 10$.

Os zeros do trinômio são 5 e −2, então, o trinômio tem o sinal negativo para os valores do intervalo $(-2, 5)$ das raízes.

Logo, $m^2 - 5m - 10 < 0$, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ e, portanto, $y' < 0$, nesse intervalo.

A função é, pois, *decrescente* (N.º 44).

II) Achar os máximos e mínimos da função $y = (x+1)^2 (x-4)^3$ (*F. N. Filosofia – 1948*).

1.º) $y' = (10x - 40)(2x^2 - 4x - 1)$

2.º) Achemos as raízes de $y' = 0$.

$$y' = 5(x+1)(x-1)(x-4)^3$$

é fácil de ver que $x = -1$, $x = 1$ e $x = 4$ são os valores que anulam y'.

3.º)

a) Para $x = -1$, $y'' = (-50)(2+4-1) < 0$. Logo, $x = -1$ é um *maximante*.

O valor máximo da função é $y = 0$.

b) Para $x = 1$, $y'' = (-30)(2-4-1) < 0$. Logo, $x = 1$ é um *minimante*.

O valor numérico da função é $y = 4 \times (-27) = -108$.

c) Para $x = 4$, $y'' = 0$. Calculemos $y''' = (10x - 40)(4x - 4) + (2x^2 - 4x - 1) \times 10 = 40(x-4)(x-1) + 10(2x^2 - 4x - 1)$.

Para $x = 4$, $y''' = 0 + 10(32 - 16 - 1) \neq 0$. Logo, $x = 4$ é um *ponto de inflexão*.

III) Estudar a variação da função

$$y = e^{-(x^2-3x)}$$

(*F. N. Filosofia – 1946*).

a) Campo de definição: $(-\infty, +\infty)$

b) Não apresenta pontos de descontinuidade.

c) $y' = -(3x^2 - 3)\, e^{-(x^2-3x)}$

Mas, $e^{-(x^2-3x)} > 0$, sempre. Logo, $y' = 0$ para $3x^2 - 3 = 0$ ou $x = \pm 1$.

d) Mas (N.º 50), no ponto $x = -1$, y' passa de negativa para positiva, logo, $x = -1$ é um *minimante*.

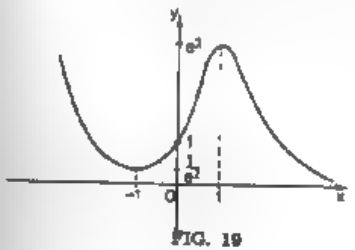


FIG. 19

E, no ponto $x = 1$, y' passa de positiva para negativa, logo, $x = 1$ é um *maximante*.

e) $y' < 0$ para $x < -1$
$y' > 0$ para $-1 < x < 1$
$y' < 0$ para $x > 1$

A função é, pois, *decrescente nos intervalos*

$(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$

É *crescente* no intervalo $(-1, +1)$.

f) $y_0 = 1$; y nunca se anula:

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} y = 0$$

g)

x	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	$+1$	↗	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$1/e^3$	↗	1	↗	e^3	↘	0

Gráfico (fig. 19)

56. Questões para resolver.

Determinar os intervalos em que as funções abaixo são decrescentes:

1) $y = \frac{1}{2} x^2$

2) $y = x^2 - 6x + 5$

3) $y = 28 + 3x - x^2$

4) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

5) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

6) $y = (0,5)^{x^2+1}$

7) $y = \frac{1}{e^x}$

8) $y = x^{-\frac{1}{2}}$

Determine os intervalos em que as funções abaixo são crescentes

9) $y = 7 + 6x - x^2$

10) $y = x^3 - 4x + 10$

11) $y = 7 + 4x - x^2$

12) $y = \frac{2x-5}{3x-4}$

13) $y = x^{\frac{3}{5}}$

14) $y = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

15) A função $y = x(108 - x^2)$ é crescente no intervalo...
(*F. Flum. Engenharia – 1957*)

Achar os extremantes das funções:

16) $y = x^3 + 1$

17) $y = x^2 + 7x - 18$

18) $y = 5 - 2x^3$

19) $y = x^3 - 3x + 3$

20) $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2$

21) $y = x^4 - 2x^3 + 40$

22) $y = (x-1)^2 (x-2)^3$

23) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

24) $y = \frac{(3-x)^2}{3 - 2x}$

25) $y = 8 - 2(x-1)^{\frac{1}{3}}$

Achar os extremos das funções:

26) $y = x^2 - 6x + 2$

27) $y = -2x^2 + 8x - 11$

28) Calcule os máximos e mínimos da função

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5$$

(*E. Politécnica U. Cat. Rio – 1957*)

29) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

30) $y = (x-3)^2 (x-2)$

Estudar o crescimento das funções:

31) $y = 2^x$ 32) $y = x^2$ 33) $y = x^{-2}$ 34) $y = x^{-\frac{1}{2}}$

35) Diga se a função $y = \frac{(x+4)^2}{x+3}$ é decrescente ou crescente no intervalo $(-3, -2)$, e porque.

Diga qual o valor máximo da função

36) $y = xe^{-2x}$ 37) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

38) Determinar o máximo e o mínimo da função: $y = \frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+3}$

(E. Aeronautica – 7/1/52).

(*Sugestão:* usar o processo indicado no N.º 50)

39) Pesquise os máximos e mínimos da função: $y = \frac{1-x}{x^2}$

(E. Naval – 1949).

(*Sugestão:* usar o processo indicado no N.º 49)

Estudar a variação das funções:

40) $y = x^3 - 3x + 3$ 41) $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2-5x+6}$

42) $y = \frac{2x^2-2}{x^2+4x+4}$

(E. Naval – 1944).

(*Sugestão:* usar o processo indicado no N.º 49)

43) $y = \frac{3x^2-7x+2}{2x^2-3x-2}$

(E. Naval – 1939).

44) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}$

(E. N. Química – 1941).

45) $y = \frac{6x^2-4x+3}{x^2-4x+1}$

(E. N. Engenharia – 1936).

Nota: A pesquisa dos pontos de inflexão das duas últimas funções deve ser abandonada, pois recai na resolução de equações do 3.º grau.

Sugerimos aos alunos seguirem o processo do N.º 50 para esses exercícios.

46) Estudar, considerando o sinal da derivada, as variações da função

$$y = x + \frac{4}{x}$$

(Exame de Bacharelado – Lille, França).

47) Estudar a variação da função:

$$y = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

(E. Militar – 1954

48) Dentre os retângulos, de mesmo perímetro, qual o de maior área?

49) Com 28 palitos de fósforo, construir um retângulo cuja área seja máxima.

50) Quais as dimensões do retângulo de menor perímetro e de área igual a $100m^2$?

51) Qual o setor de área $64m^2$, que tem o menor perímetro?

52) Qual o perímetro do triângulo isóceles de maior área que se pode inscrever em um círculo de $\sqrt{3}$ metros de raio?

53) Qual o volume do cone de revolução de maior volume, inscrito em uma esfera de 3 metros de raio?

54) Qual é a altura do cilindro circular reto de maior volume, inscrito em uma esfera de raio igual a $\sqrt{3}$ metros?

55) Qual a área do trapézio de maior área que se pode inscrever em um semicírculo de 2m de raio? (A base maior é o diâmetro).

56) Qual a área máxima de um retângulo inscrito em um triângulo equilátero de área dada?

57) Determinar o volume do cone reto de volume máximo inscrito numa esfera de raio igual a 10m.

(E. N. Química – 1947).

58) Qual o paralelepípedo retângulo de volume máximo que se pode inscrever em uma esfera?

59) Dentre os triângulos retângulos de mesmo perímetro, qual o de área máxima?

60) Calcular a relação entre a altura e o raio da base de uma lata de conserva de modo a se conseguir, na sua confecção, o máximo de economia do metal.

Sugestão: A lata de conserva é um cilindro de volume $\pi R^2 h = v$ e área total: $2\pi Rh + 2\pi R^2 = S$. '. $h = \frac{V}{\pi R^2}$ e $S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$.

61) Um tanque de forma prismática, sem tampa, construído com chapas de aço, tem a base hexagonal regular. Seu volume é de $64m^3$. O custo dos lados é de 10 cruzeiros o m^2 e o da base 20 cruzeiros o m^2. Pergunta-se:

a) Quais devem ser as dimensões do tanque para que o custo seja mínimo?

b) Qual é o custo mínimo?

(F. Arquit. Mackenzie – S. Paulo – 1952).

RESPOSTAS:

1) $(-\infty, 0)$
2) $(-\infty, 3)$
3) $\left(\frac{3}{2} + \infty\right)$
4) $(1, 3)$
5) $(1, 5)$
6) $(0, +\infty)$
7) $(-\infty, +\infty)$
8) $(0, +\infty)$
9) $(-\infty, 3)$
10) $(2, +\infty)$
11) $(-\infty, 2)$

12) $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$ e $(^4/_5, +\infty)$
13) $(0, +\infty)$
14) $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$
15) $(-6, +6)$
16) $x = 0$ min.
17) $x = -3{,}5$ min.
18) $x = 0$ max.
19) $x = 1$ min. e $x = -1$ max.
20) $x = 0$ min.
21) $x = 0$ max., $x = \pm 1$ min.
22) $x = \frac{8}{5}$ max. e $x = 2$ min.
23) $x = 4$ max., $x = 16$ min.
24) $x = \frac{3}{4}$ min.
25) Não tem extremantes
26) min. $y = \nearrow 7$
27) max. $y = -3$
28) max. $y = 17$ e min. $y = -10$
29) max. $y = 2$, min. $y = -14$
30) max. $y = \frac{4}{27}$ e min. $y = 0$
31) Sempre crescente

32) Decrescente $(-\infty, 0)$ e crescente $(0, +\infty)$
33) Crescente $(-\infty, 0)$ e decrescente $(0, +\infty)$
34) Decrescente $(0, +\infty)$
35) É decrescente pois, $y' < 0$ nesse intervalo
36) $\frac{1}{2e}$
37) $\sqrt{2}$
38) $y(-3) = 2$ (máx.) e $y(0) = -1$ (mín.)
39) $y(2) = -\frac{1}{4}$ (mín.). O ponto $\left(8, -\frac{2}{9}\right)$ é um ponto de inflexão de y

40)

x	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	3 infl.	↘	1	↗	$+\infty$

41)

x	$-\infty$	↗	-1	↗	2	↗	$17/7$	↗	3	↗	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	1	↘	0	↗		↗	-48	↘		↘	1

42)

x	$-\infty$	↗	2	$-15/8$	↗	-1	-0.5	↗	0	↗	$1/4$	↗	1	↗	∞
y'		$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
y	2	↘		infl.	↘	0	$-2/3$	↗	$-1/2$	↗	infl.	↗	0	↗	2

43)

x	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$1/3$	↗	$+\infty$
y'		$+$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
y	$3/2$	↗		↗	-1	↗	0	↗	$3/2$

44)

x	$-\infty$	↗	4	↗	-2	↗	1	↗	0	↗	1	↗	2	↗	4	↗	$+\infty$
y'		$+$		$+$	0			$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	1	↗		↗	-9	↘		↘	1	↘	0	↘	$-\frac{1}{9}$	↗	0	↗	1

45)

x	$-\infty$	↗	-0.5	↗	0	↗	$2-\sqrt{3}$	↗	$0{,}8$	↗	$2+\sqrt{3}$	↗	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	6	↘	2	↗	3	↗		↗	$-7{,}3$	↘		↘	6

46)

x	$-\infty$	↗	-2	↗	0	↗	2	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘		↘	4	↗	$+\infty$

47)

x	$-\infty$	↗	-1	↗	$+1$	↗	$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗		↗	$+1$	↗	$+\infty$

48) Quadrado
49) Um quadrado com 7 palitos de cada lado.
50) 10m cada uma
51) $R = 8$m e $l = 16$m
52) 9m
53) $\frac{32\pi}{3}$ m³
54) 2m
55) $8\sqrt{3}$ m²
56) Metade da área do triângulo
57) $V = \frac{32\pi R^3}{81} = \frac{32\,000\,\pi}{81}$
58) Cubo
59) Isósceles
60) $h = 2R$

61) Aresta da base = $^4/_3\sqrt[3]{6}$ m; altura = $8\sqrt[3]{1/_{432}}$ m e o custo mínimo $960\sqrt[3]{^3/_4}$ cruzeiros.

CAPÍTULO XIV

Primitivas imediatas

1. Funções primitivas. Dada uma função $f(x)$ definida em $[a, b]$, chama-se *função primitiva* ou simplesmente *primitiva* de $f(x)$, a toda função $g(x)$, também definida em $[a, b]$ e cuja derivada $g'(x) = f(x)$, em todo $[a, b]$.

Demonstra-se que toda função contínua admite uma primitiva.

2. Teorema.

> Se $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $g(x) + C$, onde C é uma constante, é também, uma primitiva de $f(x)$.

De fato, se $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, por definição:

$$g'(x) = f(x)$$

Mas, de acordo com os N.os 16 e 12, temos que:

$$[g(x) + C]' = g'(x) + C' = g'(x) + 0$$

e, por definição, $[g(x)+C]$ é, também, *uma primitiva* de $f(x)$.

Observação: Pelo que acabamos de ver, concluímos que dizer. *a primitiva* de $f(x)$ é *errado*, pois existe um número infinito de primitivas de $f(x)$. Exemplo:

Uma primitiva da função $y = \cos x$ é $\operatorname{sen} x$.

Mas, $\operatorname{sen} x + 2$ ou $\operatorname{sen} x + \pi$ são, também, suas primitivas.

3. Integral indefinida. Seja a função $f(x)$ e suponhamos que ela admita uma primitiva $g(x)$; se admite uma primitiva, admite uma infinidade:

$$g(x) + C$$

A expressão $g(x)+C$ se denomina *integral indefinida* ou simplesmente *integral* de $f(x)\,dx$, que representamos com o símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

símbolo esse que representa, pois, todas as primitivas de $f(x)$ e a função $f(x)\,dx$ chama-se *função integranda*.

Portanto, se $g'(x) = f(x)$ podemos escrever:

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C \qquad \text{(I)}$$

Exemplo:

As primitivas de $y = \cos x$ são representadas por

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

Observação: A (I) não é uma equação, nem uma identidade, é sim, uma igualdade convencional.

4. Constante de integração. Chama-se *integração* ao processo usado para achar a integral indefinida de uma função.

Não há regras fixas para a *integração*, como existem para a derivação, entretanto, é possível resolver, elementarmente, o problema da integração, em grande número de casos. No cálculo da integral indefinida, $g(x)+C$, de $f(x)$, determina-se o valor da constante C, de acordo com cada caso particular, conforme for mais conveniente.

A essa constante arbitrária C denominamos de *constante de integração*.

5. Transformações úteis na prática da integração (Identidades convencionais).

Derivando ambos os membros de (I), do N.º 3, vem:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = g'(x) + 0 = f(x) \qquad \text{(II)}$$

Como $kg(x)$ é uma primitiva de $kf(x)$, sendo k = constante, se tomarmos para constante de integração kC, temos:

$$\int kf(x)\,dx = k\,g(x) + kC$$

ou

$$\int kf(x)\,dx = k\,[g(x) + C] = k\int f(x)\,dx$$

Como casos particulares, podemos escrever:

$$\int \frac{f(x)}{k}\,dx = \frac{1}{k}\int f(x)\,dx$$

$$\int [-f(x)]\,dx = -\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int k f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = k\int \frac{f(x)}{k}\,dx$$

6. Primitivas imediatas (Quadro-resumo). Como, das definições, se $g'(x) = f(x)$, temos:

$$\int f(x)\,dx = g(x) + X$$

então, recordando as derivadas das funções elementares (ver quadro sinótico), podemos escrever imediatamente:

DIFERENCIAIS	PRIMITIVAS
1) $d(x+C) = dx$	1) $\int dx = x + C$
2) $d\left(-\frac{1}{x} + C\right) = \frac{1}{x^2}dx$	2) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
3) $d\left(\frac{u^{m+1}}{m+1} + C\right) = u^m . du$ $(m \neq -1)$	3) $\int u^m . du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$
4) $d\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right) = \sqrt{x}\,dx$	4) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
5) $d\left(\frac{a^u}{\lg a} + C\right) = a^u du$	5) $\int a^u du = \frac{a^u}{\lg a} + C$
6) $d(a^u + C) = a^u \lg a\, du$	6) $\int a^u \lg a\, du = a^u + C$
7) $d(e^u + C) = e^u du$	7) $\int e^u du = e^u + C$
8) $d(\lg \lvert u\rvert + C) = \frac{1}{u}du$	8) $\int \frac{du}{u} = \lg \lvert u\rvert + C$
9) $d(\operatorname{sen} u + C) = \cos u\, du$	9) $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
10) $d(-\cos u + C) = \operatorname{sen} u\, du$	10) $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

PRIMITIVAS	DIFERENCIAIS
11) $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$	11) $d(\operatorname{tg} u + C) = \sec^2 u\, .\, du$
12) $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u + C$	12) $d(-\cot u + C) = \operatorname{cosec}^2 u\, du$
13) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + C$	13) $d(\operatorname{arc\,sen} u + C) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
ou	ou
$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{arc\,cos} u + C$	$d(-\operatorname{arc\,cos} u + C) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
14) $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + C$	14) $d(\operatorname{arc\,tg} u + C) = \frac{du}{1+u^2}$
ou	ou
$\int \frac{du}{1+u^2} = -\operatorname{arc\,cot} u + C$	$d(-\operatorname{arc\,cot} u + C) = \frac{du}{1+u^2}$

7. Exemplos.

1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

3) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

4) $\int \frac{3}{x}\,dx = 3 \lg x + C$

5) $\int 5x^4\,dx = x^5 + C$

6) $\int -2x^3\,dx = -\frac{1}{2}x^4 + C$

7) $\int 2\cos x\,dx = 2\operatorname{sen} x + C$

8) $\int -\operatorname{sen} x\,dx = \cos x + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2} + C$

8. Integral de uma soma. Suponhamos que:

u_1 e u_2 sejam funções de x.

Sabemos que a derivada de $u_1 + u_2$

é $u_1' + u_2'$.

Logo, $\int (u_1' + u_2')\,dx = u_1 + u_2 + C$

Generalizando, podemos dizer:

> **A integral indefinida de uma soma algébrica (finita) de diferenciais é igual à soma algébrica das integrais indefinidas de cada uma delas.**

Exemplo:

$$\int(x^3 - 2x + 5)\,dx = \int x^3\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + C = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + C$$

9. Exercícios para resolver.

Calcular (com o auxílio do N.º 6):

1) $\int 5\,dx$
2) $\int \frac{dx}{2}$
3) $\int x^4 dx$
4) $\int 2x^5 dx$
5) $\int \frac{1}{\pi}x^3 dx$
6) $\int 3\sqrt{x}\,dx$
7) $\int \frac{4}{3}\sqrt[4]{x}\,dx$
8) $\int \frac{dx}{x^3}$
9) $\int \frac{5}{3}x^{3/4}\,dx$
10) $\int 2x^{-3}dx$
11) $\int \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}dx$
12) $\int 2^x dx$
13) $\int 3\sqrt{10x}\,dx$
14) $\int 3e^{3x}dx$
15) $\int e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\,dx$
16) $\int \frac{2x\,dx}{x^2}$
17) $\int 3e^x dx$
18) $\int 2e^{-x}dx$
19) $\int e^{2x}dx$
20) $\int \frac{2dx}{e^x}$
21) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$
22) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$
23) $\int \frac{dx}{x\lg x}$
24) $\int 2\cos 2x\,dx$
25) $\int \operatorname{sen} x^2\cdot 2x\,dx$
26) $\int -3\operatorname{sen} 3x\,dx$
27) $\int 2\sec^2 x\,dx$
28) $\int -2\operatorname{cosec}^2 x\,dx$
29) $\int 2\sec^2 2x\,dx$
30) $\int \sec^2 2x\,dx$
31) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
32) $\int \frac{3\,dx}{1+x^2}$
33) $\int \frac{dx}{2+2x^2}$
34) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-9x^2}}$
35) $\int (x^2+x+1)dx$
36) $\int (2x+1)dx$
37) $\int (6x^5 - 5x^3 - 2x)dx$
38) $\int (e^x + e^{-x} + x - 1)dx$
39) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 3\sqrt{x}\right)dx$
40) $\int (e^x + 2^x)dx$
41) $\int (\cos x + \operatorname{sen} x)dx$
42) $\int (\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)dx$
43) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \sec^2 x\right)dx$
44) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \operatorname{cosec}^2 x\right)dx$
45) $\int \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

46) Diga quais das expressões abaixo são primitivas de $\int 4x\,e^{2x^2}dx$:

a) $e^{2x^2} + 2$
b) $e^{2x^2} + 1$
c) $e^{2x^2} + e^2$
d) $e^{2x^2} - 1$
e) $e^{2x^2+x} + 2$

47) Determinar as integrais:

a) $\int \operatorname{tg} x\,dx =$
b) $\int \sqrt{3+x^2}\,.\,x\,.\,dx =$
c) $\int \sec^2 \frac{x}{2}\,dx =$

(Esc. Eng. U. F. Est. Rio – 1963)

Respostas:

1) $5x + C$
2) $\frac{1}{2}x + C$
3) $\frac{x^5}{4} + C$
4) $\frac{1}{3}x^6 + C$
5) $\frac{1}{3\pi}x^4 + C$
6) $2\sqrt{x^3} + C$
7) $x^{4/3} + C$
8) $-\frac{1}{2x^2} + C$
9) $x^{5/3} + C$
10) $-\frac{1}{x^2} + C$
11) $\sqrt{x} + C$
12) $\frac{2^x}{\lg 2} + C$
13) $2x\sqrt{10x} + C$
14) $e^{3x} + C$
15) $e^{\operatorname{sen} x} + C$
16) $\lg|x^2| + C$
17) $3e^x + C$
18) $-2e^{-x} + C$
19) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$
20) $-2e^{-x} + C$
21) $\lg|\operatorname{sen} x| + C$
22) $\lg(x^2+1) + C$
23) $\lg|\lg x| + C$
24) $\operatorname{sen} 2x + C$
25) $-\cos x^2 + C$
26) $\cos 3x + C$
27) $2\operatorname{tg} x + C$
28) $2\cot x + C$
29) $\operatorname{tg} 2x + C$
30) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C$
31) $2\operatorname{arc\,sen} x + C$
32) $3\operatorname{arc\,tg} x + C$
33) $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$
34) $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen} x + C$
35) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$
36) $x^2 + x + C$
37) $x^6 - 2x^4 - x^2 + C$
38) $e^x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$
39) $\lg|x| - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x^3} + C$
40) $e^x + \frac{2^x}{\lg 2} + C$
41) $\operatorname{sen} x - \cos x + C$
42) $\operatorname{tg} x + \cot x + C$
43) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{tg} x + C$
44) $-(\operatorname{arc\,cot} x + \cot x) + C$
45) $\operatorname{sen} x - \operatorname{arc\,sen} x + C$
46) (a) e (c) apenas
47) a) $\lg\cos x + C$
b) $\frac{1}{3}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
c) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$

INTEGRAL DEFINIDA

10. Definição. Seja $y=f(x)$ uma função contínua e uniforme em (α, β) e seja $g(x)$ uma primitiva de $f(x)$.

A diferença $g(b)-g(a)$, dos valores da primitiva $g(x)$, em dois pontos quaisquer de (α, β), denomina-se *integral definida* da diferencial $f(x)\,dx$, entre os limites a e b, e indicamos por

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b)-g(a)$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)]_a^b \qquad (1)$$

O limite **a** chama-se *limite inferior* e o **b** *limite superior*.

> A diferença $g(b)-g(a)$ é um número bem determinado, logo, a integral definida é um número que depende da função integranda.

Exemplos:

1) $\int_1^3 dx = [x]_1^3 = 3-1 = 2$

2) $\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

3) $\int_0^\pi \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^\pi = 0-0 = 0$

4) $\int_1^4 \frac{dx}{x} = [\lg x]_1^4 = \lg 4 - \lg 1 = \lg 4$

11. Propriedades da integral definida.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) Tomando um ponto c, de (a, b), tem-se sempre:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots$

(não depende da variável)

5) Se k = constante $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

6) $\int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx$

Nota: Essas propriedades são evidentes pela própria definição.

12. Observação. De acordo com o que acabamos de ver, para o cálculo das integrais definidas temos que calcular uma primitiva da função integranda e a seguir efetuar a diferença dos valores dessa primitiva nos limites da integral definida (conforme exemplos do N.º 10).

13. Exercícios para resolver.

1) $\int_{-2}^{-1} dx$

2) $\int_{-2}^{-1} x^2\,dx$

3) $\int_1^\pi \operatorname{sen} x\,dx$

4) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

5) $\int_0^\pi 2\cos x\,dx$

6) $\int_1^e \frac{dx}{x}$

7) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x^2}$

8) $\int_3^3 \frac{dx}{1+x^2}$

9) $\int_0^\pi \cos 2x\,dx$

10) $\int_0^\pi \cos 5x\,dx$

11) $\int_0^\pi \operatorname{sen} 2x\,dx$

12) $\int_0^\pi \operatorname{sen} 3x\,dx$

13) $\int_0^\pi \operatorname{sen} 6x\,dx$

14) $\int_0^\pi \operatorname{sen} 5x\,dx$

15) $\int_0^{2\pi} \cos 2x\,dx$

16) $\int_0^{2\pi} \cos 3x\,dx$

17) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx$

18) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\ 3x\,dx$

Respostas:

1) 2	7) $\frac{\pi}{4}$	12) $\frac{2}{3}$	15) 0
2) $^7/_3$	8) 0	13) 0	16) 0
3) 0	9) 0	14) $\frac{2}{5}$	17) 0
4) lg 2	10) 0		18) 0
5) 0	11) 0		
6) 1			

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

14. Cálculo das áreas.

Teorema:

> A área da superfície limitada por uma curva, cuja equação é $y=f(x)$, pelo eixo dos x, e pelas ordenadas de dois pontos, cujas abcissas são a e b é dada por $A = \int_a^b f(x)dx$.

Seja a curva (fig. 20), cuja equação é $y=f(x)$, e seja A a área variável da superfície limitada pela curva, pelo eixo dos x, pela ordenada do ponto onde $x=a$ e pela ordenada variável y, correspondente a uma abcissa x.

Seja ΔA o acréscimo de área correspondente a um acréscimo Δx de x.

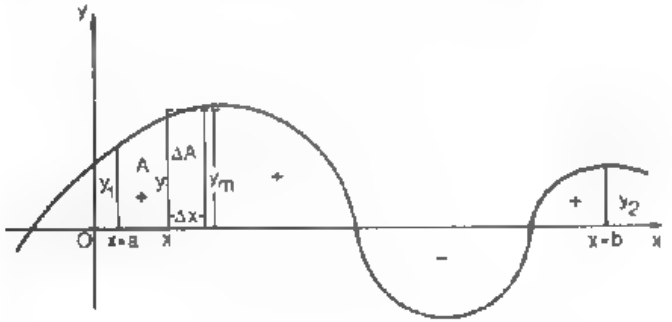


FIG. 20

Se chamarmos de ordenada média a uma quantidade y_m tal que:

$$\Delta A = y_m \Delta x \text{ então, } \frac{\Delta A}{\Delta x} = y_m$$

E, é fácil de ver (fig. 20) que, quando

$$\Delta x \to 0, \; y_m \to y$$

Logo,
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y_m = y$$

e, portanto,
$$\frac{dA}{dx} = y \; \therefore \; dA = y\,dx \qquad (I)$$

que, nos indica que a diferencia. da área variável A, limitada pela curva, pelo eixo dos x, por uma ordenada fixa y_1 e por uma ordenada variável, é igual ao produto dessa variável pela diferencial da abcissa correspondente.

Integrando (I), obtemos:

$$A = \int y\,dx \quad \text{ou} \quad A = \int f(x)\,dx \qquad (II)$$

valor esse que, sendo uma integral indefinida, não representa uma determinada área.

Se desejamos calcular a área limitada pela curva, pelo eixo dos x e pelas ordenadas y_1 e y_2, então a área A (fig. 20) deve ser considerada nula, para $x=a$.

De (II) temos:

$$A = \int f(x)\,dx = g(x) + C \qquad (III)$$

e se
$$A = 0, \; g(a) + C = 0$$

que, permite calcular a constante de integração

$$C = -g(a)$$

Portanto, pela (III), a área A da figura 20 é dada por:

$$A = g(x) - g(a) \qquad (IV)$$

Ora, se $x=b$ a área (IV) ficará:

$$A = g(b) - g(a)$$

que é, por definição a integral definida de $f(x)\,dx$, entre os limites a e b, isto é

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (V)$$

15. Observação. A área (V) será positiva ou negativa conforme a superfície limitada esteja, respectivamente, inteiramente acima ou abaixo do eixo dos x (fig. 20).

Se uma porção da superfície está acima do eixo dos x e outra porção abaixo, a (V) representa a soma algébrica das áreas positivas e negativas.

16. Exemplos.

1) Achar a área limitada pela curva $y=x^2$ de $x=0$ até $x=4$ (fig. 21).

Temos: $\int_0^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}$ unidades de área.

2) Achar a área limitada pela parábola $y=1-x^2$ e pelo eixo dos x (fig. 22).

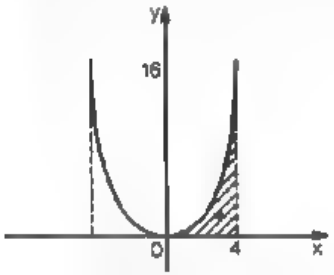


FIG. 21

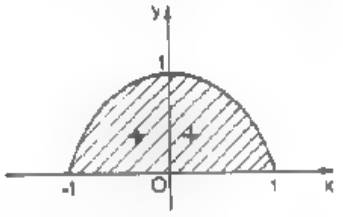


FIG. 22

A área pedida será:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = {}^4/_3$$

unidades de área.

3) Achar a área limitada pela parábola $y = x^2 - x - 6$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$. (Fig. 23)

(Na figura -1 e 1 não estão no devido lugar).

Temos:

$$A = \int_{-1}^{1}(x^2 - x - 6)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-1}^{1}$$

$$\therefore A = -11\,\frac{1}{3} \text{ unidades de área}$$

Poder-se-ia tomar o resultado em valor absoluto: $11\,\frac{1}{3}$.

4) Determinar a área do trapézio limitado pela reta $y = x + 2$, e pelas ordenadas dos pontos de abcissa 0 e 2 (fig. 24).

Temos:

$$\int_0^2 (x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = 6 - 0 = 6 \text{ unidades de área.}$$

5) Achar a área limitada pela parábola cúbica $y=x^3$ e pelas retas $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ (fig. 25).

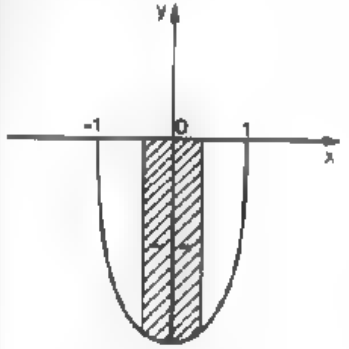


FIG. 23

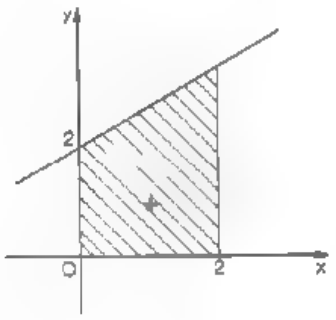


FIG. 24

Temos:

$$\text{(I)} \quad A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x^3\,dx = -\frac{15}{64} \quad (\text{ou } {}^{15}/_{64})$$

Este valor não representa, todavia, a soma dos valores absolutos das áreas + e −. Neste caso temos de separar (I) em 2 integrais, uma para a porção positiva e outra para a negativa.

Temos:

$$\int_{-1}^{0} x^3\,dx = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^3\,dx = \frac{1}{64} \quad \therefore A = \frac{1}{4} + \frac{1}{64} = \frac{17}{64}$$

6) Achar a área limitada pela senóide ($y = \text{sen } x$) de $x = 0$ até $x = 2\pi$ (fig. 26).

Já vimos que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$\therefore A = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

De fato, a área nula indica que a porção + e a porção − têm as mesmas áreas.

Neste caso, desde que se saiba que existe uma parte da superfície + e outra −, deve-se proceder assim:

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x\,dx = -2 \quad \text{e} \quad A = 4 \text{ unidades área}$$

O que é obtido somando os valores absolutos das áreas das 2 porções de superfície.

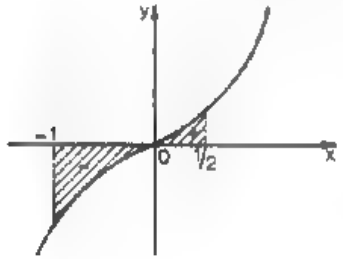


FIG. 25

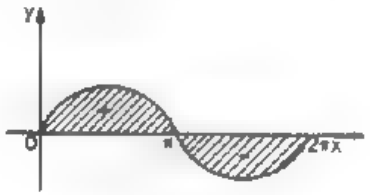


FIG. 26

19. Exercícios para resolver.

Achar as áreas das superfícies limitadas pelo eixo dos x, pelas curvas abaixo e pelas ordenadas dos pontos de abscissas indicadas:

1) $y = 3x^2$, de $x = 0$ até $x = 2$
2) $y = 3x^2 - 3x - 36$, de $x = 0$ até $x = 4$
3) $y = x + 3$, de $x = 0$ até $x = 4$
4) $y = x\,(x+1)\,(x+2)$ de $x = -1$ até $x = 2$
5) Achar a área limitada por um arco de $y = \text{sen } x$, de 0 ar π

6) Achar a área limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$, $x = 5$ e $x = 7$, com auxílio da integração.
7) Achar, com auxílio de uma integração, a área do triângulo limitado pela reta $x + y - 1 = 0$, pelo eixo dos x e pelas ordenadas dos pontos de abscissas $x = 1$ e $x = 3$.
8) A área da região plana limitada pela curva $y = x^2$, pelo semi-eixo positivo das abscissas e pela reta $x = 1$ é expressa pela seguinte integral .....

(ENE – 1968)

Respostas:

1) 8 un. área
2) −104 un. área
3) 20 un. área
4) $15\frac{3}{4}$ un. área
5) 2
6) 20
7) −2
8) $\int_0^1 x^2 dx$

CAPÍTULO XV

Polinômios

1. Polinômio de uma variável. Chamamos de *polinômio real de uma variável* aos polinômios algébricos, racionais e inteiros, reduzidos e ordenados em relação a uma única letra, à qual pode ser atribuído qualquer valor real.

Isto é, um *polinômio real de uma variável*, de grau m, é um polinômio $P(x)$ da forma

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ são números reais dados e a letra x, à qual pode ser atribuído qualquer valor real, chama-se *variável*.

IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

2. Polinômio identicamente nulo. Chama-se *polinômio identicamente nulo* a todo polinômio $P(x)$ da forma

$$0 \cdot x^m + 0 \cdot x^{m-1} + \ldots + 0 \cdot x + 0$$

cujo valor numérico é nulo.

E indicamos assim: $P(x) \equiv 0$.

3. Polinômios idênticos. Diz-se que dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ *são idênticos* quando têm valores numéricos iguais para qualquer valor de x.

Escreve-se assim:

$$P_1(x) \equiv P_2(x)$$

4. Teorema.

> A condição necessária e suficiente para que dois polinômios, de mesmo grau, de uma variável sejam idênticos é que os coeficientes de seus termos de mesmo grau sejam iguais.

1.º) A CONDIÇÃO É NECESSÁRIA. Isto é, se dois polinômios são idênticos, os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

De fato, sejam

$$P_1(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

e

$$P_2(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

dois polinômios idênticos.

De acordo com a definição (N.º 3), temos que

$$P_1(x) - P_2(x) \equiv 0$$

ou

$$(a_0 - b_0) x^m + (a_1 - b_1) x^{m-1} + \ldots + (a_{m-1} - b_{m-1}) x + a_m - b_m \equiv 0$$

Mas, de acordo com a definição de polinômio identicamente nulo temos:

$$a_0 - b_0 = 0,\ a_1 - b_1 = 0,\ \ldots,\ a_{m-1} - b_{m-1} = 0,\ a_m - b_m = 0$$

$$\therefore\ a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{m-1} = b_{m-1},\ a_m = b_m$$

E portanto os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

Se $P_1(x)$ e $P_2(x)$ fossem de graus diferentes com raciocínio análogo mostraríamos que os polinômios se reduziriam ao mesmo grau.

2.º) A CONDIÇÃO É SUFICIENTE. Isto é, se os coeficientes, dos termos de mesmo grau, são iguais os polinômios são idênticos.

Realmente, os dois polinômios tendo os mesmos termos seus valores numéricos são iguais, para qualquer valor de x.

5. Método dos coeficientes a determinar. Este método, devido a Descartes, permite determinar um ou mais coeficientes desconhecidos de um polinômio, dos quais são dadas as condições a que devem satisfazer.

Consiste em, aplicando a teoria dos polinômios idênticos, formar uma equação ou um sistema de equações e, resolvendo, determinar os coeficientes desconhecidos.

É muito empregado no cálculo algébrico sob as mais variadas formas, como veremos nas aplicações que apresentaremos a seguir:

APLICAÇÕES:

6. Decompor uma expressão em uma outra que seja de um tipo dado. Exemplo:

Decompor o trinômio $3x^2-9x+7$ em uma diferença de dois cubos do tipo

$$(x-b)^3-(x-a)^3$$

Temos a identidade:

$$\therefore\ 3x^2-9x+7 \equiv (x-b)^3-(x-a)^3$$

ou $$3x^2-9x+7 \equiv 3(a-b)x^2+3(b^2-a^2)x+a^3-b^3$$

Mas, de acordo com o (N.º 4):

$$\begin{cases} 3(a-b)=3 \\ 3(b^2-a^2)=-9 \\ a^3-b^3=7 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a-b=1 \\ a^2-b^2=3 \\ a^3-b^3=7 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos: $a=2$ e $b=1$.

E podemos então escrever

$$3x^2-9x+7 \equiv (x-1)^3-(x-2)^3$$

7. Determinar o quociente e o resto de uma divisão. Exemplo:

Sem efetuar a divisão

$$(x^4-5x^3+2x-1):(x^2-3x+4)$$

calcular seu quociente e seu resto.

Se o dividendo é do 4.º grau e o divisor do 2.º grau, o quociente será do (4 − 2) 2.º grau da forma

$$ax^2+bx+c$$

e o resto será no máximo do 1.º grau (grau menor do que o divisor) e da forma $mx+p$

Pelo princípio fundamental da divisão temos:

$$(x^2-3x+4)(ax^2+bx+c)+mx+p \equiv x^4-5x^3+2x-1$$

ou

$$ax^4+(b-3a)x^3+(c+4a-3b)x^2+(4b-3c+m)x+$$
$$+4c+p \equiv x^4-5x^3+2x-1$$

E, de acordo com o N.º 4, temos:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-5 \\ c+4a-3b=0 \\ 4b-3c+m=2 \\ 4c+p=-1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-10 \\ m=-20 \\ p=39 \end{cases}$$

E, o quociente e o resto serão:

$$x^2-2x-10 \quad \text{e} \quad -20x+39$$

8. Determinação de alguns coeficientes de um polinômio de modo que ele seja divisível por outro. Exemplo:

Determinar m e p para que o polinômio x^4-5x^2+mx+p seja divisível por x^2-x-2.

Chamando de ax^2+bx+c o quociente da divisão temos que:

$$x^4-5x^2+mx+p \equiv (x^2-x-2)(ax^2+bx+c)$$

$$x^4-5x^2+mx+p \equiv ax^4+(b-a)x^3+(c-2a-b)x^2+(-c-2b)x-2c$$

De acordo com o N.º 5, obtemos:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-2a-b=-5 \\ -c-2b=m \\ -2c=p \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \\ m=0 \\ p=4 \end{cases}$$

Logo os valores pedidos são $m=0$ e $p=4$

9. Decomposição de uma fração racional, cujos termos são polinômios de uma variável, sendo o denominador de grau maior do que o numerador e podendo este ser um monômio ou uma constante, numa soma de frações mais simples.

O denominador da fração a decompor só contém fatores do 1.º grau, não repetidos.

A cada fator corresponde uma fração. Exemplo:

Decompor a fração $\frac{4}{x^3-5x^2+4x}$ em uma soma de frações cujos denominadores são do 1.º grau.

Como $x^3-5x^2+4x = x(x^2-5x+4) = x(x-1)(x-4)$ podemos escrever:

$$\frac{4}{x^3-5x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$$

Efetuando a adição do segundo membro, reduzindo e ordenando os resultados, temos:

$$\frac{4}{x^3-5x^2+4x} = \frac{(A+B+C)x^2-(5A+4B+C)x+4A}{x(x-1)(x-4)}$$

Como as frações são idênticas e os denominadores também, então os numeradores também o serão.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -5A-4B-C=0 \\ 4A=4 \end{cases}$$

Resolvendo: $A=1$, $B=-4/3$ e $C=\frac{1}{3}$

E podemos escrever:

$$\frac{4}{x^3-5x^2+4x} = \frac{1}{x} + \frac{-4}{3(x-1)} + \frac{1}{3(x-4)}$$

10. Exercícios.

Determinar a e b de modo que sejam identicamente nulos os polinômios:

1) $(ab-1)x^3-(a^2+b^2-2)x^2+(2a-3ab+1)x+a+b-2$
2) $(a^2-b^2)x^3-(a+2b-1)x+2a+4b-2$
3) $(a^2+b^2+2)x^4+(a+b-1)x^3+(ab+6)x+b^2-ab+2$

Determinar a, b e c, de modo que sejam idênticos os polinômios:

4) $2x^4-(a+b)x^3+(a^2+b^2)x+a-c$ e $2x^3-(a+2b-2)x^2+(4-a^2)x+a+b+c$
5) $xy[(a+1)x+(b+c)y]-2y^2$ e $a(x^3+1)+(b+2c)x^2y+(b+c)(y^3+1)-2cy^3$
6) $(a+b)x^5+(a-b)x^3+3x^2-7x+2a-b+c$ e $2x^3+3x^2-7x-3a+b-2c$
7) Decompor o binômio $2x^2+3$ em uma diferença de quadrados do tipo: $(x^2+a)^2-(x^2+b)^2$.
8) Decompor o trinômio $9x^2+45x+63$ em uma diferença de 2 cubos do tipo: $(x+b)^3-(x+a)^3$.

Sem efetuar as seguintes divisões, determinar os seus quocientes e os seus restos:

9) $(x^4-12x^3+47x^2-72x+36):(x^2-8x+12)$
10) $(x^5+2x^3-x^2-3x+1):(x^4-2x^3+3x^2-2x)$
11) $(2x^3-15x^2+11x-3):(x^2-7x+2)$
12) Calcule p e q de modo que o polinômio x^3+2x^2-px+q seja divisível por x^2-1 (PUC – 1963)
13) Determinar a, b e c, para que o polinômio $2x^4-3x^3+ax^2+bx+c$ seja divisível por x^2-7x-6.
14) Sabendo que x^3+1 é divisível por x^2+px+q determine o quociente dessa divisão.

Decompor as frações racionais abaixo em uma soma de frações mais simples.

15) $\frac{2x}{x^2-1}$

16) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Respostas:

1) $a=1$, $b=1$
2) $a=-b=1$ ou $a=b=\frac{1}{3}$
3) impossível
4) $a=0$, $b=2$, $c=-1$
5) $a=0$, $b=-1$, $c=1$
6) $a=b=-c=1$
7) $(x^2+2)^2-(x^2+1)^2$
8) $(x+4)^3-(x+1)^3$
9) x^2-4x+3, $R=0$
10) x^3+2x+1, $R=-x+1$
11) $2x-1$, $R=-1$
12) $p=1$, $q=-2$
13) $a=-14$, $b=9$, $c=18$
14) $x+1$
15) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$
16) $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x-3)}-\frac{1}{x-2}$

11. Divisibilidade de um polinômio de uma variável por um binômio da forma $x-a$. De grande interesse na Álgebra, o problema da divisão de um *polinômio de uma variável* por um binômio da forma $x-a$ é resolvido por meio de regras práticas muito simples.

12. Teorema.

> O resto da divisão de um polinômio de uma variável x por $x-a$ é o valor numérico desse polinômio para $x=a$.

Seja $P(x)$ um polinômio de uma variável de grau m e sejam $Q(x)$ e R o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-a)$, sendo a um *número relativo*.

É evidente que $Q(x)$ é do grau $m-1$ e que R é uma constante (grau menor do que o divisor).

De acordo com o princípio fundamental da divisão:

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

Fazendo na igualdade anterior $x = a$, vem:

$$P(a) = (a-a)\,Q(a) + R \quad \therefore \quad P(a) = R$$

e está demonstrado o nosso teorema.

13. Exercício.

Calcular, de acordo com o teorema anterior, o resto da divisão

$$(x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 2) : (x+2)$$

Como $a = -2$, o resto será:

$$R = (-2)^4 - 2(-2)^3 - (-2)^2 - 3(-2) - 2 = 16 + 16 - 4 + 6 - 2 = 32$$

14. Condição de divisibilidade. A condição necessária e suficiente para que um polinômio de uma variável $P(x)$ seja divisível por $x-a$ é que se tenha $P(a) = 0$.

Esta condição é uma conseqüência do teorema do N.º 12.

15. Regra de Ruffini (*). Consideremos um polinômio de uma variável

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

e seja o quociente de $P(x)$ por $x-a$

$$Q(x) = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-2} x + b_{m-1}$$

(*) P. Ruffini matemático italiano (1765-1822).

Pelo princípio fundamental da divisão temos:

$$P(x) = (x-a)\quad Q(x) + R$$

ou

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = b_0 x^m + (b_1 - b_0 a) x^{m-1} + (b_2 - b_1 a) x^{m-2} + \ldots + (b_{m-1} - b_{m-2} a) x + R - b_{m-1} a$$

De acordo com a condição de identidade dos polinômios, temos:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 - b_0 a = a_1 \\ b_2 - b_1 a = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m-1} - b_{m-2} a = a_{m-1} \\ R - b_{m-1} a = a_m \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = b_0 a + a_1 \\ b_2 = b_1 a + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m-1} = b_{m-2} a + a_{m-1} \\ R = b_{m-1} a + a_m \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Essas relações (I) definem a chamada *regra de Ruffini*, para formação do quociente e do resto da divisão de $P(x)$ por $x-a$, e pode ser enunciado como veremos a seguir.

Regra de Ruffini. O quociente da divisão de um *polinômio de uma variável* x, de grau m, por um binômio da forma $x-a$ (a um número relativo) é um polinômio de uma variável x, de grau $m-1$, onde:

1.º) o coeficiente do 1.º termo é igual ao do 1.º termo do dividendo ($b_0 = a_0$);

2.º) o coeficiente de cada termo, a partir do 2.º é igual ao produto de a pelo coeficiente do termo anterior somado ao coeficiente do termo de mesma ordem do dividendo (relações I).

O resto da divisão é igual ao produto de a pelo termo independente do quociente, somado ao termo independente do dividendo ($R = b_{m-1} a + a_m$).

16. Observação. Quando $P(x)$ for incompleto deve-se considerar como sendo *zero* os coeficientes dos termos que nele falte.

17. Dispositivo prático de Ruffini. As operações indicadas na regra de Ruffini para obter os coeficientes do quociente e o resto podem ser efetuados mais rapidamente por meio de um *dispositivo prático*, que veremos a seguir.

O dispositivo consta de 3 linhas.

a) Na primeira linha, escrever os coeficientes dos termos de $P(x)$ $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$, colocando zero como coeficiente dos termos que faltarem e escrevendo a na primeira linha, à esquerda de a_0 e dele separado por um traço vertical.

b) Escrever a_0 no primeiro lugar da terceira linha. Multiplicar a_0 por a e colocar o produto em baixo de a_1. Somar esse produto com a_1 e colocar o resultado na 3.ª linha. Multiplicar este por a, colocar em baixo de a_2 e somar. Continuar este processo enquanto for possível.

c) A última soma na 3.ª linha será o resto R, e os números da 3.ª linha que o precedem são, da esquerda para a direita, os coeficientes do quociente $(b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$.

Vejamos essa disposição nos exemplos que se seguem.

18. Exemplos.

1) Dividir $5x^4 + 2x^2 - 7x + 1$ por $x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 5 & 0 & 2 & -7 & 1 \\ & & 10 & 20 & 44 & 74 \\ \hline & 5 & 10 & 22 & 37 & (75) \end{array}$$

$Q(x) = 5x^3 + 10x^2 + 22x + 37$ e $R = 75$

2) Dividir $x^5 - 3x^2 + 2x - 4$ por $x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -4 \\ & & -1 & 1 & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -4 & 6 & (-10) \end{array}$$

$Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 6$ e $R = -10$

19. Observações.

1.ª) O resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$ é o valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ (N.º 12), então podemos com o auxílio desse dispositivo prático calcular o valor numérico de *um polinômio de uma variável*. Exemplo:

Observando o N.º 18 vemos que 75 é o valor numérico de $5x^4 + 2x^2 - 7x + 1$ para $x = 2$, e que -10 é o valor numérico de $x^5 - 3x^2 + 2x - 4$ para $x = -1$.

2.ª) O dispositivo de Ruffini pode ser apresentado em duas linhas apenas, e deve ser usado após ter o aluno aprendido bem o dispositivo usado nos exemplos do N.º 18.

Consiste apenas em se suprimir a 2.ª linha daquele dispositivo e efetuar mentalmente a soma dos produtos (N.º 17 — *b*) com os coeficientes do dividendo. Exemplo:

Dividir $x^4 + 2x^3 - 3$ por $x + 3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ & 1 & -1 & 3 & -9 & (24) \end{array}$$

Temos: $Q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 9$ e $R = 24$

20. Exercícios.

Sem efetuar a divisão, determinar os restos das seguintes divisões:

1) $(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 12) : (x + 3)$ (U. Gama Filho — 1970)

2) $(3x^3 - 2x + 1) : (x - 2)$

Empregando o dispositivo prático de Ruffini, calcule o valor numérico dos polinômios abaixo, para os valores respectivos, dados.

3) $4x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ para $x = 1$

4) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 6$ para $x = 3$

5) $5x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 11x - 6$ para $x = -3$

Empregando o dispositivo de Ruffini determine os valores de a e b para que as divisões abaixo sejam exatas:

6) $(x^3 + ax^2 + 3x + 7) : (x - 1)$

7) $(2x^4 + 8x^3 - x^2 + ax + 16) : (x + 4)$

8) $(x^3 + 3x^2 + 5x + a) : (x + 1)$

9) $(x^3 + 2x^2 - ax - b) : [(x + 1)(x + 3)]$

10) $(x^3 - ax^2 + 11x - b) : [(x - 1)(x - 3)]$

11) $(x^4 + ax^3 + bx - 1) : [(x - 1)(x - 3)]$

Empregando o dispositivo de Ruffini, efetuar as seguintes divisões:

12) $(x^3+2x^2-x-2):(x+1)$
13) $(x^3-2x^2+x):(x-1)$
14) $(x^3+27):(x+3)$
15) $(x^5-a^5):(x+a)$
16) $(x^4+2):(x-2)$

Respostas:

1) 0
2) 21
3) 8
4) 102
5) 0
6) $a=-11$
7) $a=0$
8) $a=3$
9) $a=5$ e $b=6$
10) $a=b=6$
11) $a=-\frac{10}{3}$ e $b=\frac{10}{3}$
12) x^2+x-2 e $R=0$
13) $x^5-x^4-x^3-x^2-x$ e $R=0$
14) x^2-3x+9 e $R=0$
15) $x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$ e $R=-2a^5$
16) x^3+2x^2+4x+8 e $R=18$

21. Fórmula de Taylor para os polinômios (*). Seja um polinômio de uma variável

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \quad + a_{m-1} x + a_m \quad (1)$$

Substituindo x por $x+h$, obtemos:

$$P(x+h) = a_0 (x+h)^m + a_1 (x+h)^{m-1} + a_2 (x+h)^{m-1} + \ldots + a_{m-1} (x+h) + a_m \quad (2)$$

Podemos admitir que desenvolvendo o 2.º membro de (2) e ordenando segundo as potências crescentes de h, se tenha:

$$P(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots + Lh^m \quad (3)$$

onde $A, B, C, \ldots, L$ são coeficientes a determinar.

Derivando (3) sucessivamente, em relação a h, temos:

$$P'(x+h) = B + 2Ch + 3Dh^2 + \ldots + mLh^{m-1}$$
$$P''(x+h) = 2C + 2 \cdot 3Dh + 3 \cdot 4 \cdot Eh^2 + \ldots + m(m-1) Lh^{m-2}$$
$$P'''(x+h) = 2 \cdot 3D + 2 \cdot 3 \cdot 4Eh + \ldots + (m)(m-1)(m-2) Lh^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(m-1)}(x+h) = (m-1)! + m(m-1)\ldots 2\,Lh$$
$$P^{(m)}(x+h) = m!\,L$$

(*) Brook Taylor, matemático inglês (1685-1731).

Fazendo $h=0$ em $P(x+h)$ e suas derivadas, vem:

$$A = P(x),\ B = P'(x),\ C = \frac{1}{2!} P''(x) \ldots L = \frac{1}{m!} P^{(m)}(x)$$

Substituindo esses valores em (3) temos:

$$\boxed{P(x+h) = P(x) + hP'(x) + \frac{h^2}{2!} P''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(x)} \quad (I)$$

A (I) é denominada *fórmula de Taylor para os polinômios*, e é de grande aplicação no estudo das equações algébricas.

Se na fórmula (I) permutarmos x e h teremos:

$$P(x+h) = P(h) + xP'(h) + \frac{x_2}{2!} P''(h) + \ldots + \frac{x_m}{m!} P^{(m)}(h) \quad (II)$$

Se substituirmos, na (II), x por $x-h$, obteremos:

$$P(x) = P(h) + (x-h) P'(h) + \frac{(x-h)^2}{2!} P''(h) + \ldots + \frac{(x-h)^m}{m!} P^{(m)}(h) \quad (III)$$

A (III) constitui um outro aspecto da fórmula de Taylor, e é também usada em várias aplicações.

22. Algoritmo de Ruffini-Horner (*). A determinação dos coeficientes da fórmula de Taylor, pode ser obtida facilmente com auxílio desse algoritmo, que consiste no que iremos expor a seguir.

Da (III), do N.º 21, podemos escrever:

$$P(x) = (x-h)\left[P'(h) + \frac{x-h}{2!} P''(h) + \ldots + \frac{(x-h)^{m-1}}{m!} P^{(m)}(h)\right] + P(h)$$

ou, chamando a quantidade entre colchetes de $Q_1(x)$,

$$P(x) = (x-h) Q_1(x) + P(h)$$

o que indica que na divisão de $P(x)$ por $(x-h)$, o quociente é $Q_1(x)$ e o resto é $P(h)$.

(*) W. G. Horner, matemático. Séculos XVIII e XIX.

Mas, $Q_1(x)$ pode também ser escrito assim:

$$Q_1(x) = (x-h)\left[\frac{1}{2!}P''(h) + \frac{x-h}{3!}P'''(h) + \ldots + \frac{(x-h)^{m-2}}{m!}P^m(h)\right] + P'(h)$$

ou, chamando à expressão entre colchetes de $Q_2(x)$,

$$Q_1(x) = (x-h)\,Q_2(x) + P'(h)$$

o que indica também que na divisão de $Q_1(x)$ por $x-h$, o quociente é $Q_2(x)$ e o resto é $P'(h)$.

Repetindo esse raciocínio, chegaríamos a ver que, nas divisões seguintes dos quocientes obtidos por $x-h$, iríamos obter os restos:

$$\frac{1}{2!}P''(h), \quad \frac{1}{3!}P'''(h), \ldots$$

O último quociente obtido será uma constante e, por extensão, dizemos que ele constitui o próprio resto de sua divisão por $x-h$.

Assim o último quociente obtido, e que representa o último coeficiente da fórmula de Taylor, será:

$$Q^m(x) = \frac{1}{m!}P^{(m)}(h) = a_0$$

Concluímos, então, que para determinar os coeficientes da fórmula de Taylor basta efetuar a divisão de $P(x)$ por $x-h$ e a seguir cada um dos quocientes encontrados repetidamente por $x-h$.

O dispositivo prático de Ruffini simplifica muito a aplicação desse algoritmo, conforme veremos nos exemplos a seguir.

23. Exemplos.

I) Dado o polinômio

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x + 1$$

determinar $P(x+1)$.

De acordo com a fórmula (II) do N.º 21, temos:

$$P(x+1) = P(1) + P'(1)\,x + \frac{P''(1)}{2!}x^2 + \frac{P'''(1)}{3!}x^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}x^4$$

onde os coeficientes podem ser determinados facilmente mediante o algoritmo de Ruffini-Horner, cuja aplicação é feita mediante o seguinte dispositivo (quando se desenvolve $P(x+h)$, divide-se repetidamente por $x-h$):

1	2	−3	0	1	1	
	2	−1	−1	0	(1)	$P(1)$
	2	1	0	(0)		$P'(1)$
	2	3	(3)			$P''(1)/2!$
	2	(5)				$P'''(1)/3!$
	(2)					$P^{(4)}(1)/4!$

Substituindo, temos:

$$P(x+1) = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 1$$

II) Desenvolver o polinômio

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 1$$

segundo as potências de $x+1$.

De acordo com a fórmula (III) do N.º 21, temos:

$$P(x) = P(-1) + P'(-1)(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{P^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4$$

Calculando os coeficientes do desenvolvimento de $P(x)$ com auxílio do algoritmo de Ruffini-Horner, vem:

−1	2	0	−3	2	−1
	2	−2	−1	3	(−4)
	2	−4	3	(0)	
	2	−6	(9)		
	2	(−8)			
	(2)				

$$P(x) = 2(x+1)^4 - 8(x+1)^3 + 9(x+1)^2 - 4$$

24. Exercícios para resolver.

1) Dado o polinômio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x - 1$ achar $P(x-1)$.
2) Dado o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 20$ achar $P(x+2)$
3) Desenvolver o polinômio $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x - 3$ segundo as potências de $x-1$
4) Desenvolver o trinômio $x^2 - 2x + 1$ segundo as potências de $x+3$.

RESPOSTAS:

1) $2x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 16x + 6$
2) $x^5 + 10x^4 + 39x^3 + 74x^2 + 70x + 8$
3) $5(x-1)^4 + 16(x-1)^3 + 18(x-1)^2 + 10(x-1)$
4) $(x+3)^3 - 9(x+3)^2 + 25(x+3) - 20$

25. Questões de concursos para resolver.

1) Achar os valores de l, m e n que satisfazem a identidade.

$$5x^2 - 10x + 18 \equiv l(x-2)(x-3) + m(x-1)(x-3) + n(x-1)(x-2)$$

(E. Militar – 1940).

2) Se f e g são dois polinômios de grau n, qual é o grau de $f+g$ e de fg?

(CESCEM – 68 – S. P.)

3) O polinômio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ é divisível por $x+2$ e por $2x-1$. Calcular a e b e decompor o polinômio em fatores do 1.º grau.

(E. N. Arquitetura – 1947).

4) Decompor a fração $\dfrac{3t^3 - 9}{t^4 - 9t}$ em uma soma de frações cujos denominadores são do 1.º grau.

(E. N. Arquitetura – 1946)

5) Calcule o valor de m que torna o polinômio $x^4 - 3x^3 + mx - 2$ divisível por $x - 2$.

(U. E. G. – 1971)

6) Calcule k de modo que o resto da divisão de $2x^3 - 2x - k$ por $2x+3$ seja igual a 1.

(E. P. U. C. – 1969)

7) Calcule m de modo que o resto da divisão de $2x^3 - 2x + m$ por $-2x+3$ seja igual a 1.

(U. E. G. – 1970)

8) Calcular o quociente e o resto da divisão do polinômio $2x^3 - 5x^2 - 9$ por $x-3$, sem efetuar a operação.

(E. P. C. Exército – Seleção. 3.º Ano – 1952).

9) Sendo m e n dois números tais que o polinômio $x^4 - 4x^3 + mx^2 + 4x + n$ é divisível por $(x-1)(x-3)$, então, $m+n$ vale

(CESCEA – 71 – S. P.).

10) Na divisão do polinômio $7x^6 + \ldots + 8x - 12$ por $x+2$ encontrou-se o quociente $7x^5 + \ldots + 4$; qual o resto dessa divisão?

(E. P. C. Exército – 3.º Ano – 1953).

11) Decompor numa soma de frações de denominadores racionais a fração $\dfrac{3}{x^2 - 4}$.

(E. P. C. Exército – 3.º Ano – 1953).

12) Qual é o quociente da divisão de $x^3 - 20x + 16$ por $x - 4$?

(E. P. C. Aeronáutica – 3.º Ano – 1950).

13) Qual é o valor numérico de p que torna o polinômio $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 5x - p$ divisível por $x+2$?

(E. P. C. Aeronáutica – 2.º Ano – 1951).

14) Dê o valor de m no polinômio $x^3 - 2x^2 + mx - 1$ para que o resto de sua divisão por $x+1$ seja 1.

(E. Naval – 13/3/52).

15) Efetuar pelas regras de Briot Ruffini (*), a divisão de $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por $2x+3$.

(Filosofia – Pernambuco – 1954)

16) Os valores de A, B e C tais que $\dfrac{8}{x^3 - 4x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+2}$ são respectivamente.

(CESCEM – 72 – S. P.)

17) No trinômio $(m-1)x^2 - (p+5)x + t$, o parâmetro m é o menor dos numeradores das frações em que se decompõe $\dfrac{7x+13}{x^2+2x-3}$, e p é o resto da divisão de $x^2 - x - 3$ por $x+2$.

Determinados m e p, calcular os valores de t que verificam sempre a inequação $(m-1)x^2 - (p+5)x - t > 0$

(E. Naval – 1.º Ano, 3.ª P. Parcial – 1951).

18) Na divisão do polinômio $F(x)$ pelo binômio do 1.º grau $f(x)$ recorreu-se ao dispositivo prático de Ruffini e encontrou-se:

	3	0	−147	*	*	*	*	−80
*	*	21	*		1	−4	12	(*)

Assim sendo pode-se afirmar que

$F(x) =$ $f(x) =$ $Q(x) =$ e $R =$

NOTA: Um defeito de impressão tornou alguns números ilegíveis (aparecem tais números substituídos por *asteriscos*).

Pois bem, V., raciocinando, contornará esta dificuldade

(I. Educação – Niterói – 3/6 46)

19) Achar a condição necessária e suficiente para que a expressão $\dfrac{ay + bx + c}{a'y + b'x + c'}$ seja independente de x.

(Exame Admissão – Lisboa – 1943)

20) Mostrar, sem efetuar a divisão, que o polinômio $x^{n+1} - (n+1)x + n$ é divisível por $(x-1)^2$ e formar o quociente.

(E. Engenharia – Minas – 1949)

21) Determinar os números a, b e o maior inteiro m de tal modo que o polinômio $x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$ seja divisível por $(x-1)^m$.

EPUSP – 1962)

(*) F. Briot: matemático francês. Século XIX.

22) Determinar m e n no polinômio $2x^4 + 3x^3 + mx^2 - nx - 3$ para que seja divisível pelo polinômio $x^2 - 2x - 3$.

a) $m = -18$ e $n = 20$ *b*) $m = 19$ e $n = -23$ *c*) $m = 19$ e $n = 23$
d) $m = 21$ e $n = 21$ *e*) $m = -17$ e $n = 24$

(CICE 1968

23) Calcule m para que o polinômio $2x^3 - mx^2 + m^2x + 1$ seja divisível por $2x + 1$.

(U. Fluminense – Engenharia – 1969

RESPOSTAS:

1) $l = 2$, $m = 0$, $n = 3$
2) $\leq n$ e $2n$
3) $a = 5$, $b = 1$ e $P(x) = (x+2)(2x-1)(x+1)$
4) $\frac{1}{l} + \frac{1}{l+3} + \frac{1}{l-3}$
5) $m = -1$
6) $k = \frac{19}{4}$
7) $-\frac{11}{4}$
8) $2x^3+x+3$, $R = 0$
9) -1
10) Ver N.º 17, $R = b_{m-1}a + a_m$ $\therefore$ $R = -20$.
11) $\frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{4x-8} - \frac{3}{4x+8}$
12) $x^2 + 4x - 4$
13) $p = 42$
14) $m = -3$
15) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{81}{16}x + \frac{185}{32}$ e $R = -\frac{587}{32}$
16) -2, 1 e 1
17) $t < -16$
18) $F(x) = 3x^7 - 14x^6 - x^5 + 3x^2 + 40x - 80$
$f(x) = x - 7$
$Q(x) = 3x^6 + 21x^5 - x^3 - 4x + 12$
$R = 4$
19) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
20) $x^{n-1} + 2x^{n-2} - \ldots + (n-1)x + n$
21) $a = 2$, $b = 1$, $m = 3$
22) c
23) $m = 1$ ou $m = -\frac{3}{2}$

CAPÍTULO XVIII

Introdução à teoria das equações

1. Polinômios e equações algébricas em geral. Seja um polinômio de uma variável

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \qquad (I)$$

onde m é positivo e inteiro e $a_0 \neq 0$.

Esse polinômio (I) é também chamado de *função racional inteira* de x de grau m.

Se igualarmos essa função $F(x)$ a zero, obteremos uma *equação racional inteira*.

Assim:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (II)$$

é uma equação racional inteira de grau m.

Todo valor de x, real ou complexo, que anular o polinômio $F(x)$ diz-se uma *raiz* ou *zero* de (II).

Então, raiz de uma equação $F(x) = 0$ é um valor x_0 tal que $F(x_0) = 0$.

Uma equação diz-se *algébrica* quando as incógnitas que nela figuram estejam submetidas apenas a operações algébricas.

Toda *equação algébrica* pode sempre, mediante um certo número de operações, ser colocada sob a forma de uma equação racional inteira da forma (II).

A (II) diz-se *forma canônica* das equações algébricas de uma variável.

Podemos, então, reduzir o estudo das equações algébricas ao estudo das equações sob a forma canônica.

2. Observações.

1.ª) Uma equação algébrica escrita sob a forma canônica (II) pode ter os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ reais ou complexos. Estudaremos apenas as equações (II) de coeficientes reais.

2.ª) Uma equação algébrica pode ter várias incógnitas. Estudaremos apenas aquelas que possuam uma só incógnita de raízes reais ou complexas.

3.ª) Quando reduzimos uma equação algébrica fracionária ou irracional à forma canônica, obtemos, algumas vezes, raízes desta equação que não são raízes da primitiva equação, isto é, as duas equações não são *equivalentes*. Essas raízes que não são comuns às duas equações chamam-se *raízes* estranhas da equação dada.

A raiz ou raízes estranhas da equação podem ser excluídas efetuando-se uma verificação posterior. Exemplos:

1) Dada a equação

$$3x + \frac{1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$$

pela supressão dos termos fracionários, ela se reduz a:

$$3x = 3$$

É fácil de ver que $x=1$ é a raiz da segunda equação, mas, não o é da primeira. É pois uma raiz estranha da primeira.

2) Dada a equação

$$\sqrt{x - \sqrt{x-1}} + x = 0$$

podemos reduzí-la à forma canônica:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

É fácil de ver que $x=1$ é a raiz da segunda equação.

Deve ser excluída, pois se substituirmos x por um, na primeira equação (verificação posterior) vemos que *um* é uma raiz estranha.

3. Resolução das equações algébricas. Resolver uma equação algébrica

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

onde os coeficientes são todos reais, é determinar os valores da incógnita x.

Ou ainda, é exprimir a incógnita em função dos coeficientes.

Se as expressões das raízes são funções algébricas dos coeficientes, isto é, se nas expressões dos valores de x intervêm apenas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação (operações algébricas), as soluções são ditas *algébricas*.

Se as expressões ou funções dos coeficientes forem transcendentes (não algébricas) a solução diz-se *transcendente*.

4. Resolução algébrica das equações. Resolver *algebricamente* uma equação algébrica é determinar as soluções algébricas dessa equação.

As equações algébricas do 1.º e do 2.º grau têm soluções algébricas simples e imediatas.

As equações do 3.º e 4.º grau têm soluções algébricas. São, todavia, complexas e laboriosas.

As equações de grau superior ao 4.º grau não possuem soluções algébricas, o que foi demonstrado por Abel (*).

Não podemos, portanto, resolver algebricamente equações de grau superior ao quarto, a não ser em casos especiais, como equações *binômias*, *trinômias* e *recíprocas*.

5. Resolução das equações algébricas numéricas. Como as soluções transcendentes, que são possíveis em qualquer caso, são, infelizmente impraticáveis pela sua complexidade e as soluções algébricas, para as equações do 3.º e 4.º graus são trabalhosas, procurou-se para as equações algébricas numéricas (coeficientes numéricos), de grau maior do que o 2.º, uma solução direta e simples, que não exigisse, para o cálculo de cada raiz, o emprego de qualquer fórmula.

O estudo desse problema, que permite pesquisar as raízes de uma equação numérica, exige o conhecimento sistemático

(*) N. H. Abel, matemático norueguês. Século XIX.

de uma série de propriedades das equações e, portanto, dos polinômios, algumas já estudadas e outras não, porém todas as necessárias apresentadas nesta unidade.

Para evitar possíveis dúvidas, chamaremos a determinação das raízes de uma equação algébrica numérica de *resolução numérica*.

6. Princípio fundamental da teoria das equações algébricas. A teoria das equações algébricas, que estamos estudando nesta unidade, baseia-se no teorema D'Alembert(**), denominado *teorema fundamental da Álgebra*, cuja demonstração, longa e difícil, não faz parte do programa e nem se torna necessária no Curso Colegial, e, cujo enunciado é o seguinte:

> Toda equação algébrica racional e inteira admite pelo menos uma raiz, real ou complexa.

7. Teorema.

> Se x_0 é uma raiz da equação $f(x)=0$, então $x-x_0$ é um fator de $f(x)$.

De fato, seja $f(x) = 0$ uma equação algébrica escrita sob a sua forma canônica. Como possui uma raiz (N.º 6), seja x_0 essa raiz.

Pela definição de raiz temos: $f(x_0) = 0$

Mas, se $f(x_0) = 0$, então, pela condição de divisibilidade $f(x)$ é divisível por $x - x_0$.

8. Teorema recíproco.

> Se $x-x_0$ é um fator de $f(x)$, então x_0 é uma raiz de $f(x)=0$.

Com efeito, se $f(x)$ é divisível por $x - x_0$, então o resto da divisão de $f(x)$ por $x - x_0$ é zero.

Mas, o resto dessa divisão, é $f(x_0)$. Logo $f(x_0) = 0$ e, pela definição de raiz, x_0 é uma raiz de $f(x) = 0$.

(**) J. D'Alembert, matemático francês. Século XVIII.

9. Decomposição de um polinômio em fatores. Seja uma equação algébrica racional inteira de grau m:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (I)$$

De acordo com o princípio fundamental, existe ao menos uma raiz x_1 de $f(x) = 0$.

Então, $f(x) = (x - x_1) f_1(x)$ (II)

sendo pela regra de Ruffini, $f_1(x)$ um polinômio de grau $m-1$, cujo coeficiente do termo de maior grau é a_0.

Igualmente, existe uma raiz x_2 de $f_1(x) = 0$, e

$$f_1(x) = (x - x_2) f_2(x) \quad (III)$$

onde $f_2(x)$ é um polinômio de grau $m-2$, cujo coeficiente do termo de maior grau é a_0.

Prosseguindo com esse raciocínio, obteríamos sucessivamente:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (x - x_3) f_3(x) \\ f_3(x) &= (x - x_4) f_4(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-2}(x) &= (x - x_{m-1}) f_{m-1}(x) \\ f_{m-1}(x) &= a_0 (x - x_m) \end{aligned} \quad (IV)$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades (II), (III) e (IV) e efetuando as simplificações possíveis, obtemos:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) \quad (V)$$

Então, todo polinômio racional inteiro de grau m pode ser decomposto no produto do coeficiente do seu termo de maior grau, por m binômios da forma $x - x_i$ sendo x_i um número real ou complexo, e demonstra-se que essa decomposição só pode ser feita de um único modo.

10. Número de raízes de uma equação algébrica. Dada uma equação algébrica.

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (I)$$

podemos de acordo com o N.º 9, escrevê-la do seguinte modo:

$$f(x) = a_0 (x - r_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) = 0$$

Logo, pelo teorema N.º 8, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ são raízes de $f(x) = 0$.

Como são m fatores da forma $x - x_i$ então a equação (I), de grau m possui m raízes. E não existem raízes diferentes de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, pois não existe outro modo de decomposição de $f(x)$.

Conclusão:

> Toda equação de grau m da forma (I) admite m raízes, distintas ou não, reais ou complexas.

11. Raízes múltiplas. Pode acontecer que as m raízes de uma equação $f(x) = 0$, de grau m, não sejam todas distintas. Suponhamos, por exemplo, que existam α raízes iguais a x_1, β raízes iguais a x_2, ..., γ raízes iguais a x_r, sendo

$$\alpha + \beta + \ldots + \gamma = m$$

Então x_1 diz-se uma raiz múltipla de ordem α, x_2 uma raiz múltipla de ordem β, ..., x_r uma raiz múltipla de ordem γ.

E podemos escrever a equação assim:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \ldots (x - x_r)^\gamma = 0$$

Observação: As raízes múltiplas de ordem dois, chamam-se *raízes duplas*. As raízes múltiplas de ordem três, dizem-se *raízes tríplas*. E, por extensão, as *raízes simples* são as raízes múltiplas de ordem um.

12. Raízes nulas. Se na equação

$$f(x) = a (x - x_1)^\alpha \cdot (x - x_2)^\beta \ldots (x - x_r)^\gamma = 0$$

supusermos que uma de suas raízes, x_1 por exemplo, seja nula, temos:

$$f(x) = a_0 x^\alpha (x - x_2)^\beta \ldots (x - x_r)^\gamma = 0$$

temos uma raiz nula de multiplicidade α.

Reciprocamente, se aparecer o fator x^α, existem α raízes nulas.

Então sempre que, dada uma equação racional inteira $f(x) = 0$, nela existir um fator x^α de modo que se possa escrever a equação sob a forma $x^\alpha f_1(x) = 0$, onde $f_1(x)$ seja um polinômio racional inteiro completo, diremos que $f(x) = 0$ possui α raízes nulas.

Podemos, portanto, no estudo das equações, supor excluídas as raízes nulas, tomando para isso, sempre, equações que possuam termo independente. Exemplo:

Resolver $x^5 - 2x^4 + x^3 = 0$

$x^3 (x^2 - 2x + 1) = 0$

A equação possui 3 raízes nulas e tem-se para resolver a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, que possui uma raiz unitária dupla.

Observações:

1.ª) Uma equação com termo independente não possui raiz nula.

2.ª) Uma equação desprovida de termo independente admite um número de raízes nulas, igual ao menor expoente da incógnita.

13. Exercício.

Determinar a e b de modo que a equação:

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + (3a - 4b)x^2 + (a - 2b - 1)x + (ab - 3) = 0$$

admita duas e somente duas raízes nulas.

De acordo com a 2.ª observação (N.º 12), se a equação tem duas raízes nulas, o menor expoente da incógnita é 2. Logo, devemos ter:

$$\begin{aligned} ab - 3 &= 0 \\ a - 2b - 1 &= 0 \\ 3a - 4b &\neq 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras relações temos:

$$b_1 = 1 \quad e \quad b_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_1 = 3 \quad e \quad a_2 = -2$$

Os valores a_2 e b_2 não satisfazem a terceira relação, porém a_1 e b_1 satisfazem.

Logo, a resposta será: $a = 3$ e $b = 1$

Verificação: Para $a = 3$ e $b = 1$ a equação dada ficaria:

$$x^5 + 2x^4 + x^3 + 5x^2 = 0$$

que de fato possui 2 e somente 2 raízes nulas.

14. Teorema.

> Toda equação algébrica racional inteira de coeficientes reais, que admite a raiz $a+bi$, admite também, a raiz $a-bi$, conjugada da primeira.

Seja $a+bi$ raiz da equação $f(x) = 0$

De acordo com as operações com números complexos, temos:

$$f(a+bi) = A + Bi$$
$$f(a-bi) = A - Bi$$

Logo, se $a+bi$ é raiz de $f(x) = 0$

$$A + Bi = 0 \therefore A = 0 \text{ e } B = 0$$

e, portanto, $A - Bi = 0$

e $a-bi$ é raiz de $f(x) = 0$

15. Indicações sobre o número de raízes reais contidas em um intervalo.

TEOREMA DE BOLZANO(*). (Caso particular).

> Dada uma equação racional inteira de coeficientes reais $f(x)=0$, se substituirmos x por a e por b (sendo $a<b$), temos:
>
> 1.º) se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, o número de raízes reais de $f(x)$, compreendidas entre a e b, será ímpar;
>
> 2.º) se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem os mesmos sinais, o número de raízes reais de $f(x)$, compreendidos entre a e b será par.

A equação $f(x) = 0$, pode ser escrita assim:

$$f(x) = a_0 (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)\, g(x) = 0 \qquad (I)$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as raízes reais, e $g(x)$ o produto dos binômios correspondentes às raízes complexas.

(*) B. BOLZANO, matemático italiano (1781-1848).

Esses binômios, grupados dois a dois são da forma:

$$[x-(a+bi)]\ [x-(a-bi)] = [(x-a)-bi]\ [(x-a)+bi] = (x-a)^2 + b^2$$

pois as raízes complexas são conjugadas.

É fácil de ver que, para quaisquer valores de x, $g(x)$ é sempre positivo, pois todos os seus fatores, da forma $(x-a)^2+b^2$, também o são.

Substituindo em (I), x por a e b, respectivamente, e a seguir multiplicando membro a membro as duas igualdades obtidas, temos:

$$f(a)\, f(b) = a_0^2\, [(a-x_1)(b-x_1)]\, [(a-x_2)(b-x_2) \ldots$$
$$\ldots\ [(a-x_n)(b-x_n)]\, g(a)\, .\, g(b)$$

É fácil de ver que a_0^2, $g(a)$ e $g(b)$ são sempre positivos. E, os produtos entre colchetes são positivos ou negativos, conforme a raiz correspondente esteja exterior ou interior, respectivamente, ao intervalo (a, b).

Logo, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários o segundo membro é negativo e portanto existe um número ímpar de raízes reais; e, se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal o número de raízes reais é par.

Está pois demonstrado o teorema.

16. Observações.

1.ª) A recíproca do teorema anterior é verdadeira e facilmente demonstrável, partindo da última relação do N.º 15.

2.ª) Se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal *pode acontecer de não haver raízes reais* entre a e b, o que está de acordo com a 2.ª parte do teorema de Bolzano, pois não havendo raízes reais, esse número é *zero*, que é par.

3.ª) Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários existe, pelo menos uma raiz real entre a e b, o que está de acordo com a 1.ª parte do teorema de Bolzano, pois *um* é ímpar.

17. Conseqüências do teorema de Bolzano.

1.ª) Toda equação racional inteira de coeficientes reais e de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real, de sinal ao contrário de seu termo independente.

Seja a equação racional inteira de coeficientes reais, $f(x) = 0$, de grau ímpar. Temos:

$$f(-\infty) < 0 \quad \text{e} \quad f(+\infty) > 0 \quad (\text{se } a_0 > 0)$$

Como, para $x = 0$, $f(0) = a_m$ (termo independente).

Então, no intervalo $(-\infty, 0)$, existe pelo menos uma raiz real (N.º 15), se $a_m > 0$, e que é negativa, evidentemente.

E, no intervalo $(0, +\infty)$ existirá pelo menos uma raiz real, se $a_m < 0$, e será positiva, obviamente.

Então, quer a_m seja maior ou menor do que zero existirá pelo menos uma raiz real e, seu sinal será contrário ao de a_m.

2.º) Toda equação racional inteira de coeficientes reais de grau par, tendo o termo independente negativo, admite pelo menos duas raízes reais.

Seja a equação racional inteira de coeficientes reais, $f(x) = 0$, de grau par e de termo independente $a_m < 0$.

Temos: $f(-\infty) > 0$ e $f(+\infty) > 0$ (se $a_0 > 0$)

Como $f(0) = a_m < 0$

Então, pelo teorema de Bolzano, entre $-\infty$ e zero existe pelo menos uma raiz real e, entre zero e $+\infty$ existe, também, pelo menos uma raiz real.

Logo, a equação dada admite, pelo menos, duas raízes reais.

18. Exercícios para resolver.

Determinar m e n para que as equações abaixo satisfaçam as condições indicadas:

1) $5x^2 - (2m - n)x + (m^2 - 1) = 0$
admita uma raiz nula e só uma.

2) $mx^4 + x^3 - (n^2 - 2n)x + (3n - 2)x + n - 1 = 0$
admita uma única raiz nula.

3) $x^5 - mx^4 + nx^3 - (m + 1)x^2 + (2m + n)x - mn - 2 = 0$
possua duas e só duas raízes nulas.

4) Sabendo que $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$ diga se 2 é raiz da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

5) O número 5 é raiz da equação do exercício anterior?

6) Quantas raízes possui a equação $x^3 - 3x^2 + x = 0$.

7) Quantas raízes nulas possui a equação do exercício anterior?

8) Quantas raízes nulas possui a equação: $x^7 - x^5 + 3 = 0$?

9) Sabendo-se que $1 \pm i$ é uma raiz da equação $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$, diga uma outra raiz dessa equação.

10) Dada a equação $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ e sabendo que $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$, diga se essa equação tem raízes reais.

11) A equação $x^7 - 2x^5 + x^3 - x + 13 = 0$ possui alguma raiz negativa?

12) Pode a equação $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8 = 0$ ter todas as raízes da forma $a + bi$? (a e b positivos).

13) É possível formar a equação do 2.º grau cujas raízes são $3 + 2i$ e $3 - 2i$?
(E. N. Química – 1945).

14) Resolva a equação: $(x - 1)x^2 = x(x + 1) - 2x$.
(E. Engenh. Aeronáutica – ITA – 1950).

RESPOSTAS:

1) $m = 1$ e $n \neq 3$ ou $m = -1$ e $n \neq -2$
2) Impossível
3) $m = 1$ e $n = -2$
4) Sim (Ver N.º 8)
5) Não (Ver N.º 7)
6) 5 (Ver N.º 10)
7) 1 (Ver N.º 12)
8) Nenhuma (Ver N.º 12)
9) $1 + i$
10) Sim (Ver N.º 15)
11) Sim (Ver N.º 17 – 1.º)
12) Não (Ver N.º 17 – 2.º)
13) Sim. É $x^2 - 6x + 13 = 0$
14) As raízes são 0, 1 e 1

19. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação. Dada a equação algébrica racional inteira de coeficientes reais de grau m.

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \qquad (I)$$

cujas raízes são $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$.

De acordo com o N.º 9, podemos escrevê-la assim:

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{m-1})(x - x_m) = 0 \qquad (II)$$

Efetuando o produto dos m binômios de (II), vem:

$$a_0 x^m - a_0 (x_1 + \ldots + x_m) x^{m-1} + a_0 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{m-1} x_m) x^{m-2} + \ldots + (-1)^m a_0 x_1 x_2 \ldots x_m = 0$$

Como os primeiros membros da (I) e desta última equação devem ser idênticos, temos:

Seja a equação racional inteira de coeficientes reais, $f(x) = 0$, de grau ímpar. Temos:

$$f(-\infty) < 0 \quad \text{e} \quad f(+\infty) > 0 \quad (\text{se } a_0 > 0)$$

Como, para $x = 0$, $f(0) = a_m$ (termo independente).

Então, no intervalo $(-\infty, 0)$, existe pelo menos uma raiz real (N.º 15), se $a_m > 0$, e que é negativa, evidentemente.

E, no intervalo $(0, +\infty)$ existirá pelo menos uma raiz real, se $a_m < 0$, e será positiva, obviamente.

Então, quer a_m seja maior ou menor do que zero existirá pelo menos uma raiz real e, seu sinal será contrário ao de a_m.

2.º) **Toda equação racional inteira de coeficientes reais de grau par, tendo o termo independente negativo, admite pelo menos duas raízes reais.**

Seja a equação racional inteira de coeficientes reais, $f(x) = 0$, de grau par e de termo independente $a_m < 0$.

Temos: $f(-\infty) > 0$ e $f(+\infty) > 0$ (se $a_0 > 0$)

Como $f(0) = a_m < 0$

Então, pelo teorema de Bolzano, entre $-\infty$ e zero existe pelo menos uma raiz real e, entre zero e $+\infty$ existe, também, pelo menos uma raiz real.

Logo, a equação dada admite, pelo menos, duas raízes [illegible]

18. Exercícios para resolver.

Determinar m e n para que as equações abaixo satisfaçam as condições indicadas:

1) $5x^2 - (2m - n)x + (m^2 - 1) = 0$
admita uma raiz nula e só uma.

2) $mx^4 + x^3 - (n^2 - 2n)x + (3n - 2)x + n - 1 = 0$
admita uma única raiz nula.

3) $x^5 - mx^4 + nx^3 - (m + 1)x^2 + (2m + n)x - mn - 2 = 0$
possua duas e só duas raízes nulas.

4) Sabendo que $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$ diga se 2 é raiz da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

5) O número 5 é raiz da equação do exercício anterior?

6) Quantas raízes possui a equação $x^5 - 3x^3 + x = 0$.

7) Quantas raízes nulas possui a equação do exercício anterior?

8) Quantas raízes nulas possui a equação: $x^7 - x^6 + 3 = 0$?

9) Sabendo-se que $1 \pm i$ é uma raiz da equação $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x + 2 = 0$, diga uma outra raiz dessa equação.

10) Dada a equação $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ e sabendo que $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$, diga se essa equação tem raízes reais.

11) A equação $x^7 - 2x^5 + x^3 - x + 13 = 0$ possui alguma raiz negativa?

12) Pode a equação $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8 = 0$ ter todas as raízes da forma $a + bi$? (a e b positivos).

13) É possível formar a equação do 2.º grau cujas raízes são $3 + 2i$ e $3 - 2i$?
(E. N. Química – 1945).

14) Resolva a equação: $(x - 1)x^2 = x(x + 1) - 2x$.
(E. Engenh. Aeronáutica – ITA – 1950)

RESPOSTAS:

1) $m = 1$ e $n \neq 2$ ou $m = -1$ e $n \neq -2$
2) Impossível
3) $m = 1$ e $n = -2$
4) Sim (Ver N.º 5)
5) Não (Ver N.º 7)
6) 5 (Ver N.º 10)
7) 1 (Ver N.º 12)
8) Nenhuma (Ver N.º 12)
9) $1 + i$
10) Sim (Ver N.º 15)
11) Sim (Ver N.º 17 – 1.º)
12) Não (Ver N.º 17 – 2.º)
13) Sim. É $x^2 - 6x + 13 = 0$
14) As raízes são 0, 1 e 1

19. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação. Dada a equação algébrica racional inteira de coeficientes reais de grau m.

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \qquad \text{(I)}$$

cujas raízes são $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$.

De acordo com o N.º 9, podemos escrevê-la assim:

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{m-1})(x - x_m) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Efetuando o produto dos m binômios de (II), vem:

$$a_0 x^m - a_0 (x_1 + \ldots + x_m) x^{m-1} + a_0 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{m-1} x_m) x^{m-2} + \ldots + (-1)^m a_0 x_1 x_2 \ldots x_m = 0$$

Como os primeiros membros da (I) e desta última equação devem ser idênticos, temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= -a_0 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ a_2 &= a_0 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_{n-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= (-1)^n a_0 x_1 x_2 \ldots x_n \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

De (III) obtemos as relações que unem os coeficientes e as raízes da equação (I):

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

20. Composição das equações. Com o auxílio das relações (*A*) podemos efetuar a composição ou formação de uma equação algébrica. Exemplo:

Compor a equação cujas raízes são 1, 2 e 3.

A equação será do 3.º grau da forma:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 + \frac{a_1}{a_0} x^2 + \frac{a_2}{a_0} x + \frac{a_3}{a_0} = 0$$

De acordo com as relações (*A*) temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_2}{a_0} = 1 \,.\, 2 + 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 = 11$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$$

Então a equação pedida será:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Poder-se-ia compor, também, a equação assim:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

e a seguir efetuando as multiplicações.

21. Observação. As relações (*A*) não servem como solução do problema geral da resolução das equações.

Entretanto, se as raízes estiverem previamente ligadas por determinadas condições, as (*A*) servirão para resolver equações, ou, pelo menos, para baixar o grau dessas equações.

Essas relações, portanto, contribuem direta ou indiretamente para a resolução das equações. Exemplos:

1) Resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ sabendo-se que uma das raízes é a soma das outras duas.

Sejam a, b e c as raízes dessa equação

Temos: $$a = b + c \qquad (1)$$

As relações (*A*) permitem escrever:

$$\begin{cases} a + b + c = 6 & (2) \\ ab + ac + bc = 11 & (3) \\ abc = 6 & (4) \end{cases}$$

E resolvendo o sistema formado pelas equações acima, temos que as raízes da equação dada são 1, 2 e 3.

2) Determinar a condição para que as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ estejam em progressão aritmética.

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.

Se as raízes estão em progressão aritmética, pode-se escrever:

$$x_2 = x_1 + r \quad \text{e} \quad x_3 = x_1 + 2r$$

Das relações (A) temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} \qquad (3)$$

De (1) temos:

$$3x_1 + 3r = -\frac{b}{a} \therefore x_1 = -r - \frac{b}{3a}$$

Considerando-se este valor (4) temos:

$$x_2 = -r - \frac{b}{3a} + r = -\frac{b}{3a} \text{ e } x_3 = -r - \frac{b}{-3a} + 2r = r - \frac{b}{-3a}$$

Substituindo os valores de x_1, x_2 e x_3 em (2), e desenvolvendo, temos:

$$r^2 = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2}$$

Fazendo a mesma substituição em (3) e desenvolvendo, obtemos:

$$r^2 = \frac{b^2 - 27a^2 d}{9a^2 b}$$

Comparando essas duas últimas relações, temos:

$$2b^3 - 9abc + 27a^2 d = 0$$

que é a condição pedida

22. Exercícios para resolver.

Compor as equações cujas raízes são:

1) 2, 3 e 4
2) 1, $2+3i$ e $2-3i$
3) 2, -2, 3 e -3
4) $1+i$, $1-i$, $-1+3i$ e $-1-3i$
5) 1, -3, i e $-i$
6) 3, 2, 0 e -5 (U.E.C. - 1972).
7) 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$ e 2
8) 1, 2, 3, 4 e 5

Achar a soma e o produto das raízes das equações:

9) $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$
10) $x^3 \quad x + 5 = 0$
11) $x^4 - x^3 + x = 0$
12) $x^5 + 2x^3 - x \cdot 11 = 0$
13) $3x^4 - 6x^3 + x - 9 = 0$
14) $2x^4 - 5x^3 + 4 = 0$
15) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = 0$
16) $x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

17) Resolver a equação $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ sabendo-se que duas de suas raízes são simétricas.

18) Resolver a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ sabendo-se que uma das raízes é igual à diferença das outras duas.

19) Resolver a equação $x^3 \cdot 9x^2 + 24x - 20 = 0$ sabendo-se que duas de suas raízes são iguais.

20) Que condições devem satisfazer os coeficientes da equação $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$, para que o número zero seja raiz dupla desta equação?

(Engenharia - 1966 - GB).

21) A soma dos quadrados das raízes da equação $2x^3 - 8x^2 - 60x + k = 0$ é

(ITA 72)

22) Resolver a equação $x^3 + px + q = 0$ sabendo-se que uma das raízes é a soma das outras. Qual o valor de q para que essa condição se verifique?

23) Resolver a equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$ sabendo que a relação entre duas de suas raízes é -2.

24) Achar as raízes de $x^3 - 9x^2 + 23x \quad 15 = 0$, sabendo que elas estão em progressão aritmética. Economia - UFRJ - 1971).

25) Resolver a equação $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$ sabendo que suas raízes estão em progressão geométrica.

26) Resolver a equação $2x^4 - 11x^3 + 18x - 9 = 0$ sabendo que uma raiz é a média harmônica das outras.

27) Dê a soma dos produtos distintos das raízes, tomadas três a três, da equação $8x^5 - 8x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$. (ENE - 1961).

Determinar m nas equações abaixo de modo que satisfaçam as condições indicadas:

28) $x^3 - 7x + m = 0$ tenha uma raiz igual ao dobro da outra. U.E.C - 1972).

29) $x^3 - x^2 + mx + 21 = 0$ tenha a soma de duas de suas raízes igual a 4.

30) $6x^3 - x^2 - 20x + m = 0$ tenha uma raiz inversa da outra.

31) $x^3 + mx^2 - 8x + 8 = 0$ tenha suas raízes em progressão aritmética

32) $2x^3 - 21x^2 + mx - 16 = 0$ tenha suas raízes em progressão geométrica.

33) Determinar a condição para que duas raízes da equação $x^3 - bx^2 + cx - d = 0$ sejam simétricas.

34) Determinar m de modo que a equação $x^3 - 9x^2 + (m+8)x - m = 0$ tenha as raízes em P.A. (UGF - 73).

35) A equação do 3.º grau que tem uma raiz igual a -5, a soma e o produto das raízes respectivamente iguais a 5 e -120 é.....

(E. Flum. Eng. - 1957)

36) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$ sabendo que uma das raízes é igual à soma das duas outras. (E. Naval - 1959).

37) Calcular m de modo que a equação $x^3 + mx - 2 = 0$ tenha uma raiz dupla e calcular as raízes desse equação.

(E. N. Engenharia - 1961).

38) Resolver a equação $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ sabendo que a soma de duas de suas raízes é -1. (E. N. Engenharia - 1959).

39) Se α, β e λ forem 3 números distintos, satisfazendo às relações

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0$$
$$\beta^3 + p\beta + q = 0$$
$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0$$

provar que se terá:

$$\alpha + \beta + \lambda = 0$$

(E. N. Engenharia - 1938).

40) Determinar m de modo que a equação $x^4 + mx^3 + 8x - 3 = 0$ tenha uma raiz tripla e calcular as raízes desta equação

(E. N. Engenharia – 1954).

41) Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

sabendo-se que admite duas raízes simétricas.

(E. Engenharia – Pernambuco – 1956).

RESPOSTAS:

1) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
2) $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$
3) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
4) $x^4 + 8x^3 - 16x + 20 = 0$
5) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$
6) $x^4 - 19x^2 + 30x = 0$
7) $4x^4 - 28x^3 + 9x + 10 = 0$
8) $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0$
9) 6 e -30
10) 0 e -5
11) 0 e 0
12) 0 e 11
13) 2 e -3
14) $\frac{5}{2}$ e 2
15) 0 e $\frac{1}{2}$
16) 1 e -1
17) -2, 2 e 3
18) 2, 3 e 5
19) 2, 2 e 5
20) $E - F = 0$ e $D \neq 0$
21) 76
22) 0 e $\pm i\sqrt{p}$, $q = 0$
23) -4, -3 e 2
24) 1, 3, 5 4
25) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$
26) 1, 3 e $\frac{3}{2}$
27) $\frac{1}{6}$
28) ± 6
29) -5
30) 12 ou -12
31) -3
32) 42
33) $bc = d$
34) 15
35) $x^3 - 5x^2 - 26x + 120 = 0$
36) -3, 1 e 4
37) $m = -3$, $x_1 = x_2 = -1$ e $x_3 = 2$
38) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e $-1 \pm i$

39) Se α, β e λ satisfazem às relações dadas, são raízes de $x^3 + px + q = 0$, cuja soma de suas raízes é nula. Logo, $\alpha + \beta + \lambda = 0$.

40) $m = -6$; $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $x_4 = -3$

41) -1, 1, 2 e 3

PROPRIEDADES DAS RAÍZES RACIONAIS INTEIRAS E DAS FRACIONÁRIAS

23. Teorema.

> Se um número racional $\frac{N}{D}$, sendo N e D primos entre si, é raiz da equação racional inteira, de coeficientes inteiros
>
> $$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0 \qquad (I)$$
>
> então N é um fator de a_m e D um fator de a_0.

DEMONSTRAÇÃO:

Substituiremos, em (I), x por $\frac{N}{D}$ (raiz da equação):

$$a_0\left(\frac{N}{D}\right)^m + a_1\left(\frac{N}{D}\right)^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\left(\frac{N}{D}\right) + a_m = 0 \qquad (II)$$

Multiplicando ambos os membros de (II) por D^m, temos:

$$a_0N^m + a_1N^{m-1} \cdot D + \ldots + a_{m-1}N \cdot D^{m-1} + a^m \cdot D^m = 0 \qquad (III)$$

$$\therefore N(a_0N^{m-1} + a_1N^{m-2} \cdot D + \ldots + a_{m-1}D^{m-1}) = -a_mD^m$$

Como N é um fator do primeiro membro é também um fator do segundo. Mas, como por hipótese, D e N são primos entre si, então N é fator de a_m e, portanto, um divisor de a_m.

Se na (III) passarmos o primeiro termo para o segundo membro e não o último, temos:

$$D(a_1N^{m-1} + \ldots + a_{m-1}N \cdot D^{m-2} + a_m \cdot D^{m-1}) = -a_0N^m$$

E, como D é divisor do primeiro membro é também do segundo; mas, não sendo divisor de N (por hipótese) então será divisor de a_0.

E está demonstrado o nosso teorema.

24. Observações.

1.ª) Toda equação racional inteira de coeficientes inteiros cujo coeficiente do termo de maior grau é a unidade, *se possuir raízes racionais* elas serão inteiras.

Então uma equação da forma

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

não pode ter raízes racionais fracionárias.

2.ª) Uma equação racional inteira de coeficientes inteiros que possuir o coeficiente do termo de maior grau diferente da unidade não pode ter apenas raízes inteiras.

3.ª) Toda raiz racional inteira de uma equação é com o sinal + ou − um divisor do termo independente da equação (suposta desprovida de raízes nulas).

4.ª) Toda raiz racional fracionária tem para numerador um divisor do termo independente da equação e para denominador um divisor do coeficiente do termo de maior grau (esses divisores podem ser positivos ou negativos).

25. Exercícios para resolver.

1) Pode a equação $x^4+x^3-21x^2-x+20=0$ ter raízes fracionárias?

2) Sabendo que a equação $2x^4+5x^3-5x-2=0$ tem todas as raízes racionais, diga se todas elas podem ser inteiras.

3) Sabendo que a equação $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ possui 4 raízes racionais positivas e consecutivas, ache suas raízes.

4) Sabendo que a equação $2x^3-7x^2+7x-2=0$ tem 2 raízes racionais inteiras e uma fracionária, todas positivas, ache suas raízes.

5) Sabendo que a equação $x^4-5x^3+13x^2-19x-10=0$ admite $1+2i$ como raiz e tem duas raízes racionais, diga, sem resolver a equação, quantas raízes complexas, quantas fracionárias e quantas racionais fracionárias e inteiras, possui a equação.

6) Sabendo que as raízes da equação $x^3+6x^2+11x+6=0$ são racionais, inteiras, consecutivas e negativas, ache essas raízes.

7) Verifique quais das frações abaixo

$$\frac{5}{7}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \text{ e } \frac{7}{6}$$

poderiam ser raízes da equação $6x^3-25x^2+19x+30=0$.

26. Soluções dos exercícios.

1) Não. Ver N.º 24. 1.ª

2) Não. Ver N.º 24, 2.ª

3) Acham-se os divisores do termo independente:

24	2	1
12	2	2
6	2	4
3	3	8
1		3 − 6 − 12 − 24

É fácil de concluir que as raízes são 1, 2, 3 e 4.

Os divisores do termo independente são 1 e 2. Logo, são estas as raízes inteiras.

Como os divisores do coeficiente de x^3 também são 1 e 2, então a raiz fracionária será uma das seguintes:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \text{ ou } \frac{2}{2}$$

Portanto, é $\frac{1}{2}$, pois as outras três hipóteses são raízes inteiras.

5) Como o número de raízes complexas tem de ser par (N.º 14), então existem 2 *raízes complexas*. Se tem 2 raízes racionais, *não existe raiz irracional*.

Como o coeficiente de x_4 é a unidade *não existe raiz fracionária* (N.º 24) e as duas racionais são inteiras.

6) Acham-se os divisores de 6 (N.º 24, 3.º):

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3 \text{ e } \pm 6$$

Como as raízes são negativas temos apenas: −1, −2, −3 e −6.

Como são consecutivas, temos: −1, −2 e −3.

7) Acham-se os divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30; e os divisores de 6: 1, 2, 3 e 6 (com sinal + ou −).

As frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{3}{4}$ são excluídas, pois seus denominadores não são divisores de 6. A fração $\frac{7}{6}$ é excluída pois seu numerador não é divisor de 30.

Restam pois: $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$, que poderiam ser raízes da equação.

30. Exemplos de determinação de transformadas aditivas.

I) Determinar a transformada de $2x^4 - 3x^3 + 8x - 10 = 0$ (primitiva) cujas raízes estejam aumentadas de uma unidade.

A fórmula de transformação é $y = x + 1$ $(h = -1)$
Empregando o dispositivo de Ruffini-Horner, temos:

	2	0	−3	8	−10
−1	2	−2	−1	9	(−19)
	2	−4	3	(6)	
	2	−6	(9)		
	2	(−8)			
	2				

E a transformada será:

$$2x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 6x - 19 = 0$$

II) Diminuir de 3 unidades as raízes da equação

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$$

isto é, achar sua transformada mediante a função tranaformatris $y = x - 3$.

Temos:

	1	−7	14	−8
3	1	−4	2	(−2
	1	−1	(−1	
	1	(2		
	1			

A transformada será: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

31. Aplicação das transformações aditivas. Pode-se na fórmula de transformação $y = x - h$ atribuir a h um valor tal que um dos coeficientes da transformada seja nulo.

Não é difícil determinar esse valor de h.

Basta que se desenvolva o primeiro membro de $f(x - h) = 0$, pela fórmula de Taylor (pág. 275 — II).

Temos:

$$f(x-h) = f(-h) + f'(-h)\,x + \frac{f''(-h)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(-h)}{m!}x^m = 0$$

É fácil de vermos que se quisermos que um dos coeficientes seja nulo, por exemplo o do termo de grau i $(i \leq m)$, basta que se faça

$$\frac{f^{(i)}(-h)}{i!} = 0$$

Portanto, os valores de $-h$ que anulam o coeficiente do termo de grau i, são as raízes da equação

$$f^{(i)}(x) = 0$$

onde i é o grau do termo que se quer anular o coeficiente e $f^{(i)}(x)$ é a derivada de ordem i de $f(x)$.

Conclusão:

> Para se obter uma transformada da equação $f(x) = 0$, desprovida de um termo de grau i basta achar a transformada aditiva de $f(x) = 0$, mediante a função transformatris $y = x - h$, onde h é a raiz da equação $f^{(i)}(x) = 0$ obtida igualando a zero a derivada de ordem i de $f(x)$.

32. Observações.

1.ª) É evidente que, no N.º 31, teremos tantas transformadas quantas forem as raízes de $f^{(i)}\,x) = 0$.

2.ª) Não podemos achar uma transformada desprovida do termo de maior grau m, pois a derivada de ordem m é uma constante e não se teria a equação $f^{(i)}\,x) = 0$.

3.ª) Não podemos também determinar uma transformada desprovida de termo independente (de grau zero), pois a derivada de ordem zero de $f(x)$ é convencionalmente $f(x)$.

33. Exemplo.

Dada a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$, determinar uma transformada desprovida do termo do 2.º grau.

Função transformatriz: $y = x - h$; h é a raiz da equação $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 \quad \text{e} \quad f''(x) = 6x - 6$$
$$\therefore\ 6x - 6 = 0 \quad \therefore\ x = 1 \quad \therefore\ h = 1$$

Temos:

	1	−3	4	−6
1	1	−2	2	(−4)
1	1	−1	(1)	
1	1	(0)		
	‖			

E a transformada será: $x^3 + x - 4 = 0$

(Se houvesse 2 valores de x, poderíamos ter 2 transformadas).

34. Transformações multiplicativas. São as transformações cuja função transformatriz é

$$y = kx \quad (k \text{ um número real relativo})$$

A transformada tem, então, cada uma de suas raízes, iguais às raízes da primitiva, multiplicadas por uma constante k.

Seja a equação primitiva.

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \qquad (1)$$

A fórmula de transformação é: $y = kx$

Substituindo o valor $x = \frac{y}{k}$ em (1) e mudando y por x, obtemos a transformada de (1):

$$a_0 x^m + a_1 k x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} k^{m-1} x + a_m k^m = 0 \qquad (3)$$

Conclusão:

> Para se achar a transformada multiplicativa de $f(x) = 0$, basta que se multipliquem, respectivamente, $k^0, k^1, k^2, \ldots, k^m$ pelos coeficientes de $f(x)$, a partir do coeficiente do termo de maior grau.

35. Exemplo.

Obter uma transformada da equação

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

cujas raízes sejam respectivamente o triplo de suas raízes.

A fórmula de transformação é $y = 3x$; logo: $k = 3$.

E a transformada será:

$$3^0 \cdot x^3 + 3^1 \cdot x^2 + 3^2 \cdot x + 3^3 \cdot 1 = 0 \text{ ou } x^3 + 3x^2 + 9x + 27 = 0$$

36. Observações.

1.ª) Se $k = -1$, a transformatriz será $y = -x$ e a transformada é chamada de transformada *simétrica* ou transformada em $-x$.

E, para achar a transformada simétrica de $f(x) = 0$ basta trocar os sinais dos termos de $f(x)$, que sejam de paridade diferente da do termo de maior grau. Exemplo:

A transformada simétrica de

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 6x + 17 = 0$$

é

$$x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 6x + 17 = 0$$

pois o termo de maior grau (4) sendo par, basta trocar os sinais dos termos de grau ímpar.

2.ª) Se $k = \frac{1}{h}$ (h inteiro e relativo), a transformatriz será $y = \frac{x}{h}$ e as raízes da transformada são iguais às raízes da primitiva *divididas* por h.

Para determinar essa transformada é fácil de ver que basta multiplicar os coeficientes de $f(x)$, respectivamente, por $h^m, h^{m-1}, \ldots, h^0$, a partir do termo de maior grau.
Exemplo:

Achar a transformada de $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$ cujas raízes sejam a metade das raízes da equação dada.

$$y = \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad k = \frac{1}{2} \quad \therefore\ h = 2$$

De acordo com a regra, a transformada será:

$$2^4 \cdot 2x^4 - 2^3 \cdot 3x^3 + 2^2 \cdot 5x^2 - 2 \cdot x + 2^0 \cdot 1 = 0$$

ou $$32x^4 - 24x^3 + 20x^2 - 2x + 1 = 0$$

3.º) Se não existir um ou mais termos da primitiva, nós os consideraremos como sendo iguais a zero. Exemplo:

Achar a transformada de $x^5 - 3x^3 + x - 1 = 0$ mediante a fórmula de transformação $y = 2x$.

Temos:

$$x^5 + 2^1 \cdot (0x^4) + 2^2 \cdot (-3x^3) + 2^3 \cdot (0x^2) + 2^4 \cdot (x) + 2^5 \cdot (-1) = 0$$

$$\therefore\ x^5 - 12x^3 + 16x - 32 = 0$$

37. Aplicações.

1.ª) Dada uma equação $f(x) = 0$ obter uma transformada que *não possa* admitir raízes racionais fracionárias.

Como vimos que para que uma equação não admita raízes racionais fracionárias é suficiente que o coeficiente do termo de maior grau seja um, então basta que achemos uma transformada de $f(x) = 0$, mediante a transformatriz $y = kx$, sendo k o coeficiente do termo de maior grau, e, a seguir, dividir toda a equação por k. Exemplo:

Obter uma transformada de $2x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$ que não possa admitir raízes racionais fracionárias.

A fórmula de transformação é: $y = 2x$.

A transformada será:

$$2x^3 - 2 \cdot 5x^2 + 2^2 \cdot 3x - 2^3 \cdot 1 = 0$$

e dividindo a equação por 2, vem:

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 4 = 0$$

2.ª) Dada uma equação cujos coeficientes sejam fracionários, obter uma transformada cujos coeficientes sejam inteiros e o de maior grau seja a unidade.

Eliminam-se os denominadores e a seguir, conforme a aplicação 1, anterior, tomamos o coeficiente do termo de maior grau unitário. Exemplo:

Achar a transformada de $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{6} = 0$ cujos coeficientes sejam inteiros e o de maior grau unitário.

Eliminando os denominadores: $12x^3 - 8x^2 + 9x - 1 = 0$

Achando a transformada mediante $y = 12x$ temos:

$$12x^3 - 12 \cdot 8x^2 + 12^2 \cdot 9x - 12^3 \cdot 1 = 0$$

dividindo tudo por 12 obtemos a transformada pedida:

$$x^3 - 8x^2 + 108x - 144 = 0$$

NOTA: O problema poderia ser resolvido fazendo $y = 6x$ diretamente na equação dada. Obteríamos $x^3 - 4x^2 + 27x - 36 = 0$, o que satisfaz ao problema. A primeira solução é todavia mais geral.

38. Transformações recíprocas. São as transformações cuja função transformatriz é: $y = \frac{1}{x}$.

A transformada tem, então, cada uma de suas raízes iguais aos inversos das raízes da primitiva.

É claro, pois, que a primitiva não deve ter raízes nulas, e portanto deve existir o termo independente.

Seja a primitiva:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (1)$$

onde $a_0 \neq 0$ e $a_m \neq 0$

A fórmula de transformação é: $y = \frac{1}{x}$ $\therefore\ x = \frac{1}{y}$

Substituindo o valor de x em (1), obtemos a transformada

$$a_0 \cdot \frac{1}{y^m} + a_1 \cdot \frac{1}{y^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \cdot \frac{1}{y} + a_m = 0$$

$$\therefore\ a_0 + a_1 y + \ldots + a_{m-1} y^{m-1} + a_m y^m = 0$$

ou $$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

CONCLUSÃO:

> Para se achar a transformada recíproca ou inversa de $f(x) = 0$ basta tomarmos para coeficientes da nova equação, suposta completa, os coeficientes da equação primitiva, considerados em ordem inversa.

39. Exemplo.

Achar a transformada recíproca de

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 3 = 0$$

A transformada será:

$$3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

OBSERVAÇÃO: Se não existir um ou mais termos da primitiva nós os consideraremos como tendo coeficientes nulos. Exemplo:

Achar a transformada recíproca (ou inversa) de

$$7x^5 + x^4 - 2x^3 + 5 = 0$$

A transformada será:

$$5x^5 - 2x^4 + x^2 + 7 = 0$$

40. Transformações homográficas. Dada a equação

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

chama-se *transformada homográfica* de (1) a equação obtida mediante a função transformatriz do tipo

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (2)$$

onde $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

As transformações aditivas, multiplicativas e recíprocas, já estudadas, são casos particulares desse novo tipo e chamam-se *homográficas simples*.

É fácil de ver aliás, que dando valores convenientes a a, b, c e d, em (2), pode-se, sempre, de uma homográfica recair em uma homográfica simples.

E, reciprocamente, uma transformação homográfica pode ser realizada, efetuando-se sobre a primitiva sucessivas transformações homográficas simples.

41. Exemplo. Transformar a equação

$$x^4 + 2x^2 - x + 1 = 0$$

de modo que cada raiz y da transformada seja $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$

Podemos escrever, somando e subtraindo 2 ao numerador,

$$y = \frac{2x+2-3-2}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} - \frac{5}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

Fazendo:

$$z = x+1;\ u = \frac{1}{z};\ w = 5u;\ t = -w;\ y = t+2$$

De acordo com as transformações já estudadas, temos:

1.º) A transformada, mediante $z = x + 1$,

$$z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 9z + 5 = 0$$

2.º) A transformada, mediante $u = \dfrac{1}{z}$, é

$$5u^4 - 9u^3 + 8u^2 - 4u + 1 = 0$$

3.º) A transformada, mediante $w = 5u$, é:

$$5w^4 - 5 \cdot 9w^3 + 5^2 \cdot 8w^2 - 5^3 \cdot 4w + 5^4 \cdot 1 = 0$$

ou $\quad 5w^4 - 45w^3 + 200w^2 - 500w + 625 = 0$

4.º) A transformada, mediante $t = -w$, será:

$$5t^4 + 45t^3 + 200t^2 + 500t + 625 = 0$$

ou $\quad t^4 + 9t^3 + 40t^2 + 100t + 125 = 0$

5.º) Ou, finalmente, a transformada mediante $y = t+2$, é:

$$y^4 + y^3 + 10y^2 + 16y + 29 = 0$$

42. Exercícios para resolver.

Determinar as transformadas de:

1) $8x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2x + 14 = 0$ cujas raízes estejam aumentadas de uma unidade.
2) $2x^4 - 8x^3 + 8x - 10 = 0$ cujas raízes estejam aumentadas de uma unidade
3) $x^3 + 15x^2 + 74x + 120 = 0$ de raízes diminuídas de uma unidade.
4) $x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 4 = 0$ de raízes diminuídas de uma unidade.
5) $2x^3 + 12x^2 - 4x + 7 = 0$ de raízes aumentadas de 2 unidades
6) $2x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$ de raízes diminuídas de 3 unidades
7) $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ mediante a fórmula de transformação $y = x + 1$

8) $x^3+x^2-2x+3=0$ mediante a função transformatriz $y=x-1$.
9) $x^3+x^2-x+1=0$ de raízes diminuídas de 0,2.
10) $x^3-4x^2+4x-6=0$ de raízes diminuídas de $\frac{4}{3}$

Determinar as transformadas de:

11) $x^3-3x^2-9x+5=0$ desprovida de termo do 2.º grau.
12) $x^3-6x^2+12x-5=0$ desprovida do termo do 2.º grau.
13) $x^3+3x^2+12x+9=0$ desprovida do termo do 2.º grau.
14) $x^3-4x^2+4x-6=0$ desprovida do termo do 2.º grau.
15) $x^3-6x^2+12x-7=0$ desprovida do termo do 1.º grau.
16) $x^3-2x^2-4x-10=0$ desprovida do termo do 1.º grau.
17) $2x^4-16x^3+23x^2-7x+19=0$ desprovida do termo do 3.º grau.
18) $x^3-6x^2-15x+90=0$ desprovida do termo do 1.º grau.

Determinar as transformadas em $-x$ de:

19) $x^3-5x^2+3x-8=0$
20) $x^4-5x^3+x-1=0$
21) $x^5+x^4-3x^3+2x^2-18x+7=0$
22) $x^5-x-2=0$

Determinar as transformadas simétricas de:

23) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$
24) $x^7-x^5-x^2-1=0$

Determinar as transformadas de:

25) $2x^3+x^2-18x-9=0$ mediante a transformatriz $y=2x$
26) $x^3-2x^2+x+1=0$ de raízes iguais ao dobro das raízes da equação dada.
27) $x^4-10x^3+8x+8=0$ cujas raízes são os triplos das raízes da equação dada.
28) $2x^3-5x^2+7x+12=0$ mediante a fórmula de transformação $y=3x$
29) $x^3-3x^2+5x+2=0$ de raízes divididas por 2. UFRJ - 1970.
30) $3x^3-5x^2+11x-7=0$ de raízes iguais à metade das raízes da primitiva
31) $2x^3+5x^2+11x-7=0$ mediante a fórmula de transformação $y=\frac{x}{4}$
32) $x^4-16x^3+8x^2+32x-16=0$ de raízes iguais à metade das raízes da equação dada.
33) $x^4-x^2-1=0$ de raízes iguais ao dobro da primitiva.
34) $x^3+3x^2-81=0$ de raízes divididas por 3.

Obter transformadas das equações abaixo que não possam admitir raízes racionais fracionárias:

35) $2x^4+3x^3+x^2-2x+8=0$
36) $3x^3-5x^2+x-1=0$

Achar as transformadas cujos coeficientes dos termos de maior grau seja a unidade.

37) $3x^3-16x^2+3x+10=0$
38) $2x^5-2x^4+8x^3-1=0$

Achar as transformadas de:

39) $x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{3}{7}x-\frac{5}{4}=0$
40) $2x^4-\frac{3}{4}x^3+\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}=0$

cujos coeficientes sejam inteiros, sendo o de termo de maior grau igual a um.

Achar as transformadas recíprocas de:

41) $3x^5-5x^5+x^4-x^3+2x^2-x+5=0$
42) $x^5-3x^4+2x^3-4x^2+5x-3=0$
43) Sendo a, b e c as raízes da equação $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, escreva a equação de raízes $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$.

Engenharia - 1966 - GB).

Achar as transformadas inversas de:

44) $x^3+x^2+x+1=0$
45) $x^3-x-3=0$

Achar as transformadas das equações abaixo mediante a fórmula de transformação indicada.

46) $3x^3-5x^2+11x-7=0$, $y=\frac{-x}{4}$
47) $x^3-2x^2+5x-4=0$, $y=2x+3$
48) $x^3-2x^2-x+1=0$, $y=\frac{2x-3}{x+1}$
49) Dê a transformada da equação $3x^4-24x^3+30x^2+1=0$ desprovida do termo do 3.º grau. (E. N. Eng - 1950).
50) Transformar a equação $x^3-2x^2+7x-4=0$ em uma outra cujas raízes sejam iguais às suas aumentadas de uma unidade. (E. T. Exército - 1943).
51) Dada a equação $x^3+6x^2+(m+12)x+(2m+40)=0$ transformá-la em outra desprovida do termo do 2.º grau e determinar em seguida o valor de m para que o dobro de uma das raízes da equação transformada seja a média geométrica das outras duas. (E. N. Engenharia - 1947).

RESPOSTAS:

1) $3x^4-20x^3+48x^2-50x+23=0$
2) $2x^4-8x^3+9x^2+6x-19=0$
3) $x^3+18x^2+107x+210=0$
4) $x^5+5x^4+8x^3+9x^2+9x=0$
5) $2x^2-28x+47=0$
6) $2x^4+17x^3+37x^2-16x-85=0$
7) $x^4-3x^3+4x^2-2x+1=0$
8) $x^3+4x^2+3x+3=0$
9) $x^3+1,6x^2-0,48x+0,848=0$
10) $27x^3-36x-148=0$
11) $x^3-12x-6=0$
12) $x^5+3=0$
13) $x^3+9x-1=0$
14) $27x^3-36x-146=0$

15) $x^3+1=0$
16) $x^3+4x^2-18=0$ ou $27x^3-108x^2-230=0$
17) $2x^4-25x^3-43x+1=0$
18) $x^3+9x^2-10=0$ ou $x^3-9x^2+98=0$
19) $x^3+5x^2+3x+8=0$
20) $x^4-5x^2-x-1=0$
21) $x^5-x^4-3x^3-2x^2-13x-7=$
22) $x^3+x-2=0$
23) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$
24) $x^7-x^5-x^2+1=0$
25) $x^3+x^2-36x-36=0$
26) $x^3-4x^2+4x+8=0$
27) $x^4-90x^2+216x+648=0$
28) $2x^3-15x^2+63x+324=0$
29) $8x^3-12x^2+10x+2=0$
30) $24x^3-20x^2+22x-7=0$
31) $192x^3+80x^2+44x-7=0$
32) $x^4-8x^3+2x^2+4x-1=0$
33) $x^4-4x^2-16=0$
34) $3x^5+x^3-1=0$
35) $x^4+3x^3+2x^2-8x+64=0$
36) $x^3-5x^2+3x-9=0$
37) $x^3-16x^2+9x+90=0$
38) $x^3-2x^4+16x^2-16=0$
39) $x^3-49x^2+84x-3\,430=0$
40) $x^3-9x^2+720x-2\,304=0$
41) $5x^6-x^5+2x^4-x^3+x^2-5x++3=0$
42) $3x^5-5x^4+4x^3-2x^2++3x-1=0$
43) $Dx^3+Cx^2+Bx+A=0$
44) $x^5+x^3+x+1=0$
45) $3x^5+x^4-1=0$
46) $192x^3+80x^2+44x+7=0$
47) $x^3-18x^2+71x-105=0$
48) $x^3+24x^2+17x-12=0$
49) $3x^4-33x^3-36x+13=0$
50) $x^3-5x^2+14x-14=0$
51) Transformada: $x^3+mx+32=0$ e $m=12$

EQUAÇÕES RECÍPROCAS

43. Preliminares. De um modo geral, chama-se *equação recíproca* a toda equação equivalente à sua transformada inversa ou recíproca.

Isto é, diz-se que uma equação racional inteira da forma

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0 \qquad (I)$$

é *recíproca*, quando admitindo a raiz $a \neq \pm 1$, de multiplicidade p admitirá também a raiz $\frac{1}{a}$ de mesma multiplicidade (supomos $a \neq \pm 1$ porque para $a = 1$ ou $a = -1$ não podem corresponder outras raízes, pois esses dois números coincidem com seus inversos).

Pode parecer, já que a cada raiz a corresponde uma raiz $\frac{1}{a}$, que uma equação recíproca tenha sempre um número par de raízes, seja de grau par. Existem todavia equações recíprocas de grau ímpar, porque como já vimos as raízes $+1$ e -1 não têm correspondentes distintos.

Chamam-se *termos eqüidistantes dos extremos* de uma equação recíproca (I) a dois termos do primeiro membro de (I) tais que o número de termos que preceda o primeiro seja igual ao número de termos que suceda ao último.

Denomina-se *termo central* de uma equação recíproca (I), de grau ímpar, ao termo do primeiro membro de (I) que é precedido e seguido do mesmo número de termos.

44. Classificação de equações recíprocas. Seja a equação recíproca (I) do N.º 43 e a sua transformada inversa:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (II)$$

Se (I) é uma equação recíproca, de acordo com a sua definição (N.º 43), é equivalente a (II), e, portanto, os seus coeficientes são proporcionais. Logo:

$$\frac{a_0}{a_m} = \frac{a_1}{a_{m-1}} = \ldots = \frac{a_i}{a_{m-i}} = \ldots = \frac{a_{m-i}}{a_i} = \ldots = \frac{a_{m-1}}{a_1} = \frac{a^m}{a_0}$$

$$\therefore a^2_{m-i} = a^2_i$$

ou

$$\boxed{a_{m-i} = \pm a_i}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots m)$$

Como a_{m-i} e a_i são coeficientes de termos eqüidistantes dos extremos, então podemos dizer que *em uma equação recíproca, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos são iguais ou simétricos.*

Se $a_i = a_{m-i}$ tem-se uma *equação recíproca de 1.ª classe.*

Se $a_i = -a_{m-i}$ tem-se uma *equação recíproca de 2.ª classe.*

Uma equação recíproca de 2.ª classe não tem termo central (a_p), pois se $a_p = -a_p$, $a_p = 0$.

45. Forma normal das equações recíprocas. Mostremos que podemos reduzir o estudo das equações recíprocas ao caso das equações recíprocas de 1.ª classe de grau par.

Suponhamos que a (I), do N.º 43, seja uma equação recíproca de 2.ª classe.

Para $x = 1$ o primeiro membro de (I), ficará:

$$F(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} + a_m$$

mas, se (I) é recíproca de 2.ª classe, $a_i = -a_{m-i}$, logo, $F(1) = 0$ e, portanto, 1 é a raiz da equação (I).

Dividindo $F(x)$ por $x-1$ (dispositivo Ruffini), temos:

	a_0 .... a_{m-1} a_m
1	$b_0 = a_0$ ..... b_{m-1} (0

A equação

$$b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-2} x + b_{m-1} = 0 \qquad \text{(II)}$$

ainda é uma equação recíproca, pois admite as outras $m-1$ raízes de (I).

Da divisão efetuada acima temos que:

$$1 \times b_{m-1} + a_m = 0 \quad \therefore \quad a_m = -b_{m-1} \quad \text{e} \quad a_0 = b_0$$

Como a (I) é recíproca de 2.ª classe, $a_m = -a_0$

$$\therefore -b_{m-1} = -b_0 \quad \text{ou} \quad b_{m-1} = b_0$$

e, portanto, a (II) é recíproca de 1.ª classe.

Se a (I) fosse de grau ímpar, a (II) seria então, como queríamos mostrar, uma recíproca de 1.ª classe de grau par.

Se a (I) fosse de grau par, a (II) seria uma equação recíproca de 1.ª classe de grau ímpar.

Como uma equação de grau ímpar tem número par de termos, e uma recíproca de 1.ª classe tem $a_i = a_{m-i}$ então, para $x = -1$ o primeiro membro de (II) se anularia, pois os graus dos termos eqüidistantes dos extremos sendo de paridades diferentes, para $x = -1$, seriam simétricos. Logo, -1 é raiz de (II).

Dividindo o primeiro membro de (II) por $x+1$, obtemos:

	b_0 b_1 ... . b_{m-2} b_{m-1}
-1	$c_0 = b_0$ . ..... c_{m-2} (0

A equação

$$c_0 x^{m-2} + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_{m-2} x + c_{m-2} = 0 \qquad \text{(II)}$$

é ainda uma equação recíproca, pois admite as outras $m-2$ raízes de (I).

Da divisão efetuada

$$-1 \times c_{m-2} + b_{m-1} = 0 \quad \therefore \quad b_{m-1} = c_{m-2} \quad \text{e} \quad c_0 = b_0$$

Como vimos que $b_{m-1} = b_0$ então $c_{m-2} = c_0$, logo a (III) é uma recíproca de 1.ª classe.

Acabamos pois de ver que uma equação recíproca pode sempre ser reduzida, mediante divisões sucessivas de $P(x)$ por $x-1$ e $x+1$, a uma equação recíproca de 1.ª classe de grau par.

A forma normal das equações recíprocas é, pois, uma equação recíproca de 1.ª classe de grau par, da forma:

$$a_0 x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \ldots + a_p x^p + \ldots a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Observação: Após dividirmos o primeiro membro de uma recíproca de 2.ª classe de grau par por $x-1$ ou o primeiro membro de uma recíproca de 1.ª classe de grau ímpar por $x+1$, devemos também dividir o quociente encontrado pelo mesmo divisor, pois pode acontecer que $+1$ ou -1 seja raiz múltipla da equação.

46. Conclusões importantes

1.ª) Toda equação recíproca de 2.ª classe de grau par admite, com um certo grau de multiplicidade, as raízes 1 e -1.

2.ª) Toda equação recíproca de 2.ª classe de grau ímpar admite, com um certo grau de multiplicidade, a raiz $+1$.

3.ª) Toda equação recíproca de 1.ª classe de grau ímpar admite, com um certo grau de multiplicidade, a raiz -1.

4.ª) É sempre conveniente desembaraçar a equação das raízes 1 e -1.

47. Aplicações.

1.ª) Sabendo que a equação $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$ não admite raízes múltiplas, diga pela simples observação da equação duas de suas raízes.

De acordo com a 1.ª observação do N.º 46 a equação admite as raízes $+1$ e -1.

2.ª) Resolva a equação do exercício anterior.

Já sabemos que ela admite as raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$

Desembaraçando a equação dessas raízes, mediante o dispositivo de Ruffini

	2	5	0	−5	−2
1	2	7	7	2	(0
−1	2	5	2	(0	

temos a equação: $2x^3 + 5x + 2 = 0$

cujas raízes são: $x_3 = -2$ e $x_4 = -\frac{1}{2}$

3.ª) Escrever a equação recíproca

$$4x^7 - 4x^6 - 21x^5 + 21x^4 + 21x^3 - 21x^2 - 4x + 4 = 0$$

sob a sua *forma normal*.

É de grau ímpar de primeira classe, logo admite a raiz − 1.

Desembaraçando dessa raiz e verificando também se ela não é raiz múltipla (o mesmo para a raiz 1), temos:

	4	− 4	−21	21	21	−21	−4	4
−1	4	− 8	−13	34	−13	− 8	4	(0
−1	4	−12	− 1	35	−48			
1	4	− 4	−17	17	4	− 4	(0	
1	4	0	−17	0	4	(0		
1	4	4	−13					

A equação dada tem para raízes: − 1, 1 e 1.

Desembaraçando-a dessas raízes, temos:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

que é a equação pedida.

48. Resolução de uma equação recíproca. Seja uma recíproca sob a sua forma normal:

$$a_0 x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{(IV)}$$

Como $a_0 \neq 0$, a equação não admite raiz nula.

Dividindo tudo por x^p, temos:

$$a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p + \ldots + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_0}{x^p} = 0$$

Grupando os termos de mesmo coeficiente:

$$a_0\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) + a_1\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + \ldots + a_p = 0 \quad \text{(V)}$$

Para resolver (V) usamos de um artifício. Notamos que para qualquer valor inteiro de p se tem:

$$\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^p + x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}} + \frac{1}{x^p}$$

$$\therefore x^p + \frac{1}{x^p} = \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}}\right) \quad \text{(VI)}$$

Fazendo $x + \frac{1}{x} = y$ e tendo em vista que $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$, podemos escrever, substituindo na (VI) p por 2, 3, 4, ...

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^0 + \frac{1}{x^0}\right) = y^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = (y^2 - 2)y - y = y^3 - 3y$$

Substituindo esses valores encontrados na equação (V) obtemos uma equação de grau p em y, que nos dá p raízes.

Substituindo cada uma dessas p raízes na equação: $x + \frac{1}{x} = y$ ou $x^2 - yx + 1 = 0$ obteremos p equações do 2.º grau em x cujas raízes são valores recíprocos de x.

Temos, portanto, $2p$ valores, que são as raízes de (IV).

Acabamos de ver que a resolução da equação (IV) de grau $2p$ recai na resolução de uma equação (V) de grau p.

A esse fato damos o nome de *abaixamento do grau* da equação (IV).

49. Exemplo.

Resolver a equação

$$12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12 = 0$$

Como é uma recíproca de 2.ª classe de grau par, admite as raízes +1 e −1.

Temos então:

	12	−4	−53	0	53	4	−12
1	12	8	−45	−45	8	12	(0
−1	12	−4	−41	−4	12	(0	
−1	12	−16	−25				

Desembaraçada das raízes 1 e −1 a equação ficará:

$$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$$

Dividindo por x^2, vem:

$$12x^2 - 4x - 41 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

ou

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

Fazendo: $x + \frac{1}{x} = y$

$$12(y^2 - 2) - 4y - 41 = 0$$

$$12y^2 - 4y - 65 = 0$$

cujas raízes são: $\frac{5}{2}$ e $-\frac{13}{6}$

Substituindo esses valores obtemos:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 6x^2 + 13x + 6 = 0$$

cujas raízes são:

$$2 \text{ e } \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{2}{3} \text{ e } \frac{-3}{2}$$

As raízes da equação dada são, pois:

$$1,\ -1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{-2}{3},\ \frac{-3}{2}$$

50. Exercícios para resolver.

Colocar as equações abaixo sob a forma normal:

1) $2x^5 + x^4 - 13x^3 + 13x^2 - x - 2 = 0$
2) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$
3) $4x^4 - 10x^3 + 10x - 4 = 0$
4) $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$
5) $4x^7 + 4x^6 - 21x^5 - 21x^4 + 21x^3 + 21x^2 - 4x - 4 = 0$
6) $x^6 - 1 = 0$

Resolver as equações recíprocas:

7) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$
8) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$
9) $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$
10) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$
11) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$
12) $x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

Resolver as equações:

13) $3x^6 - 54x^5 + 93x^4 - 93x^2 + 54x - 3 = 0$ (E. Politécnica U. Católica – Rio – 1957).
14) $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$ (E. P. U. C. – 1958).
15) $4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4 = 0$
16) $9x^5 + 9x^4 - 82x^3 - 82x^2 + 9x + 9 = 0$
17) $4x^8 - 20x^7 + 25x^6 + 20x^5 - 58x^4 + 20x^3 + 25x^2 - 20x + 4 = 0$
18) $3x^6 - 22x^5 + 27x^4 - 27x^2 + 22x - 3 = 0$ (ENE – 1961).
19) $6x^5 - 35x^4 + 62x^3 - 35x + 6 = 0$ (I. T. A. – 1957).
20) $12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$

Determinar a, b e c para que as equações abaixo sejam recíprocas de 1.ª classe:

21) $6x^4 - ax^3 + 62x^2 - 35x + b - a = 0$
22) $5x^4 + (a-b)x^3 + 4x^2 + b - 1 = 0$
23) $x^5 + (a+b+c)x^4 + 6x^3 + (7a-b)x^2 + 3x + a + b - c = 0$

Determinar a, b e c, para que as equações abaixo sejam de recíprocas de 2.ª classe:

24) $ax^4 - 3x^3 + (a+b+c)x^2 + (2a-b)x + c + 1 = 0$
25) $x^5 - (a+b+c)x^3 + 9x^4 + (a-2b)x^2 - 3ax^2 + 6x - 1 = 0$
26) $2x^5 - 3ax^4 + (2a+b)x^3 + ax^2 - (2b-c)x + a - b + c = 0$
27) Achar os valores de p e q, de modo que a equação $x^4 - 2x^3 + px + q = 0$ tenha as raízes recíprocas e depois resolvê-la. (E. Naval).
28) Dada a equação

$$x^6 + 3ax^5 + (b-2)x^4 + (4a+b+c)x^3 + 2ax^2 + (b-2a)x - 1 = 0$$

determinar a, b e c para que esta equação seja recíproca de 1.ª espécie e calcular as raízes da equação para esses valores de a, b e c. (E. N. Engenharia – 1957).

Respostas:

1) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$
2) $2x^2 + 5x + 2 = 0$
3) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
4) $4x^2 - 17x + 4 = 0$
5) $4x^4 - 17x^3 + 4 = 0$
6) $x^6 + x^5 + x^4 + 1 = 0$
7) $1,\ -1,\ -2,\ \frac{-1}{2}$
8) $1,\ 1,\ 1,\ -1$
9) $1,\ 5 \text{ e } \frac{1}{5}$
10) $1,\ -1,\ \frac{1}{2} \text{ e } 2$
11) $-1,\ -1,\ 3 \text{ e } \frac{1}{3}$
12) $1,\ 1,\ 1,\ i \text{ e } -i$

13) ± 1, 2, $\frac{1}{2}$, 4 e 1/4

14) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, 2, 5

15) 1, -1, ± 2 e $\pm \frac{1}{2}$

16) -1, ± 3 e $\pm \frac{1}{3}$

17) 1, 1, -1, -1, 2, 2, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

18) ± 1, $3 \pm 2\sqrt{2}$ e $\frac{2 \pm \sqrt{5}\,i}{3}$

19) 2, $\frac{1}{2}$, 3 e $\frac{1}{3}$

20) 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{3}$ e $\frac{-3}{2}$

21) $a=35$, $b=41$

22) $a=10$, $b=6$

23) $a=b=c=1$

24) $a=2$, $b=1$, $c=-3$

25) $a=2$, $b=1$, $c=3$

26) $a=0$, $b=1$, $c=-1$

27) Se for de 1.ª classe: $p=-2$ e $q=1$

raízes: $\frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2\sqrt{3}}}{2}$

Se for de 2.ª classe: $p=2$ e $q=-1$
raízes: 1, 1, 1 e -1

28) $a=\frac{-1}{2}$, $b=3$ $c=-1$

As raízes são: ± 1, $\pm i$ e $2 \pm \sqrt{3}$

DELIMITAÇÃO DAS RAÍZES

51. Preliminares. O problema da delimitação das raízes consiste em determinar dois números l e L, entre os quais estejam compreendidas as raízes reais de uma equação.

O número l diz-se *cota inferior* ou limite inferior das raízes negativas; o número L chama-se *cota superior* das raízes positivas.

É claro que sempre se poderia tomar $l = -\infty$ e $L = +\infty$, contudo a pesquisa das raízes exige intervalos pequenos, pois quanto mais próximos das raízes forem l e L, mais fácil se tornará a procura das raízes.

São vários os métodos de *determinação de cotas*, todos eles baseados no seguinte princípio:

> É condição necessária e suficiente para que um número L seja cota superior das raízes de
> $$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a^n = 0$$
> que tenhamos: $F(x) > 0$ para $x \geq L$.

A condição é necessária:

De fato, como $a_0 > 0$, $F(x) > 0$ quando x crescer indefinidamente.

Logo, se L é cota superior das raízes, $F(x) > 0$ para $x \geq L$, pois se $F(x) < 0$ teria de se anular primeiro antes de se ter $F(+\infty) > 0$. Logo, não há raízes superiores a L.

Se $F(x) > 0$ para $x \geq L$, L é cota superior.

Com efeito, $F(x)$ não se anulando para $x \geq L$, L é maior do que qualquer raiz de $F(x) = 0$, e, portanto, é uma cota superior.

Observação: Se calculássemos a transformada $F(-x)=0$, e a sua cota superior fosse $l>0$, $-l$ seria a cota inferior de $F(x)=0$.

52. Método de Laguerre (*). Dos vários métodos existentes, é o mais indicado, pois é de fácil aplicação, além de permitir achar uma cota superior bastante reduzida.

O método de Laguerre é para a determinação de L, mas podemos determinar l, pelo mesmo método, trabalhando com a transformada $F(-x) = 0$.

Dada a equação:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x) + a^n = 0$$

Suponhamos efetuada a divisão de $F(x)$ por $x - L$, temos:

	$a_0\ a_1\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n$
L	$b_0\ b_1\ \ldots\ \ldots\ b_{n-1}\ (R$

Logo, podemos escrever:

$$F(x) = (x - L)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R \quad \text{(I)}$$

onde, como se vê no dispositivo de Ruffini:

$$\text{(II)} \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = b_0L + a_1 = a_0L + a_1 \\ b_2 = b_1L + a_2 = (a_0L + a_1)L + a_2 = a_0L_2 + a_1L + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = b_{n-2}L + a_{n-1} = a_0L^{n-1} + a_1L^{n-2} + \ldots + a_{n-2}L + a_{n-1} \\ R = F(L) = a_0L^n + a_1L^{n-1} + \ldots + a_{n-2}L^2 + a_{n-1}L + a_n \end{cases}$$

(*) F. Laguerre, matemático. Século XIX.

Como podemos supor $a_0 > 0$ e, portanto, $b_0 > 0$, um número L que tornar positivos, b_0, b_1, ... , b_{n-1} e R, em (II), será um número que, tornará na (I), $F(x) > 0$; portanto, para qualquer valor de $x \geq L$ na (I) $F(x) > 0$ e, de acordo com o princípio do N.º 51, L é uma cota superior das raízes positivas de $F(x)$.

Na prática, o dispositivo de Ruffini simplifica consideravelmente o cálculo de L.

Basta que se tenha em vista que se L for cota superior de $F(x) = 0$, dividindo $F(x)$ por $x - L$, os coeficientes do quociente e o resto devem ser positivos. Então, usando o dispositivo prático de Ruffini, divide-se sucessivamente $F(x)$ por 1, 2, 3, ... até achar todos coeficientes e o resto positivos.

Devemos deixar de continuar a divisão logo que encontremos um coeficiente negativo, e convém lembrar que pode um ou mais coeficientes do quociente ser nulos.

Observação: Para determinarmos a cota inferior das raízes negativas de $F(x)=0$, basta que determinemos a cota superior da transformada simétrica $F(-x) = 0$.

53. Exemplo. Determinar a cota superior L e a cota inferior l de

$$F(x) = 6x^4 - 37x^3 + 73x^2 - 52x + 12 = 0$$

a) Determinemos L primeiramente

	6	−37	73	−52	12	
1	6	—				
2	6	—				
3	6	—				
4	6	—				
5	6	—				
6	6	—				
7	6	5	108	+	+	$L = 7$

Não se tornou necessário calcular os últimos coeficientes, pois percebemos que seriam positivos.

Na prática, não se tornaria necessário começar a pesquisa de L desde um; bastaria começar de 7, pois vemos que é o primeiro número inteiro que multiplicado por 6 é maior do que 37.

b) Determinemos agora l.

A transformada simétrica é:

$$F(-x) = 6x^4 + 37x^3 + 73x^2 + 52x + 12 = 0$$

Temos:

	6	37	73	52	12
1	6	43	+	+	+

A cota inferior de $F(x) = 0$ seria $l = -1$.

54. Exercícios para resolver.

Determinar as cotas superiores das raízes positivas das equações:

1) $x^6+3x^5-36x^4-45x^3+93x^2+182x+140=0$
2) $6x^4-7x^3+8x^2-7x+2=0$
3) $2x^6+3x^5+10x^4-7x^3-12x^2+x-4=0$
4) $3x^3-50x^4+2x-40=0$
5) $2x^6+3x^5+10x^4-7x^3-12x^2-x-4=0$

Determinar as cotas inferiores das raízes negativas das equações:

6) $6x^4+37x^3+73x^2+52x+12=0$
7) $x^5+18=0$
8) $2x^6-4x^4-11x^3-2x^2-300x-1=0$
9) $x^3+13x^2+54x+72=0$
10) $x^3-20x+5=0$

Respostas:

1) $L=6$ 2) $L=2$ 3) $L=2$ 4) $L=17$ 5) $l=-2$ 6) $l=-7$ 7) $l=-2$ 8) $l=-4$ 9) $l=-13$ 10) $l=-5$

55. Regras de exclusão de Newton. Já vimos que as raízes inteiras de uma equação $F(x) = 0$ são os divisores do termo independente, e já aprendemos como determinar as cotas l e L que permitem reduzir o ensaio dos divisores do termo independente que sejam raízes da equação. Entretanto, as cotas podem ser tais que o número de divisores a pesquisar ainda seja bastante grande. Para diminuir ainda o trabalho de pesquisa surgiram regras, permitindo excluir do ensaio divisores compreendidos no intervalo l e L.

Essas regras, chamadas de exclusão, são apenas condições necessárias

Citaremos as duas regras abaixo, chamadas *regras de exclusão de Newton* (também atribuídas a Bezout) (*).

(*) Bezout, algebrista famoso. Século XVIII.

1) Se um determinado número inteiro n é raiz de $F(x)=0$, então $n-1$ divide $F(1)$.

2) Se um determinado número inteiro n é raiz de $F(x)=0$, então $n+1$ divide $F(-1)$.

Com efeito, se n é uma raiz inteira de $F(x) = 0$, então:

$$F(x) = (x-n) \cdot Q(x) \qquad (I)$$

sendo $Q(x)$ o quociente da divisão de $F(x)$ por $x-n$.

1.º) Fazendo $x = 1$, em (I), temos:

$$F(1) = (1-n) \cdot Q(1) \quad \text{ou} \quad F(Z) = -(n-1) \cdot Q(1)$$

$$\therefore \frac{F(1)}{n-1} = -Q(1)$$

Logo, $n-1$ divide $F(1)$.

2.º) Fazendo $x = -1$, em (I), temos:

$$F(-1) = (-1-n) \cdot Q(1) \quad \text{ou} \quad F(-1) = -(n+1) \cdot Q(1)$$

$$\therefore \frac{F(-1)}{n+1} = -Q(1)$$

Logo, $n+1$ divide $F(-1)$.

56. Observação. Pode um número n ser tal que $n-1$ divida $F(1)$ e $n+1$ divida $F(-1)$, entretanto n não ser raiz de $F(x) = 0$. (As regras de Newton são condições necessárias mas não suficientes).

57. Exercícios resolvidos.

1) Verifique, *a priori*, quais os números abaixo que não podem ser raízes de uma equação $F(x)=0$ cujo valor numérico, para $x=1$, é 36 e, para $x=-1$ é -42:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8

Temos: $F(1)=36$ e $F(-1)=-42$

1 não pode ser, pois $1-1=0$ não divide $F(1)$

2 pode ser, pois $2-1$ divide $F(1)$ e $2+1$ divide $F(-1)$

3 não pode ser, pois $3-1$ divide $F(1)$ mas $3+1$ não divide $F(-1)$

4 não pode ser, porque $4+1$ não divide $F(-1)$

5 pode ser, porque $5-1$ divide $F(1)$ e $5+1$ divide $F(-1)$

6 não pode ser, porque $6-1$ não divide $F(1)$

7 não pode ser, porque $7+1$ não divide $F(-1)$

8 não pode ser, porque $8-1$ não divide $F(1)$.

2) Baseado nas regras de exclusão de Newton, diga quais são as possíveis raízes de $F(x)=x^3-3x^2-4x+12=0$.

Só poderão ser raízes de $F(x)=0$, os divisores de 12, que são 1, 2, 3, 4, 6, 12 (com sinal positivo ou negativo).

Calculemos $F(1)$ e $F(-1)$, com auxílio do dispositivo de Ruffini.

	1	−3	−4	12	
1	1	−2	−6	(6	$\therefore F(1) = 6$
−1	1	−4	0	(12	$\therefore F(-1) = 12$

De acordo com as regras de exclusão de Newton, podemos excluir (procedendo como foi feito no exercício anterior):

$$\pm 1, \ -3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 12$$

As possíveis raízes são: 2, −2 e 3.

58. Algoritmo de Peletarius (*). Dada uma equação para verificar se um dos divisores d do termo independente (feita primeiramente a exclusão de alguns deles pelas regras de Newton), é realmente raiz de $P(x) = 0$, pode-se usar o dispositivo de Ruffini, verificando se $P(x) = 0$, ou pode-se empregar um outro dispositivo, denominado *algoritmo de Peletarius*.

Seja d uma raiz de

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Podemos escrever, dividindo $F(x)$ por $x-d$:

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
d	b_0	b_1	...	b_{n-1}	(0

É fácil de ver que:

$$(A) \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = db_0 + a_1 \\ b_2 = db_1 + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-2} = db_{n-3} + a_{n-2} \\ b_{n-1} = db_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$$

$$R = db_{n-1} + a_n = 0$$

(*) Jacques Peletarius, matemático. Século XVI.

Donde, partindo da última relação para a primeira:

$$(B)\begin{cases} -b_{n-1} = \dfrac{a_n}{d} \\ -b_{n-2} = \dfrac{-b_{n-1}+a_{n-1}}{d} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -b_1 = \dfrac{-b_2+a_2}{d} \\ -b_0 = \dfrac{-b_1+a_1}{d} \end{cases}$$

Pelas relações (A) é fácil de observar que $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ são números inteiros.

E as fórmulas (B) constituem o algoritmo de Peletarius, que facilita muito a verificação ou ensaio dos divisores do termo independente como raízes da equação.

As relações (B) mostram que os coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ do quociente da divisão de $P(x)$ por $x-d$ podem ser obtidos em ordem inversa daquela em que são obtidos pelo dispositivo de Ruffini (apenas aparecem com os sinais trocados), e são as condições necessárias e suficientes para que um divisor d de a_n seja raiz de $F(x) = 0$.

59. Dispositivo prático do algoritmo de Peletarius. Seja uma equação.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

e seja d um divisor a ensaiar.

1.º) Dispomos os coeficientes de $F(x)$, de modo análogo ao dispositivo de Ruffini, e o d à direita:

$$\begin{array}{|c} a_0\ a_1\ \ldots\ldots\ a_{n-1}\ a_n \\ \hline d \end{array}$$

2.º) Divide-se a_n (termo independente) por d. Se a divisão não for exata, d não é raiz de $P(x) = 0$.

Se é exata, soma-se o quociente obtido com a_{n-1} e divide-se o resultado por d; se a divisão não for exata, d não é raiz. Se for exata, continua-se procedendo analogamente até se encontrar um quociente fracionário ou o último quociente simétrico ou não de a_0.

3.º) Se aparecer um quociente fracionário ou se o último quociente, mesmo inteiro, não for simétrico de a_0, d não é raiz de $F(x) = 0$.

Se o último quociente for simétrico de a_0, então d é raiz da equação $F(x) = 0$.

60. Observação. O algoritmo de Peletarius apresenta a grande vantagem de podermos abandonar o ensaio do divisor logo que deparamos com uma divisão inexata, e pode também, como no dispositivo de Ruffini, encontrada uma raiz, continuar o ensaio dos outros divisores com os coeficientes do quociente obtido.

61. Aplicação. Verifique se os divisores ± 2, ± 3 e ± 4 do termo independente de

$$x^6 - 6x^5 + 6x^4 + 13x^3 - 31x^2 + 24x - 36 = 0$$

são de fato raízes da equação, empregando o algoritmo de Peletarius.

Temos:

1	−6	6	13	−31	24	−36	− 2 (6 raiz)
0)	−1	8	−22	26	−21	18	2 (6 raiz)
	0)	1	− 6	10	− 6	9	− 3
		1			3	− 3	3 (6 raiz)
		0)	− 1	8	− 1	3	− 4

São raízes da equação dada: -2, 2 e 3.

62. Cálculo das raízes inteiras. Para pesquisarmos as raízes inteiras de uma equação

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$$

é aconselhável que procedamos de acordo com a seguinte regra:

1.º) Determinar $F(-x) = 0$. A não ser se soubermos ou podermos verificar pela simples inspeção que não há raízes negativas.

2.º) Determinar as cotas L e l, pelo método de Laguerre. Aproveitar para calcular $F(1)$ e $F(-1)$.

3.º) Determinar os divisores de a_n.

4.º) Excluir os divisores a pesquisar, de acordo com as regras de exclusão de Newton N.º 55 e de acordo com a determinação de l e L.

5.º) Calcular finalmente, as raízes, experimentando os divisores não excluídos, por meio do algoritmo de Peletarius N.º 59.

Convém, achada uma raiz, verificar se ela é dupla, tripla, etc. Basta para isso repetir o ensaio do número.

63. Exercícios.

I) Calcular as raízes racionais da equação:

$$3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 8x + 12 = 0$$

(E. N. Engenharia – 1950).

1.º) $F(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 8x + 12 = 0$

2.º) a) Determinação L

	3	− 4	− 19	8	12	
1	3	− 1	− 20	− 12	(0	1 é raiz ∴ $F(1) = 0$
2	3	5	− 10			
3	3	8	4	(0		3 é raiz

Não precisa mais calcular L, pois teríamos a equação do 2.º grau

$$3x^2 + 8x + 4 = 0$$

cujas raízes resolvendo a equação são: -2 e $-\frac{2}{3}$

As raízes da equação são, pois: 1, 3, -2 e $-\frac{2}{3}$

Poderíamos, também, continuar seguindo o processo geral.

II) Resolver a equação:

$$x^6 - x^4 - 82x^3 - 281x^2 - 279x - 198 = 0$$

(E. N. Engenharia – 1936).

1.º) $F(x) = x^6 + x^4 - 82x^3 + 281x - 279x + 198 = 0$

2.º) a) Determinação de L

		1	− 1	− 82	− 281	− 279	− 198	
1		1	0	− 82	− 363	− 642	(− 840	$F(1) = -840$
10		1	0	8	—			
11		1	10	28	27	18	(0	11 é raiz

b) Determinação de l

Podemos considerar a equação desembaraçada da raiz 11

$$P_1(x) = x^4 + 10x^3 + 28x^2 + 27x + 18 = 0$$
$$P_1(-x) = x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 27x + 18 = 0$$

		1	− 10	28	− 27	18		
1		1	− 9	19	− 8	(10		
− 1		1	− 11	39	− 66	(84	$P(-1) = 10$	
10		1	0	28			$P(1) = 84$	

$\therefore l = -10$

3.º) Achemos os divisores de a_n da equação considerada, que é $P_1(x) = 0$

18	2	1
9	3	2
3	3	3 - 6
1		9 - 18

São: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18

4.º) Excluir os divisores positivos, de acordo com o 2.º e 3.º itens

1 porque $P(-1) = 10$ e $P(1) = 84$

-18 porque $l = -10$

-9 porque $-9 + 1 = -8$ não divide $P(-1)$ (Regra de Newton)

5.º) Pesquisemos -2, -3 e -6 pelo algoritmo de Peletarius.

1	10	28	27	18	
			− 9	− 9	− 2
0)	− 1	− 7	− 7	− 6	− 3 é raiz
				2	− 3 simples
	0)	1	1	1	− 6 é raiz simples

As raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$ são $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

As raízes da equação são pois,

$$11, -3, -6 \text{ e } \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

64. Exercícios para resolver.

Resolver

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
2) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$
3) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$
4) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$
5) $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8 = 0$
6) $2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 = 0$
7) $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$
8) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
9) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$
10) $x^4 - 15x^2 + 30x = 0$
11) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
12) $x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$
Esc. Eng. UF Est. Rio – 1963
13) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4 = 0$
14) $24x^4 + 22x^3 - 7x^2 - 4x + 1 = 0$
PUC – 1969.
15) $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 = 0$
16) $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0$
17) $x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 14x^2 - 18x - 36 = 0$
18) $x^5 - 4x^4 - 12x^3 - 31x^2 - 188x - 252 = 0$
19) $x^5 - x^4 - 82x^3 - 281x^2 - 279x - 198 = 0$
(CICE – 68).
20) Calcule as raízes da equação
$$2x^5 - x^4 - 20x^3 - 5x^2 + 48x + 36 = 0$$
(F. Eng. Rio – 29/5/61)
21) Resolvendo a equação $2x^5 - x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ encontramos entre as raízes
a) duas raízes racionais fracionárias e uma inteira,
b) três raízes racionais inteiras,
c) duas raízes racionais inteiras e uma fracionária,
d) três raízes racionais fracionárias
e) três raízes imaginárias e duas reais.
U. F. – 1971.

RESPOSTAS:

1) 1, 2, 3
2) 2, 3, 5
3) -4, -3, 2
4) -2, 1, 4
5) 1, 2, $\frac{4}{3}$
6) 1, 2, $\frac{3}{2}$
7) 2, -1, 2, 4
8) 1, 2, 3, 4
9) -2, 1, 2, 3
10) -5, 0, 2, 3
11) ± 2, ± 3
12) 1, 1 e $-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
13) -1, 2, $1 \pm \sqrt{3}$
14) 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$
15) 1, 2, 3, 4, 5
16) 1, -2, 1, $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$
17) 3, -2, -3, $\pm i\sqrt{2}$
18) -2, 2, 7, $\frac{1 \pm i\sqrt{31}}{2}$
19) 11, -3, -6, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
20) -1, 2, $-\frac{3}{2}$, 2 e 3
21) *c*

GEOMETRIA

(Primeiro Ano)

CAPÍTULO 1

Retas e planos

1. Retas e planos. Já adquirimos no curso ginasial as noções intuitivas de ponto, reta, plano e espaço.

Vejamos agora algumas proposições as quais caracterizarão a reta e o plano e serão chamadas de postulados da reta e do plano.

2. Postulados da reta.

1. A reta é ilimitada.
2. Por um ponto pode-se traçar uma infinidade de retas.
3. Por dois pontos distintos do espaço passa uma reta.

   Isto é, dois pontos distintos do espaço determinam ou individualizam uma reta.
4. Um ponto de uma reta divide-a em duas partes chamadas semiretas.

3. Postulados do plano.

1. O plano é ilimitado.
2. Por uma reta pode-se traçar uma infinidade de planos.
3. Por três pontos distintos do espaço não em linha reta passa um só plano.

   Isto é, três pontos distintos não em linha reta determinam ou individualizam um plano.
4. A reta que passa por dois pontos distintos de um plano pertence a esse plano.

   Isto é, a reta que passa por dois pontos distintos de um plano está inteiramente contida nesse plano.

5. Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas semiplanos.

Esta reta chama-se *origem* dos dois semiplanos.

6. Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços.

Este plano diz-se *origem* dos semi-espaços. Todo segmento de reta que une dois pontos distintos do espaço, não pertencentes a origem, intercepta a origem ou não, conforme esses pontos estejam em semiespaços diferentes ou não.

DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

4. Teorema. *Por uma reta e por um ponto, não pertencente a ela, passa um só plano.*

Seja r uma reta e P um ponto não pertencente a r (fig. 1).

Tomemos sobre r dois pontos distintos A e B. Como os 3 pontos A, B e P não estão em linha reta, pelo postulado (3) do plano, determinam um único plano α, ao qual pertencem P e a reta r (postulado 4 do plano).

5. Corolário. *Por duas retas paralelas passa um só plano.*

Sejam r e s duas retas paralelas (fig. 2). Se são paralelas, são complanares, por definição; seja α o plano a que elas pertencem. Esse plano α é o único que satisfaz a essas condições, pois se α contém r e s contém também dois pontos de uma das retas e um ponto qualquer da outra, e pelo teorema anterior é único. c.q.d.

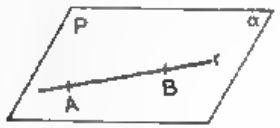


FIG. 1

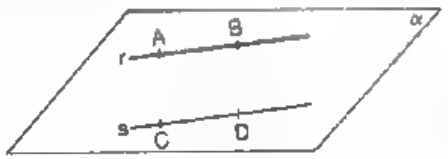


FIG. 2

6. Teorema. *Por duas retas distintas que possuem um ponto comum passa um só plano.*

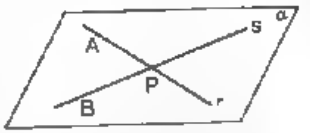


FIG. 3

Sejam r e s duas retas distintas, que possuem um ponto P comum (fig. 3).

Tomemos sobre r e s, respectivamente, dois pontos A e B distintos de P. Como os pontos A, B e P, distintos, não estão em linha reta, então, pelo postulado (3) do plano, eles determinam um único plano α, ao qual pertencem as retas r e s pois cada uma delas possui dois pontos distintos pertencentes a α (postulado 4 do plano).

7. Determinação de um plano. Dos postulados e teoremas anteriores concluimos que um plano fica bem determinado:

1) por 3 pontos distintos não em linha reta;
2) por uma reta e um ponto não pertencente a essa reta;
3) por duas retas paralelas;
4) por duas retas distintas que possuam um ponto comum.

INTERSEÇÃO DE RETAS E PLANOS

8. Posições relativas de duas retas. Duas retas distintas, no espaço, podem ser *complanares* ou não *complanares* conforme pertençam a um mesmo plano ou não.

Duas retas COMPLANARES podem ser:

a) *concorrentes:* quando têm um ponto em comum;

b) *paralelas:* quando não têm ponto em comum;

c) *coincidentes:* quando têm dois pontos em comum; pois, se têm dois pontos em comum têm uma infinidade.

Duas retas NÃO COMPLANARES não possuem um plano comum e dizemos simplesmente que *se cruzam*.

O ponto comum a duas retas distintas diz-se interseção dessas retas.

9. Posições relativas de uma reta e um plano. Uma reta e um plano

a) dizem-se *paralelos* quando não têm ponto em comum;

b) dizem-se *incidentes* ou *concorrentes* quando têm um ponto em comum; nesse caso dizemos também que o plano e a reta se interceptam e o plano divide a reta em duas semiretas situadas em semiespaços diferentes que têm o plano para origem comum;

c) diz-se que a reta pertence ao plano quando têm dois pontos em comum (Postulado 4 do plano).

O ponto comum a uma reta e a um plano é a interseção dos mesmos.

10. Teorema.

> Se dois planos distintos têm dois pontos em comum, têm também comuns todos os pontos da reta determinada pelos dois pontos e somente estes.

Sejam α e β dois planos distintos que tenham em comum os pontos A e B. A reta r que passa por A e B (postulado 3 da reta) pertence evidentemente aos planos α e β (postulado 4 do plano) e não pode haver ponto não pertencente a r que seja comum a α e β, pois, senão, pelo postulado 3 do plano, os planos α e β coincidiriam.

A reta r comum aos planos α e β diz-se *interseção dos dois planos*.

11. Teorema.

> Dois planos distintos que têm um ponto em comum, têm em comum uma reta que passa por este ponto.

Sejam dois planos distintos α e β possuindo um ponto comum P (fig. 4).

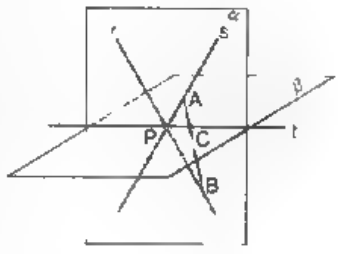


FIG. 4

Tracemos duas retas distintas r e s, pertencentes a α, por P. Então o plano β dividirá r e s em duas semiretas, cada uma, pertencente a semiespaços diferentes e de origem β.

Seja A um ponto de uma das semiretas de s e B um ponto da semireta de r pertencente ao semiespaço que não contém A.

Como A e B estão em semiespaços diferentes o segmento AB, pertencente a α, intercepta β (postulado 6 do plano) em um ponto C distinto de P, pois senão A, B e P estariam alinhados e r e s coincidiriam.

Se os planos α e β têm 2 pontos comuns P e C então pelo teorema anterior, têm comum, também, a reta t, que é a interseção de α e β. e.q.d.

12. Posição relativa de dois planos. Dois planos dizem-se:

a) *incidentes:* quando têm uma reta em comum;

b) *paralelos:* quando não têm reta comum;

c) *coincidentes:* quando têm duas retas em comum.

PARALELISMO DE RETA E PLANOS

13. Definições.

1.º) Duas retas são paralelas, quando, sendo complanares, não têm ponto em comum.

2.º) Uma reta é paralela a um plano quando não tem ponto em comum com este.

3.º) Dois planos são paralelos quando não têm ponto comum.

14. Paralelismo de retas do espaço (Teoremas).

1.º Teorema. Por um ponto do espaço, não pertencente a uma reta, pode-se traçar uma só paralela a essa reta.

FIG. 5

Seja uma reta s do espaço e um ponto P, não pertencente a s (fig. 5), P e s determinam um plano α (n.º 7).

Tracemos, por P, uma reta r qualquer, paralela a s. Sabemos que r e s determinam um plano. Como esse plano contém s e P, coincide com α.

Então, pelo postulado da Geometria Plana, que diz "por um ponto de um plano pode-se traçar uma só reta, paralela a uma reta desse plano, haverá uma e somente uma paralela a s passando por P. c.q.d.

2.º Teorema. Dadas duas retas paralelas, todo plano que intercepta uma delas intercepta a outra.

Sejam r e s duas retas paralelas pertencentes a um plano π; e seja α um plano qualquer que intercepte r no ponto A (fig. 6).

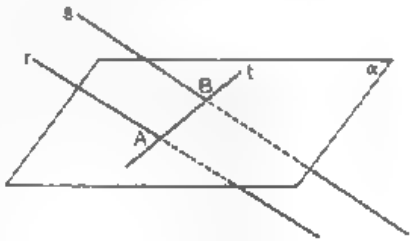


FIG. 6

Os planos α e π têm um ponto comum A, logo se interceptam em uma reta t que contém A (n.º 11).

Como t intercepta r e pertence a π então interceptará s em um ponto B, único ponto comum a α e s pois, sabemos da Geometria Plana, que, "se duas retas são paralelas, toda reta do plano das paralelas, que intercepta uma, interceptará a outra". c.q.d.

3.º Teorema. Duas retas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.

Temos dois casos a considerar:

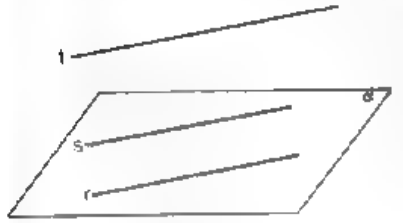


FIG. 7

1.º) As retas são *complanares;*

Neste caso, demonstra-se facilmente, baseado no *Postulado de Euclides* (Geometria Plana).

2.º) As retas são *não complanares.*

Sejam r e s duas retas paralelas a uma reta t (fig. 7).

As retas r e s são complanares, pois, se não o fossem um plano que passasse por r interceptaria s e portanto t (teorema anterior). Interceptando t, ainda pelo teorema anterior interceptaria também r, o que seria absurdo.

As retas r e s, complanares não têm ponto em comum, pois, se tivessem, teríamos por um ponto do espaço duas retas r e s paralelas a uma terceira t, o que, pelo 1.º teorema é impossível.

Então r e s são paralelas. c.q.d.

15. Paralelismo entre reta e plano.

1.º Teorema. *Condição de paralelismo de uma reta e um plano.* A condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano é que ela seja paralela a uma reta desse plano.

1.º) *A condição é suficiente.* Toda reta paralela a uma reta de um plano é paralela a esse plano.

Seja r uma paralela a uma reta s de um plano α. que não contém r (fig. 8).

A reta r não intercepta α, pois, se interceptasse, ou seria em um ponto A de s, o que seria impossível, pois r e s sendo paralelas, não têm ponto comum; ou seria em um ponto de α, não pertencente a s, o que seria também impossível

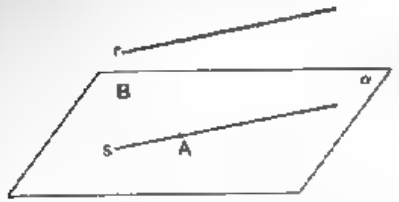


FIG. 8

pois sendo r e s paralelas, são complanares, e não podem portanto deixar de ter um plano comum.

Então s não pode ter ponto em comum com α e portanto r e α são paralelos.

2.º) *A condição é necessária.* Todo plano paralelo a uma reta contém a paralela traçada a essa reta por um qualquer de seus pontos.

Seja uma reta s traçada por um ponto A de um plano α e paralela a uma reta r paralela a α (fig. 8).

Provemos que s pertence a α.

Com efeito, a reta r e o ponto A determinam um plano β. Seja s' a interseção de β com α. Como s' tem que ser paralela a r, pois são complanares e não podem se encontrar pois r, por hipótese, não tem ponto comum com α, então s' coincidirá com s porque por um ponto A só pode se traçar uma paralela a uma reta r.

Então s pertence a α. c.q.d.

Corolários. (Deixamos as demonstrações para serem feitas como exercícios).

1.º) Por um ponto pode-se traçar uma infinidade de paralelas a um plano dado.

2.º) Por um ponto pode-se traçar uma infinidade de planos paralelos a uma reta.

3.º) Dadas duas retas paralelas todo plano que contenha apenas uma delas é paralelo a outra.

4.º) Dadas duas retas paralelas, se uma delas for paralela a um plano a outra também o será ou pertencerá ao plano.

5.º) A interseção de dois planos incidentes, que passem por duas retas paralelas, ou sejam paralelos a essas retas, é também paralela a elas.

> 2.º Teorema. Toda reta paralela a dois planos que se cortam é paralela à interseção deles.

Seja uma reta r paralela aos planos α e β cuja interseção é s. E seja P um ponto de s.

Pela condição necessária a reta traçada por P paralela a r será comum a α e β e portanto só poderá ser a interseção s.

16. Planos paralelos

Condição de paralelismo de dois planos:

> 1.º Teorema. A condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes paralelas ao outro.

1.º) *A condição é suficiente.* Se duas retas concorrentes são paralelas a um plano, o plano ao qual elas pertencem também o é.

Sejam duas retas r e s concorrentes em um ponto P e paralelas a um plano α (fig. 9).

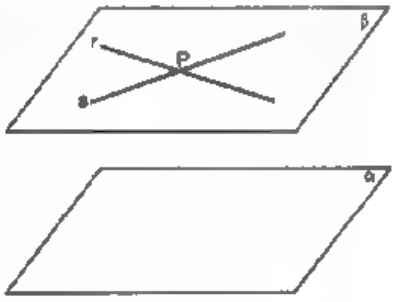


FIG. 9

Provemos que o plano β determinado por r e s é paralelo a α. Com efeito, se não o fosse, a interseção de α e β cortaria uma, pelo menos, das retas r e s, o que é impossível pois r e s por hipótese são paralelas a α.

2.º) *A condição é necessária.* Se dois planos são paralelos duas retas concorrentes de um deles são paralelas ao outro.

Sejam α e β dois planos paralelos (fig. 9). Provemos que as retas concorrentes r e s de β são paralelas a α. De fato, pois se não o fossem teriam um ponto em comum com α, e como pertencem a β, então α e β teriam um ponto em comum, o que é contrário à hipótese de ser α e β paralelos.

Corolários.

1.º) Se dois planos são paralelos, toda reta que intercepta um deles intercepta também o outro.

2.º) Para traçar um plano α paralelo a um plano β e passando por um ponto P, não pertencente a β, basta traçar por P duas retas distintas, paralelas a β.

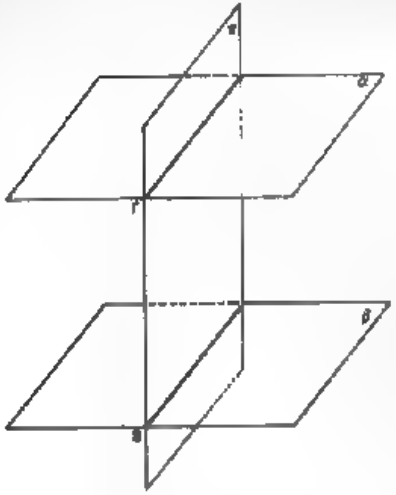


FIG. 10

> 2.º Teorema. As interseções de um plano com dois planos paralelos são retas paralelas.

Sejam α e β dois planos paralelos e, r e s, suas interseções com um plano π (fig. 10).

As retas r e s estão no mesmo plano π e não têm ponto em comum, pois, pertencem respectivamente aos planos α e β que, por hipótese, são paralelos. Logo r e s são paralelas. c.q.d.

> 3.º Teorema. Por um ponto do espaço, não pertencente a um plano, pode-se traçar um e somente um plano, paralelo ao primeiro.

Seja P um ponto do espaço não pertencente a α (fig. 11). Provemos que existe um plano passando por P, e que ele é único.

Realmente, se, por P, traçarmos duas retas, r e s paralelas a α, elas determinam um plano β que é paralelo a α (1.º Teorema).

Esse plano β é único, pois se existisse um outro plano π, nessas condições, todo plano, que passasse por P e por uma reta de α, determinaria sobre β e π duas retas concorren-

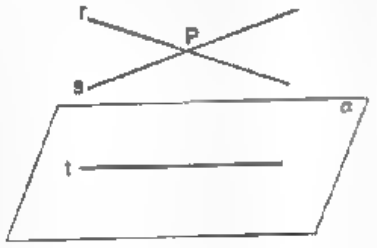


FIG. 11

tes no ponto P e paralelas à sua interseção t, com α (teorema anterior), o que seria absurdo pois por um ponto P não se podem traçar duas paralelas a uma mesma reta t.

Logo, pelo ponto P, só se pode traçar um único plano β paralelo a α. c.q.d.

Corolário. *Dois planos distintos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.*

E podemos dizer que todos os planos paralelos a um mesmo plano são paralelos entre si e constituem o que se chama um *feixe de planos*.

> 4.º Teorema. Os segmentos compreendidos entre dois planos paralelos, determinados por esses dois planos sobre duas retas paralelas que os interceptam, são iguais.

Sejam α e β dois planos paralelos e r e s suas retas paralelas que interceptam, respectivamente, α em A e B e β em C e D (fig. 12).

Provemos que $\overline{AC} = \overline{BD}$.

O plano π determinado por r e s intercepta α e β, respectivamente, segundo as retas AB e CD, paralelas. Então, $ABDC$ é um paralelogramo. E, como os lados opostos de um paralelogramo são iguais, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Dizemos então que os dois planos determinam segmentos iguais sobre as duas retas paralelas.

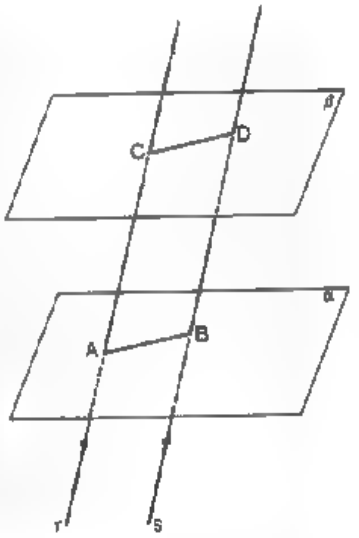


FIG. 12

> 5.º Teorema. Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

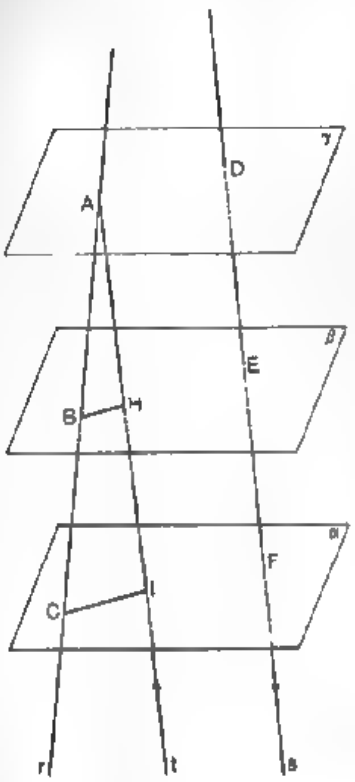


FIG. 13

Seja um feixe de planos paralelos. Tomemos, por facilidade, três planos α, β e γ, desse feixe (fig. 13).

Sejam r e s duas retas que interceptam α, β e γ em A, B e C e D, E e F, respectivamente.

Tracemos por A, uma paralela t, a reta s, interceptando β e α em H e I, respectivamente.

Pelo teorema anterior temos: $\overline{AH}=\overline{DE}$ e $\overline{HI}=\overline{EF}$ (I).

O plano r, determinado pelas retas r e t, determina sobre β e α as retas BH e CI paralelas, então, como um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais (Geometria Plana), podemos escrever

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{HI}}$$

ou pelas igualdades (I),

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$ e.q.d.

17. Ângulo de 2 retas.

Definição. Diz-se que duas semiretas paralelas, de origens A e B têm o *mesmo sentido*, quando, sobre o plano a que pertencem, estão no mesmo semi-plano cuja origem é a reta AB.

Em caso contrário, diz-se que têm *sentidos opostos*.

> Teorema. Dois ângulos cujos lados são paralelos e de mesmo sentido, são sempre iguais, quer pertençam ou não ao mesmo plano.

Sejam A e B dois ângulos de lados paralelos e de mesmo sentido (fig. 14).

As semiretas m e m' pertencem a um semiplano α de origem r e as semiretas n e n' pertencem a um outro semiplano β.

Suponhamos que α e β não pertençam ao mesmo plano e que tenham a mesma origem r.

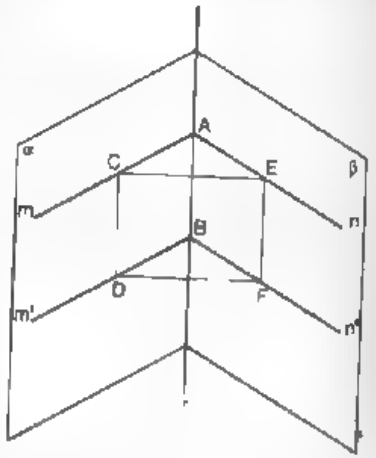


FIG. 14

Marquemos sobre os lados dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ os segmentos $\overline{AC}=\overline{BD}$ e $\overline{AE}=\overline{BF}$.

Os quadriláteros $ABDC$ e $ABFE$ são paralelogramos pois têm dois lados iguais e paralelos. Então $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são iguais e paralelos e, pela mesma razão acima, o quadrilátero $CDFE$ é um paralelogramo, e $\overline{CE}=\overline{DF}$.

Logo, os triângulos CAE e DBF são iguais (3 lados iguais) e portanto $\hat{A}=\hat{B}$.

Se os semiplanos α e β pertencessem ao mesmo plano, provar-se-ia que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ eram iguais com auxílio da teoria das paralelas.

Definições de Ângulos.

1.ª) Chama-se ângulo de duas retas concorrentes ao ângulo agudo ou reto formado pelas semiretas cuja origem é a interseção das duas retas.

2.ª) Chama-se ângulo de duas retas não complanares (retas que se cruzam) ao ângulo formado por duas retas concorrentes, traçadas por um ponto qualquer do espáço, paralelas, respectivamente, às retas dadas.

Esta definição se justifica pois, se por dois pontos quaisquer do espaço, traçassemos retas paralelas às duas retas que se cruzam, pelo teorema anterior, os ângulos formados por essas retas seriam iguais.

RETAS E PLANOS PERPENDICULARES

18. Retas perpendiculares.

Definição. Diz-se que duas retas, complanares ou não, são perpendiculares quando o ângulo por elas formado for reto.

Em geral, faz-se uma pequena distinção entre as retas perpendiculares, complanares ou não.

Quando complanares dizem-se *perpendiculares*.

Quando não complanares dizem-se *ortogonais*.

Conseqüências das definições.

1.ª) Duas retas paralelas formam, com uma reta qualquer do espaço ângulos iguais.

2.ª) Se duas retas são paralelas, toda perpendicular a uma é perpendicular à outra.

3.ª) Por um ponto qualquer do espaço, podemos traçar uma infinidade de retas perpendiculares a uma reta dada do espaço.

> Teorema. Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes, ela é perpendicular a qualquer reta do plano das retas concorrentes.

Seja t uma reta perpendicular a duas retas concorrentes r e s pertencentes a um plano α (fig. 15).

A reta t terá forçosamente um ponto em comum com α, senão uma reta qualquer de α, paralela a t, seria perpendicular a r e s, o que é impossível, pois r e s não são paralelas.

Tracemos pelo ponto P, interseção de t com α, duas retas m e n paralelas a r e s, respectivamente.

A reta t é perpendicular a m e n; provemos que é também perpendicular a uma reta x qualquer do plano, passando por P (se x não passasse por P, poder-se-ia tomar, por P, uma paralela a x).

Marquemos sobre t os pontos A e B, eqüidistantes de P.

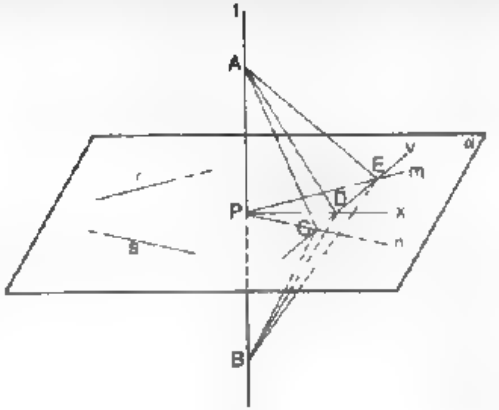


Fig. 15

Tracemos uma reta s que intercepte as retas n, x e m em C, D e E, respectivamente, e unamos esses pontos aos pontos A e B.

Temos que, nos planos CAB e EAB, $\overline{CP}$ e $\overline{EP}$ são, respectivamente, mediatrizes de $\overline{AB}$, donde $\overline{CA} = \overline{CB}$ e $\overline{EA} = \overline{EB}$.

E portanto os triângulos CBE e CAE são iguais (3 lados iguais) e os ângulos $\widehat{CEB}$ e $\widehat{CEA}$ também o são.

Assim os triângulos DEA e DEB são iguais, pois possuem um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguais, logo $DA = DB$, portanto, a reta DP é a mediatriz de AB, isto é, as retas t e x são perpendiculares. c.q.d.

19. Reta perpendicular a um plano.

Definições:

1.ª) Uma *reta é perpendicular a um plano* quando é perpendicular a qualquer reta desse plano.

Diz-se também, nesse caso, que o plano é perpendicular à reta.

2.ª) O ponto de interseção, da perpendicular que passa por um ponto, com um plano, diz-se pé da perpendicular no plano.

3.º) Uma reta diz-se *inclinada* ou *oblíqua* a um plano que o intercepta, quando não se verifica a condição da primeira definição.

CONDIÇÃO SUFICIENTE DE PERPENDICULARISMO. A condição suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes situadas nesse plano.

Conclusão obtida do teorema do n.º 18 e das definições.

COROLÁRIOS.

1.º) Toda reta perpendicular a um plano é perpendicular a qualquer plano paralelo ao primeiro.

2.º) Todo plano perpendicular a uma reta é perpendicular a qualquer reta paralela à primeira.

1.º TEOREMA. Um plano perpendicular a uma reta em um ponto é o lugar geométrico das perpendiculares à reta dada naquele ponto.

Seja uma reta r perpendicular a um plano α, num ponto P (fig. 16).

Uma reta s qualquer passando por P, não pertencente a α, determina com r um plano β que possui um ponto comum P com α. Então o plano β intercepta α, segundo uma reta t (n.º 11) perpendicular a r em P.

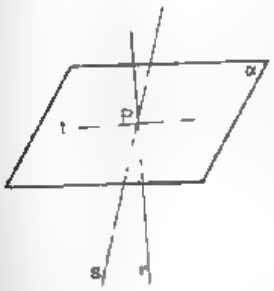


FIG. 16

Como a reta t, pertencente a β, é perpendicular à reta r, também pertencente a β, então s não pode ser perpendicular a r, pois em um plano só existe uma perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto.

Portanto o plano α contém todas retas perpendiculares a r no ponto P. c.q.d.

PLANO MEDIADOR. Vemos, como conseqüência do teorema anterior, que o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos distintos do espaço é o plano perpendicular ao meio do segmento que une esses dois pontos do espaço.

Esse plano diz-se *plano mediador* do segmento.

2.º TEOREMA. Por um ponto qualquer do espaço passa um plano, e somente um, perpendicular a uma reta dada.

Se o ponto P está sobre a reta r, como conseqüência imediata do 1.º teorema, existe um plano α passando por P perpendicular a r. Esse plano é único, pois, se existisse outro, β, qualquer plano contendo r interceptaria α e β segundo duas retas perpendiculares a r, passando por P, o que é absurdo pois por um ponto de uma reta de um plano passa uma só perpendicular a essa reta, pertencente ao plano.

Se o ponto Q não pertencer a r, basta traçar uma reta s, paralela a r, por Q, e recairíamos no primeiro caso, pois todo plano perpendicular a r é perpendicular a s.

Então existe α e é único. c.q.d.

COROLÁRIO. Dois planos distintos paralelos a uma reta, são paralelos entre si.

3.º TEOREMA. Se uma reta de um plano é perpendicular a outro plano, este possui uma reta perpendicular ao primeiro.

Sejam α e β dois planos dos quais o primeiro, α, possui uma reta r perpendicular ao segundo, em um ponto P (fig. 18).

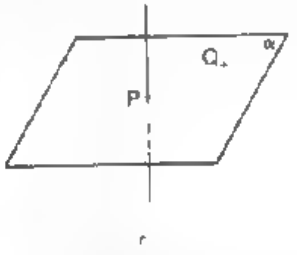


FIG. 17

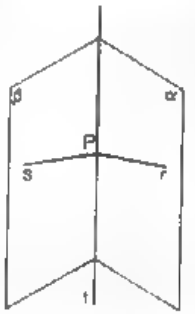


FIG. 18

Provemos que β possui uma reta perpendicular a α.

De fato, os planos α e β têm uma reta comum t, pois têm um ponto comum P.

Seja s a reta de β perpendicular a t em P, pois sendo r perpendicular as retas s e t (1.º teorema), s será perpendicular as retas r e t. Portanto, β contém a reta s perpendicular a α, c.q.d.

20. Planos perpendiculares.

DEFINIÇÃO. Dois planos dizem-se perpendiculares, quando, cada um deles, possui uma reta perpendicular ao outro.

CONSEQÜÊNCIA DA DEFINIÇÃO E DO TEOREMA ANTERIOR. Quando dois planos são perpendiculares, toda reta traçada sobre um qualquer dos dois planos, perpendicularmente à sua interseção, é perpendicular ao outro.

> 1.º TEOREMA. Por um ponto passa uma e somente uma reta perpendicular a um plano dado.

Seja um plano α e um ponto P pertencente ou não a α (fig. 19).

Tracemos por P um plano β perpendicular a α e seja r a interseção de α e β. Tracemos também por P a reta s pertencente a β e perpendicular a r. Então s é perpendicular a α e portanto por P passa uma perpendicular a α.

Reta essa que é única pois, se houvesse duas, determinariam um plano que interceptaria α segundo uma reta perpendicular a essas duas retas, o que é impossível pois não pode

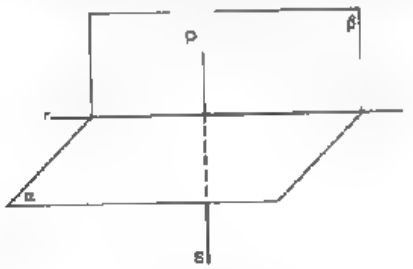


FIG. 19

haver mais de uma reta de um plano que passe por um ponto dado e seja perpendicular a outra reta desse plano.

Existe pois uma única reta s passando por P perpendicular a α. c.q.d.

COROLÁRIOS.

1.º) Duas retas distintas perpendiculares a um mesmo plano, são paralelas entre si.

2.º) Por um ponto passam infinitos planos perpendiculares a um plano dado, todos esses divididos em semiplanos pela reta perpendicular ao plano passando pelo ponto.

3.º) Se dois planos são perpendiculares, toda reta perpendicular a um deles passando por um ponto de outro está contida nesse outro.

> 2.º TEOREMA. Se de um ponto não pertencente a um plano traçarmos uma perpendicular e várias oblíquas a esse plano:
>
> 1.º) o segmento da perpendicular desde o ponto até o plano é menor do que o segmento de qualquer oblíqua desde o ponto até o plano;
>
> 2.º) Os segmentos, limitados pelo ponto e pelo plano, de duas oblíquas igualmente afastadas do pé da perpendicular, são iguais.
>
> 3.º) Se duas oblíquas ao plano se afastam desigualmente do pé da perpendicular, será maior o segmento, limitado pelo ponto e pelo plano, da oblíqua que mais se afaste.

Seja P um ponto do espaço não pertencente a um plano α. (fig. 20).

Tracemos, por P, uma perpendicular PA e as oblíquas PB, PC e PD, ao plano de α de modo que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} < \overline{AD}$.

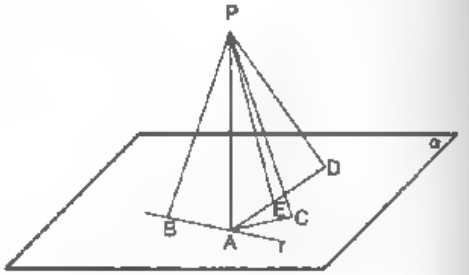


FIG. 20

1.º) Qualquer oblíqua PB é maior do que a perpendicular PA.

De fato, o plano β, determinado por PA e PB, tem para interseção com α, a reta r. Como toda reta, perpendicular a um plano, é perpendicular a qualquer reta desse plano então PA é perpendicular à r, e PB é oblíqua. Então, baseado na Geometria Plana (3.ª série ginasial) temos:

$$\overline{PB} > \overline{PA} \text{ c.q.d.}$$

2.º) Os triângulos PAC e PAB são iguais pois $\widehat{PAB} = \widehat{PAC} = 90°$ o cateto PA é comum e os catetos AB e AC são iguais por hipótese.

Então as hipotenusas PB e PC são iguais. c.q.d.

3.º) Marquemos, sobre AD, $\overline{AE} = \overline{AC}$, então, pelo que acabamos de demonstrar, $PE = PC$; mas, no plano determinado pelos pontos P, E e D, PA é perpendicular a ED e $\overline{DA} > \overline{EA}$ logo, baseado na Geometria Plana (3.ª série ginasial), concluímos que $\overline{PD} > \overline{PE}$ ou $\overline{PD} > \overline{PC}$ c.q.d.

Distância — Definições.

1) Distância entre dois pontos do espaço é o segmento de reta que une esses dois pontos.

2) Distância de um ponto qualquer do espaço a uma reta é a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular a essa reta passando por aquele ponto.

3) Distância entre duas retas distintas do espaço é a menor distância entre dois pontos dessas retas.

Se as retas são *concorrentes*, a distância é nula.

Se as retas são *paralelas*, a distância constante de um ponto qualquer de uma à outra é a distância entre as retas.

Se as retas *se cruzam*, demonstra-se que existe uma só reta perpendicular a ambas, e que a distância entre os pontos de interseção dessas retas com a perpendicular é mínima, portanto será a distância entre essas retas não complanares.

4) Distância de um ponto a um plano é a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular baixada desse ponto ao plano.

Baseado no teorema anterior, podíamos dizer que, a distância de um ponto a um plano é a menor distância entre esse ponto e um ponto do plano.

5) Distância entre dois planos — temos apenas dois casos a considerar.

Se os planos são *concorrentes*, a distância é nula.

Se os planos são paralelos, a distância, entre um ponto qualquer de um deles e o outro, é constante.

3.º Teorema das três perpendiculares. Se uma reta é perpendicular a um plano e se traça por seu pé, neste plano, uma reta qualquer, pertencente ao plano, toda reta perpendicular a esta e também pertencente ao plano é perpendicular ao plano das duas primeiras retas.

Seja r uma reta perpendicular ao plano α e seja P o pé de r sobre α. (fig. 21).

Tracemos por P uma reta s qualquer de α e provemos que a reta t, perpendicular a s e pertencente a α, é perpendicular ao plano β determinado por r e s.

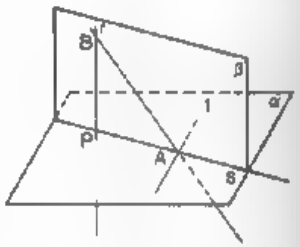


FIG. 21

Sabemos que para t ser perpendicular a β é suficiente que t seja perpendicular a duas retas concorrentes, r e s, de β.

Porém t é perpendicular a s, por hipótese. Provemos então que t é também perpendicular à reta r.

De fato, como é perpendicular a α, r é perpendicular a qualquer reta de α.

Então t é perpendicular a duas retas concorrentes de β, e portanto é perpendicular a β. c.q.d.

Corolário. Se por um ponto P de α traçamos uma perpendicular r a α, e outra perpendicular s a uma reta qualquer t de α, toda reta que une o ponto A, interseção de s e t, a um ponto qualquer β de r é perpendicular a t.

21. Projeções.

Definições.

1.º) Chama-se projeção de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano, traçado por esse ponto.

2.º) Chama-se projeção de uma reta sobre um plano ao lugar geométrico das projeções dos pontos dessa reta sobre o plano.

A projeção de uma reta sobre um plano é em geral uma reta.

3.º) Chama-se projeção de um segmento de reta, não perpendicular a um plano, sobre esse plano, ao segmento de reta, do plano, cujos extremos são as projeções dos extremos do segmento dado.

Se o segmento de reta é perpendicular ao plano sua projeção sobre o plano é um ponto.

Ângulo de uma reta com um plano. (Inclinação). É o ângulo agudo que a reta forma com sua projeção sobre o plano.

Não fica definido o ângulo de uma reta perpendicular com um plano, apenas dizemos que neste caso o ângulo diz-se reto.

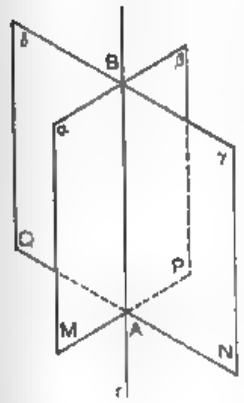


FIG. 22

22. Diedros.

Preliminares. Dados dois planos que se interceptam segundo uma reta r, fica o espaço dividido em quatro regiões, cada uma das quais está constituída pelos pontos comuns a dois semiespaços determinados pelos dois planos dados.

Chamando de α, β, γ e δ os semiplanos determinados pela interseção r dos dois planos dados, podemos dizer que, cada uma das quatro regiões estão limitadas por dois dos quatro semiplanos α, β, γ e δ de mesma origem r (fig. 22).

Essas quatro regiões são denominadas ângulos diédricos ou simplesmente diedros e são indicados pelas seguintes notações:

$$\alpha\gamma,\ \gamma\beta,\ \beta\delta \text{ e } \delta\alpha \text{ ou } \alpha r\gamma,\ \gamma r\beta,\ \beta r\delta \text{ e } \delta r\alpha$$

ou $\alpha AB\gamma$, $\gamma AB\beta$, $\beta AB\delta$ e $\delta AB\alpha$

ou $\widehat{MABN}$, $\widehat{NABP}$, $\widehat{PABQ}$ e $\widehat{QABM}$

É o diedro ou ângulo de dois planos uma grandeza mensurável que depende apenas da inclinação dos dois planos.

Definição. Chama-se *diedro* ao conjunto de pontos do espaço limitados por dois semiplanos que possuam a mesma reta de origem.

Os semiplanos e a reta de origem denominam-se respectivamente, faces e aresta do diedro.

Ângulo plano de um diedro. Se um plano intercepta a aresta de um diedro intercepta as faces desse diedro segundo duas semi-retas. Os pontos comuns ao diedro e ao plano são os pontos do *ângulo* determinado pelas duas semiretas.

A êsse ângulo damos o nome de *secção do diedro*.

Se o plano considerado é perpendicular a aresta do diedro a *secção* diz-se *normal* ou *reta*. Uma secção reta de uma diedro chama-se também de *ângulo plano* ou *retilíneo do diedro*.

Podemos então dizer:

> Ângulo plano de um diedro é o ângulo formado pela interseção desse diedro com um plano perpendicular a uma aresta.

Diedros adjacentes. Dois diedros dizem-se *adjacentes* quando possuem a mesma aresta e uma face comum situada entre as outras duas.

Comparação de dois diedros. Dois diedros dizem-se *iguais* quando coincidem por superposição.

Dois diedros dizem-se *desiguais* em caso contrário, e o *menor* diedro é aquele que, feita a superposição de suas arestas e de uma das faces, de modo que os diedros não sejam adjacentes, possua todos os pontos, da face não coincidentes, interiores ao outro.

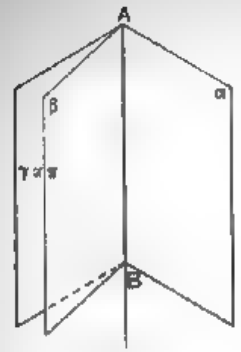
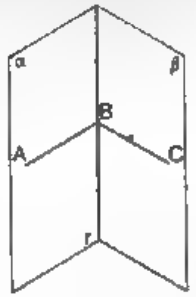


FIG. 23



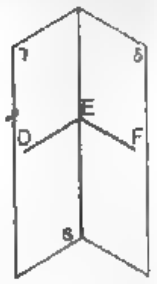


FIG. 24

Façamos a superposição do diedro $\beta\pi$ sobre o diedro $\alpha\gamma$ de modo que possuam uma aresta comum AB, π coincida com γ, e sejam não adjacentes. Esses dois diedros são desiguais e o diedro $\beta AB\gamma$ é o menor porque a sua face β, não coincidente, têm todos os pontos interiores a $\alpha AB\gamma$.

Diedros opostos pela aresta. Dois diedros dizem-se opostos pela aresta quando possuem a mesma aresta e as faces opostas duas a duas.

Ou, ainda, são aqueles em que as faces de um são os prolongamentos das faces do outro.

> Teorema. A condição necessária e suficiente para que dois diedros sejam iguais é que sejam iguais seus ângulos planos.

A condição é necessária.

Com efeito, se os dois diedros são iguais eles coincidem por superposição e portanto seus ângulos planos coincidem.

A condição é suficiente.

Realmente, sejam os ângulos planos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{DEF}$ dos diedros $\alpha r\beta$ e $\gamma s\delta$ (fig. 24).

Transportemos o diedro $\gamma s\delta$ sobre $\alpha r\beta$ de modo que s coincida com r, E com B e γ com α.

Mas os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{DEF}$ são iguais, então EF coincidirá com BC e como dois planos que têm duas retas concorrentes, r e BC comuns coincidem, então δ coincide com β e portanto os dois diedros coincidem. c.q.d.

Conseqüências.

I. Se verifica imediatamente que um diedro é: *Convexo, côncavo, agudo, reto, obtuso, plano* ou *de uma volta* conforme seu ângulo plano também o for. O diedro plano tem suas faces opostas e nada mais é do que o conjunto dos pontos de um semiespaço. O diedro de uma volta tem suas faces coincidentes e nada mais é do que o conjunto dos pontos do espaço.

II. A soma ou diferença de dois diedros é igual à soma ou diferença de seus ângulos planos.

III. Dois diedros chamam-se complementares, suplementares ou replementares, quando também o sejam seus ângulos planos.

IV. A soma dos diedros formados em torno de uma reta, do mesmo lado de um plano, vale dois retos e formados em torno de uma reta vale 4 retos.

V. Plano bissetor de um diedro é o semiplano que tem para origem a aresta do diedro e divide ao meio esse diedro.

VI. Dois diedros adjacentes são suplementares quando seus ângulos planos também o forem.

VII. Dois diedros opostos pela aresta são iguais.

VIII. As relações de desigualdade entre os diedros são as mesmas que entre os seus ângulos planos.

Assim, dois diedros são desiguais quando têm ângulos planos desiguais, e ao menor diedro corresponde o menor ângulo plano.

Medida de um diedro. Demonstra-se que a razão entre dois diedros é a razão de seus ângulos planos.

E, assim sendo, tomando-se para unidade de medida de um diedro, o diedro que possua para seu ângulo plano a unidade de medida dos ângulos, podemos dizer que: *a medida de um diedro é a medida de seu ângulo plano.*

Planos perpendiculares. Dois planos que se interceptam são perpendiculares se os diedros adjacentes determinados são iguais.

Ou, dois planos que se interceptam são perpendiculares quando formam quatro diedros retos e, reciprocamente, se um dos quatro diedros é reto os planos são perpendiculares.

23. Teoremas demonstráveis imediatamente pela consideração dos ângulos planos.

> 1.º Teorema. Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que a contém é perpendicular ao primeiro plano.

Com efeito, se traçarmos, no plano dado α, uma perpendicular r à sua interseção s, com o plano β que passa pela perpendicular dada t, e passando pelo pé P da perpendicular verificamos que os dois planos α e β são perpendiculares, pois o ângulo diedro desses planos é reto, em virtude de seu ângulo plano também o ser.

> 2.º Teorema. Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um, perpendicular à interseção dos dois planos, é perpendicular ao outro.

Basta que se trace pelo pé da perpendicular a interseção uma perpendicular a essa interseção, como o ângulo diedro dos dois planos é reto, o seu ângulo plano também o é. E como uma reta perpendicular a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano, está demonstrado o nosso teorema.

> 3.º Teorema. Por uma reta oblíqua a um plano passa um e somente um plano perpendicular ao primeiro.

Sejam um plano α e uma oblíqua r.

Com efeito, tirando-se por um ponto P qualquer de r uma perpendicular s a α, r e s determinam um plano β, perpendicular ao plano α (1.º teorema).

Esse plano β é o único que passa por r e é perpendicular a α, pois, se houvesse outro haveria de conter s e não seria distinto de α, pois conteria r e s.

> 4.º Teorema. (Devido a Arquita). Se dois planos são perpendiculares a um terceiro e se interceptam, sua interseção é perpendicular ao terceiro plano.

Sejam os planos α e β perpendiculares a um plano γ e seja r a interseção de α e β.

De fato r é perpendicular a γ pois se não o fosse, pelo teorema anterior só seria possível traçar por r um único plano perpendicular a γ, o que contrariaria a hipótese.

24. Ângulos Sólidos.

Definições. Chama-se *ângulo sólido*, *angoloide* ou, ainda, *ângulo poliédrico* ao conjunto de pontos do espaço limitado por 3 ou mais ângulos planos, de mesmo vértice, tendo dois a dois um lado em comum.

A figura 25 representa um *ângulo sólido* que indicamos com a seguinte notação $VABCDEF$ ou simplesmente por V.

Os ângulos planos AVB, BVC, $\ldots FVA$ que limitam o ângulo sólido, chamam-se *faces* do ângulo sólido, seus lados VA, VB, $\ldots VF$ são as *arestas* e o vértice comum V é o vértice do ângulo sólido. (As faces são medidas com unidades de ângulo).

Os diedros $ABVC$, $BCVD$ .... $EFCA$ formados em cada aresta de $VABCDEF$ são os diedros do ângulo sólido.

É fácil de ver que um ângulo sólido tem tantos diedros quantas são suas arestas, e que possui, no mínimo três arestas.

Dois ângulos sólidos dizem-se *iguais* quando coincidem por superposição.

Se eles são iguais, seus elementos, faces e diedros, são iguais. Nem sempre, porém, se seus elementos são iguais, eles são iguais.

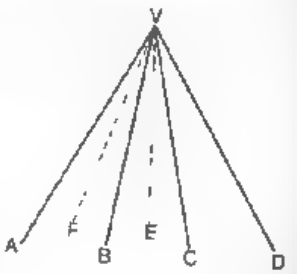


FIG. 25

Dois ângulos sólidos dizem-se *simétricos* ou *opostos pelo vértice*, quando as arestas de um são os prolongamentos das arestas do outro (fig. 26).

Secção plana. Chama-se *secção plana* de um ângulo sólido, ao polígono que se obtém cortando-se o ângulo sólido por um plano que, não passando pelo seu vértice, intercepta todas suas arestas (fig. 27).

Um ângulo sólido diz-se *côncavo* ou *convexo*, conforme sua secção plana seja um polígono côncavo ou convexo.

Estudaremos apenas os ângulos sólidos convexos.

Se a secção plana é um polígono de n lados, o ângulo sólido terá n arestas e n vértices e se chamará n-aedro.

Em particular se $n=3,4,5,\ldots$ o ângulo sólido se chamará *triedro*, *tetraedro*, *pentaedro*,...

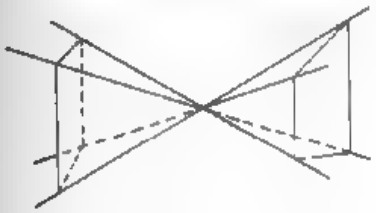


FIG. 26

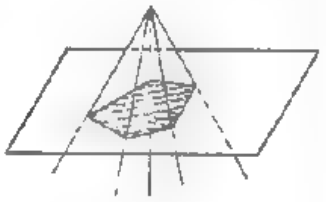


FIG. 27

25. Triedros.

Definições. Chama-se *triedro* ao ângulo sólido de três faces e, portanto, três arestas e três diedros.

Denomina-se *triedro isósceles* ao triedro que tem duas faces iguais.

Chama-se *triedro isoângulo* todo aquele que possui dois diedros iguais.

É fácil de ver que todo triedro isoângulo é também isósceles, e que as faces opostas aos diedros iguais são iguais. Verifica-se que todo triedro isósceles pode coincidir com seu simétrico.

Um triedro diz-se *retângulo*, *birretângulo* ou *trirretângulo* conforme possua um, dois ou três diedros retos.

Qualquer dos triedros, formados pelas paredes de uma sala de aula e o teto é um exemplo de triedro trirretângulo

26. Propriedades dos triedros.

1.º Teorema. Em todo triedro uma face qualquer é menor do que a soma das outras duas.

Seja um triedro $VABC$ (fig. 28). Bastará fazer a demonstração para a maior face AVC, pois se a maior face é menor do que a soma das duas outras, com mais forte razão serão menores as outras duas BVC e AVB.

Se conseguirmos provar que uma das faces, BVC ou AVB, é menor ou igual a AVC, evidentemente estará demonstrado nosso teorema.

Tracemos a semireta VD, pertencente à face AVC, a qual forme com VA um ângulo $\widehat{AVD}=\widehat{AVB}$, e unamos os pontos arbitrários A e C pertencentes às arestas VA e VC, respectivamente.

Sejam também D o ponto de intersecção da semireta VD com o segmento $\overline{AC}$, e B o ponto da semireta VB tal que $\overline{VB}=\overline{VD}$.

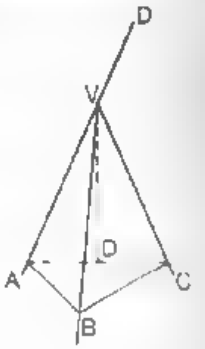


FIG. 28

Os triângulos AVB e AVD são iguais, por terem um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguais.

Portanto $\overline{AB}=\overline{AD}$.

No triângulo ABC temos $\overline{BC}>\overline{AC}-\overline{AB}$, porque, em um triângulo, cada lado é maior do que a diferença dos outros dois.

Então $\overline{BC}>\overline{AC}-\overline{AD}$ $\therefore$ $\overline{BC}>\overline{DC}$.

Nos triângulos BVC e DVC temos:

$$\overline{VB}=\overline{VD},\ VC \text{ é comum e } \overline{BC}>\overline{DC}$$

Como em dois triângulos que possuem dois lados iguais e um desigual, ao maior dos dois lados desiguais está oposto maior ângulo (Geometria Plana), então:

$$\widehat{BVC}>\widehat{DVC}$$

Somando a ambos os membros desta igualdade os ângulos iguais $\widehat{AVB}$ e AVD, temos:

$$\widehat{BVC}+\widehat{AVB}>\widehat{AVD}+\widehat{DVC} \text{ e } \widehat{AVD}+\widehat{DVC}=\widehat{AVC}$$

$$\therefore \quad \widehat{AVC}<\widehat{AVB}+\widehat{BVC} \qquad \text{c.q.d.}$$

Corolário. Em todo triedro, qualquer face é maior do que a diferença das outras duas.

2.º Teorema. Em todo triedro a soma de suas faces é menor do que 360°.

Seja um triedro $VABC$ cuja secção plana é ABC e tracemos a semireta VD, prolongamento da aresta VA (fig. 28).

Pelo teorema anterior, temos, no triedro $VBCD$:

$$\widehat{BVC}<\widehat{BVD}+\widehat{CVD}$$

Somando, a ambos os membros desta desigualdade $\widehat{AVB}+\widehat{AVC}$, obtemos:

$$\widehat{AVB}+\widehat{BVC}+\widehat{AVC}<\widehat{AVB}+\widehat{BVD}+\widehat{AVC}+\widehat{CVD}$$

Mas, $\widehat{AVB}+\widehat{BVD}=180°$ e $\widehat{AVC}+\widehat{CVD}=180°$

o que é fácil de ver pela figura 28.

Então,

$$\widehat{AVB}+\widehat{BVC}+\widehat{AVC}<360° \text{ c.q.d.}$$

Corolários.

1.º) Todo diedro de um triedro, aumentado de dois diedros retos, é maior do que a soma dos outros dois.

2.º) A soma dos diedros de um triedro é maior do que dois retos e menor do que seis.

27. Casos de igualdade dos triedros.

Primeiro caso. Dois triedros são iguais quando têm uma face igual adjacente a diedros respectivamente iguais e apresentando a mesma disposição.

Sejam dois triedros $VABC$ e $V'DEF$, possuindo uma face igual, a face AVC igual à face $DV'F$, e os diedros adjacentes a AVC e $DV'F$ respectivamente iguais. $\widehat{BVAC}=\widehat{EV'DF}$ e $\widehat{AVCB}=\widehat{DV'FE}$ (fig. 29).

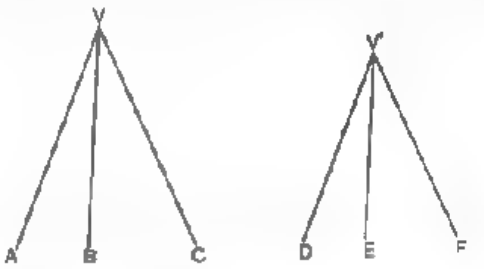


FIG. 29

Transportando o triedro $V'DEF$ sobre $VABC$ de modo que as faces iguais coincidam, temos que as arestas $V'D$ e $V'F$ do segundo coincidirão com as arestas VA e VC do primeiro.

Como $\widehat{BVAC}=\widehat{EV'DF}$, o plano $DV'E$ coincide com o plano AVB, e como $\widehat{AVCB}=\widehat{DV'FE}$, os planos $EV'F$ e BVC também coincidem. Logo a aresta $V'E$, que pertence, ao mesmo tempo aos planos AVB e BVC, coincidirá com VB.

Então as três arestas do triedro $V'DEF$ coincidem com as arestas de $VABC$, e portanto os triedros são iguais, pois coincidem por superposição.

Segundo caso. Dois triedros são iguais quando têm um ângulo diedro igual, compreendido entre faces respectivamente iguais e apresentando a mesma disposição.

Sejam dois triedros $VABC$ e $V'DEF$ (fig. 29) que possuam os diedros $\widehat{AVBC}$ e $\widehat{DVEF}$ iguais e as faces AVB e BVC respectivamente iguais a $DV'E$ e $EV'F$ e tendo a mesma disposição.

Transportando o segundo triedro sobre o primeiro de modo que os vértices V' e V coincidam, bem como os ângulos diedros $\widehat{AVBC}$ e $\widehat{DV'EF}$, então coincidirão também as arestas VB e $V'E$.

Como, por hipótese, as faces AVB e $DV'E$ são iguais então a aresta $V'D$ coincidirá com VA, e, como BVC e $EV'F$ são também iguais então também $V'F$ coincidirá com VC.

E, se as três arestas coincidem, os triedros são iguais, pois coincidem por superposição.

> Terceiro caso. Dois triedros são iguais quando têm as faces iguais e igualmente dispostas.

Sejam dois triedros $VABC$ e $V'DEF$ e sejam suas faces tais que:

$$\widehat{AVB} = \widehat{DV'E}$$
$$\widehat{AVC} = \widehat{DV'F}$$
$$\widehat{BVC} = \widehat{EV'F}$$

e que possuam a mesma disposição. E sejam os pontos A, B, C, D, E, F, tais que:

$$\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \overline{V'D} = \overline{V'E} = \overline{V'F} \text{ (fig. 30)}$$

Os triângulos AVB, AVC e BVC, do primeiro triedro, são respectivamente iguais aos triângulos $DV'E$, $DV'F$ e $EV'F$, do segundo triedro, pois têm um ângulo igual (hipótese) compreendido entre lados respectivamente iguais (construção).

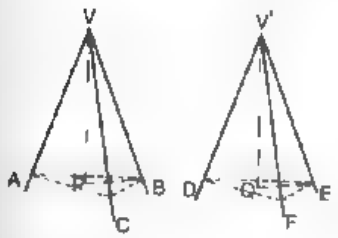


FIG. 30

Logo,

$$\overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{AC} = \overline{DF} \text{ e } \overline{BC} = \overline{EF}$$

e portanto os triângulos ABC e DEF são iguais assim como os círculos circunscritos a esses triângulos.

Tracemos as perpendiculares VP e $V'Q$ aos planos ABC e DEF, respectivamente.

Como oblíquas iguais ($\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \overline{V'D} = \overline{V'E} = \overline{V'F}$) afastam-se igualmente do pé da perpendicular (VP e VQ) então PB e QE são raios dos círculos circunscritos aos triângulos ABC e DEF, respectivamente; e como esses círculos são iguais $\overline{PB} = \overline{QE}$.

Logo os triângulos retângulos VPB e $V'QE$ são iguais, pois têm a hipotenusa ($\overline{VB} = \overline{V'E}$) e um cateto ($\overline{PB} = \overline{QE}$) iguais.

Transportando o triedro $V'DEF$ sobre $VABC$ de modo que DEF coincida com ABC, como Q coincide também com P então V' coincide com V e os dois triedros são iguais pois coincidem por superposição.

> Quarto caso. Dois triedros são iguais quando têm seus ângulos diedros respectivamente iguais e igualmente dispostos.

Sejam dois diedros $VABC$ e $V'DEF$ tais que $\widehat{AVCB}$, $\widehat{BVAC}$ e $\widehat{CVBA}$ sejam respectivamente iguais a $\widehat{DV'FE}$, $\widehat{EV'DF}$ e $\widehat{FV'ED}$.

Os triedros suplementares de $VABC$ e $V'DEF$, V_1 e V_2, têm as faces respectivamente iguais logo esses dois triedros são iguais (3.º caso). Mas, se os triedros V_1 e V_2 são iguais seus suplementares $VABC$ e $V'DEF$ também o são. (É pois o quarto caso, uma conseqüência do terceiro caso).

Analogia entre os triedros e os triângulos. Notamos no nosso estudo várias analogias entre um triedro e um triângulo, e nestas relações de analogia as faces e ângulos diedros dos triedros correspondem, respectivamente, aos lados e aos ângulos dos triângulos.

Há, entretanto, certas propriedades dos triedros que se diferenciam profundamente das dos triângulos. Citamos como exemplos o segundo corolário (pág. 362) e o quarto caso de igualdade dos triedros.

28. Propriedades dos ângulos poliedros (ângulos sólidos).

> PRIMEIRA PROPRIEDADE. Em todo ângulo poliedro, qualquer face é menor do que a soma das outras.

Já demonstramos esta propriedade para os triedros.

Seja então um ângulo poliédrico, de n faces ($n>3$) $VABC\ldots N$. (fig. 31)

E, seja VAN a maior das faces.

Consideremos os triedros $VABN$, $VBCN$ $VCDN$,.... $VLMN$

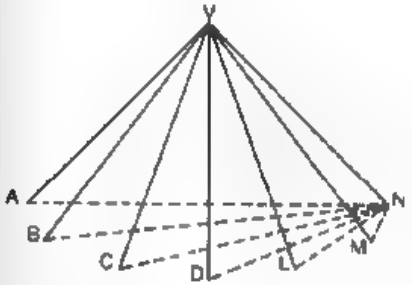


FIG. 31

De acordo com uma as propriedades dos triedros (n.º 26), temos:

$$\widehat{AVN}<\widehat{AVB}+\widehat{BVN}$$
$$\widehat{BVN}<\widehat{BVC}+\widehat{CVN}$$
$$\widehat{CVN}<\widehat{VCD}+\widehat{DVN}$$
$$\text{----------}$$
$$\widehat{LVN}<\widehat{LVM}+\widehat{MVN}$$

Somando, membro a membro, essas $n-2$ desigualdades, e efetuando as eliminações possíveis, obtemos:

$$\widehat{AVN}<\widehat{AVB}+\widehat{BVC}+\widehat{CVD}+\ldots.+\widehat{LVM}+\widehat{MVN}$$ c.q.d.

> SEGUNDA PROPRIEDADE. Em todo ângulo poliedro a soma das faces é menor do que quatro ângulos retos.

Seja $VABCD\ldots.N$ um ângulo poliedro de n faces (fig. 32) e consideremos uma secção plana $ABCD\ldots N$ desse poliedro.

Tomemos um ponto P interior à secção plana e unamos desses pontos aos vértices A, B, C, D, $\ldots N$.

É fácil de ver que o número de triângulos, de vértice P e bases respectivamente iguais aos lados da secção plana, é igual ao número de triângulos de vértice V e bases, também iguais aos lados da secção plana.

Então a soma dos ângulos internos dos triângulos de vértice P, é igual à mesma soma dos de vértice V.

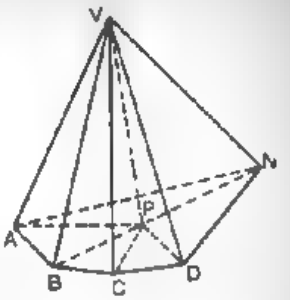


FIG. 32

Considerando os triedros de vértice A, B, C, D, $\ldots N$, e empregando a propriedade anterior, temos:

$$\widehat{ABC}<\widehat{ABV}+\widehat{VBC}$$
$$\widehat{BCD}<\widehat{BCV}+\widehat{VCD}$$
$$\text{----------}$$
$$\widehat{NAB}<\widehat{NAV}+\widehat{VAB}$$

Somando, membro a membro, essas n desigualdades, temos que, o primeiro membro é a soma dos ângulos internos da secção plana, que sabemos ser $2r(n-2)$; e, o segundo membro é a soma dos ângulos internos dos triângulos formados nas faces do ângulo poliedro, excetuados os de vértice V. Chamando de S a soma dos ângulos de vértice V, pertencentes aos triângulos formados sobre as faces de $VABC\ldots N$, e que nada mais é do que a soma das faces do ângulo poliedro V, podemos escrever:

$$2r(n-2)<2nr-S \text{ ou } 2nr-4r<2nr-S$$
$$\therefore\ S<4r \text{ c.q.d.}$$

CAPÍTULO II

Poliedros

1. Superfícies poliédrica. Definições. Chama-se *superfície poliédrica* a figura formada pelos pontos de quatro ou mais polígonos planos pertencentes a planos diferentes e tais que, dois a dois, tenham um lado em comum.

Esses polígonos, seus lados e seus vértices chamam-se respectivamente, *faces*, *arestas* e *vértices* da superfície poliédrica.

Se de uma superfície poliédrica retiramos uma ou mais faces, tendo duas a duas pelo menos uma aresta em comum, obtemos o que denominamos de *superfície poliédrica aberta*.

Uma superfície poliédrica diz-se *convexa* quando pertence ao mesmo semiespaço determinado pelo plano suporte de qualquer uma de suas faces. Diz-se *côncava* quando não pertencer inteiramente a, pelo menos, um dos semiespaços determinados pelo suporte de uma de suas faces.

Uma superfície poliédrica divide o espaço em duas regiões: uma, que chamaremos de *finita* e que constitui o que se denomina de *poliedro*, a outra, chamaremos de *infinita*.

2. Poliedros. Definições. Chama-se *poliedro* ao conjunto de pontos do espaço limitado por uma *superfície poliédrica* (fig. 33 e 34).

As faces, arestas e vértices de uma superfície poliédrica são respectivamente as *faces*, *arestas* e *vértices* do poliedro.

FIG. 33

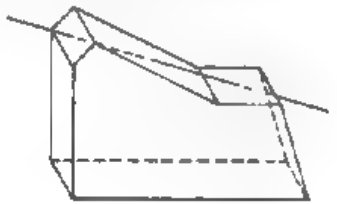


FIG. 34

Um poliedro diz-se *convexo* ou *côncavo* conforme seja convexo ou côncavo a superfície poliédrica que o limita (fig. 33 e 34).

Se um poliedro é convexo, um plano qualquer do espaço ou não tem ponto em comum com o poliedro, ou o *intercepta*. Um plano intercepta um poliedro em um só vértice, em uma só aresta, em uma só face ou em um polígono convexo, que se chama *secção plana do poliedro* (fig. 35).

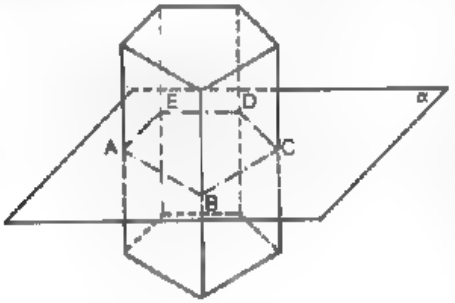


FIG. 35

Toda secção plana de um poliedro divide-o em dois outros poliedros que têm uma face comum que é a secção plana.

Em conseqüência podemos dizer que, se uma reta *intercepta* um poliedro convexo, a interseção desta se reduz ou a um só ponto (um dos vértices do poliedro), ou a uma das arestas do poliedro, ou a um segmento de reta não coincidente com uma das arestas e que denominamos de *corda do poliedro*.

Denomina-se *diagonal* de um poliedro a toda corda, não pertencente a uma das faces, cujos extremos sejam dois vértices.

Chamam-se *faces adjacentes* a duas faces quaisquer que tenham uma aresta em comum.

Chamam-se *ângulos diedros* do poliedro aos ângulos formados por duas faces adjacentes. Existem tantos diedros quantas são as arestas do poliedro.

Ângulos sólidos de um poliedro são aqueles que têm para vértices um vértice do poliedro, e cujas faces são as faces do poliedro, que têm em comum aquele vértice.

Existem pois tantos ângulos sólidos quantos são os vértices do poliedro.

Chama-se *área* de um poliedro a área de sua superfície poliédrica.

Chama-se *volume* de um poliedro a medida da porção *finita* do espaço limitada pela superfície poliédrica.

Dois poliedros dizem-se *iguais* quando coincidem por superposição.

Dois poliedros dizem-se *equivalentes* quando possuem o mesmo volume. É evidente que dois poliedros iguais são equivalentes, mas, nem sempre a recíproca é verdadeira.

Dois poliedros dizem-se *conjugados* quando o número de faces de um é o número de vértices do outro.

3. Classificação dos poliedros. Os poliedros podem ser classificados segundo o seu número de faces.

Assim temos alguns poliedros como:

Tetraedro	(4 faces)	*Octaedro*	(8 faces)
Pentaedro	(5 faces)	*Dodecaedro*	(12 faces)
Hexaedro	(6 faces)	*Icosaedro*	(20 faces)

Os poliedros podem se classificar ainda em: *regulares* e *não regulares*.

Um poliedro diz-se *regular* quando todas suas faces são polígonos regulares iguais e cujos ângulos sólidos são iguais entre si.

Um poliedro que não é regular diz-se *não regular*.

Dentre os poliedros não regulares citaremos os *prismas*, *pirâmides*, *troncos de prisma e de pirâmide*, os quais serão estudados adiante.

4. Lema. *Em toda superfície poliédrica convexa aberta, o número de arestas aumentado de um é igual ao número de faces mais o número de vértices.*

Isto é, $A+1=F+V$ (1)
sendo A, F e V o número de arestas, faces e vértices da superfície poliédrica (fig. 36).

A igualdade (1) é evidentemente satisfeita para uma superfície poliédrica de uma face, pois, nesse caso, temos um polígono plano.

Então $F=1$ e $A=V$ $\therefore$ $F+V=A+1$ ou $F+V-A=1$

Sendo a (1) verdadeira para uma face, façamos a demonstração do Lema por recorrência ou indução matemática.

Admitamos então que o Lema é verdadeiro para uma superfície de n faces e provemos que é válido também para uma superfície de $n+1$ faces.

Sejam F', V' e A' as faces, vértices e arestas da superfície de $n+1$ faces.

Temos que: $F'=F+1$ (2)

Supondo que a face acrescentada possua l lados dos quais c coincidam com as faces da superfície poliédrica de n faces, concluímos que o número de arestas acrescentadas à superfície primitiva é $l-c$.

Logo, $A'=A+l-c$ (3)

O número de vértices coincidentes, da face acrescentada, é igual ao número de lados coincidentes mais um, ou seja $c+1$. Então o número de vértices acrescentados será $l-(c+1)$ e se tem:

$V'=V+l-c-1$ (4)

Somando (2) com (4) e subtraindo (3) obtemos:

$$F'+V'-A'=F+1+V+l-c-1-A-l+c$$
$$\therefore F'+V'-A'=F+V-A$$

Como $F+V-A=1$, por hipótese, então $F'+V'-A'=1$ ou $A'+1=F'+V'$.

Portanto se verifica a (1) e logo o Lema é verdadeiro para um número qualquer (finito) de faces, c.q.d.

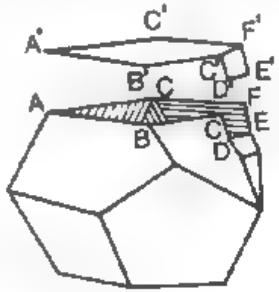


FIG. 36

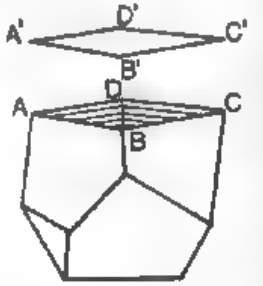


FIG. 37

5. Teorema. (Chamado teorema de EULER).

> Em todo poliedro convexo o número de arestas mais dois é igual ao número de faces mais o número de vértices.

Isto é, $A+2=F+V$ (a)

sendo A, F e V o número de arestas, faces e vértices de um poliedro convexo (fig. 37).

Suprimindo uma face do poliedro convexo considerado obtemos uma superfície poliédrica, convexa aberta (fig. 37) cujo número de arestas e de vértices é o mesmo do poliedro.

De acordo com o lema demonstrado, temos:

$$A+1=F-1+V \therefore A+2=F+V \quad \text{c.q.d.}$$

6. Poliedros regulares

PRELIMINARES. Já definimos o que eram poliedros regulares. Vejamos agora algumas considerações sobre esses poliedros.

Não é fácil de concluir à primeira vista que existam poliedros regulares, entretanto, um deles é conhecido da Geometria intuitiva; este é o *cubo* ou *hexaedro regular*. Apresentaremos a seguir os outros poliedros regulares, que são em número limitado, ao contrário do que aprendemos a respeito dos polígonos regulares, que existem com um número qualquer de lados.

Representaremos, nos teoremas a seguir, o número de faces, vértices e arestas do poliedro por F, V e A respectivamente.

> 1.º TEOREMA. O número de lados de uma face de um poliedro regular não pode superar a cinco.

Seja n o número de lados de cada face de um poliedro regular e p o número de arestas de cada um de seus ângulos sólidos.

Como um polígono tem, no mínimo, 3 lados e cada ângulo sólido tem, no mínimo de 3 arestas, temos: $n \geq 3$ e $p \geq 3$ (1).

Como cada face tem n lados e cada lado de uma face pertence a outra face adjacente, então:

$$A=\frac{Fn}{2} \quad (2)$$

Como cada aresta une dois vértices, o número de arestas será também

$$A=\frac{Vp}{2} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), temos:

$$\frac{Fn}{2}=\frac{Vp}{2} \therefore V=\frac{Fn}{p} \quad (4)$$

Substituindo os valores de (2) e (4), na expressão do Teorema de Euler, obtemos:

$$F+\frac{Fn}{p}=\frac{Fn}{2}+2$$

Donde tirando o valor de F vem:

$$F=\frac{4p}{2n+p(2-n)} \quad (5)$$

Como o número de faces F é positivo, o segundo membro de (5) também será. Mas o numerador $4p>0$ pois, pela (1), $p \geq 3$, então o denominador também será positivo.

Isto é, $2n+p(2-n)>0$ ou $p(2-n)>-2n$

Multiplicando ambos os membros por -1, vem:

$$p(n-2)<2n$$

e como $n \geq 3$, $n-2>0$ e podemos escrever

$$p<\frac{2n}{n-2}$$

sendo $p \geq 3$, temos:

$$3 \leq p<\frac{2n}{n-2} \quad \text{ou} \quad 3<\frac{2n}{n-2}$$

Ou ainda

$$\frac{2n}{n-2}>3$$

Resolvendo essa inequação fracionária (Curso Ginasial) temos:

$$\frac{2n}{n-2}-3>0 \text{ ou } \frac{-n+6}{n-2}>0$$

que resolvendo dá: $\boxed{2<n<6}$

E, portanto n não poderá ser superior a 5 (pois é inteiro).

Corolário. *As faces de um poliedro regular ou são triângulos equiláteros, ou quadrados ou pentágonos regulares.*

2.º Teorema. Só existem cinco poliedros regulares.

Como $n=3$, 4 ou 5.

Façamos, na fórmula (5), do (1.º teorema), essas 3 hipóteses para n

1.º) Se $n=3$, temos $F=\frac{4p}{6-p}$

Dando a p todos os valores possíveis e tendo em vista que $6-p>0$, pois $F>0$, obtemos:

Para $p=3$, $F=4$ e temos o tetraedro regular (fig. 38).
Para $p=4$, $F=8$ e temos o octaedro regular (fig. 49)
Para $p=5$, $F=20$ e temos o icosaedro regular (fig. 40).

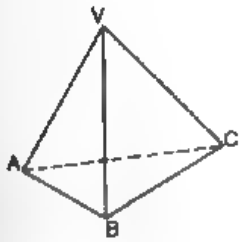


FIG. 38

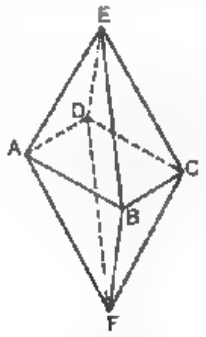


FIG. 39

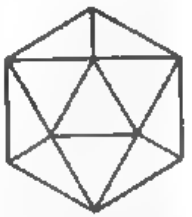


FIG. 40

2.º) Se $n=4$, temos $F=\frac{4p}{8-2p}=\frac{2p}{4-p}$ e vemos que $p=3$ é o único valor que podemos dar a p.

Para $p=3$, $F=6$ e temos o cubo ou hexaedro regular (fig. 41)

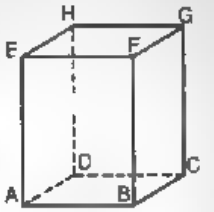


FIG. 41

3.º) Se $n=5$, temos $F=\frac{4p}{10-3p}$ e vemos ainda que $p=3$ é a única hipótese possível.

Para $p=3$, $F=12$ e temos o dodecaedro regular (fig. 42).

Verificamos assim que existem apenas cinco poliedros regulares.

FIG. 42

Elementos dos poliedros regulares. Atribuindo a n, p e F os valores que correspondem aos cinco poliedros regulares e calculando V e A, mediante as fórmulas (2) e (4) do 1.º teorema:

$$\frac{nF}{p} \qquad \frac{nF}{2}$$

podemos formar o seguinte quadro contendo os elementos dos poliedros regulares.

POLIEDROS REGULARES	n	F	V	A	p
Tetraedro.....	3	4	4	6	3
Hexaedro.....	4	6	8	12	3
Octaedro.....	3	8	6	12	4
Dodecaedro.....	5	12	20	30	3
Icosaedro.....	3	20	12	30	5

7. Exercícios resolvidos.

1) Calcular o número de arestas de um poliedro convexo que possui 6 faces e 6 vértices.

Empregando o teorema de Euler, vem:

$$A+2=6+6 \therefore A=10$$

2) Em um poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices de 12. Achar o número de faces.

Temos: $A - V = 12$, pelo enunciado do problema

e, $A - V = F - 2$ pelo teorema de Euler

$\therefore\ F - 2 = 12$ e $F = 14$

3) Um poliedro convexo de 20 arestas tem o número de faces igual ao número de vértices. Quantas faces tem o poliedro?

Pelo teorema de Euler

$$20 + 2 = F + V \text{ mas, sendo } F = V$$

temos: $2F = 22$ e $F = 11$

4) O dodecaedro romboidal é um poliedro limitado por doze losangos iguais. Calcular quantas arestas possui.

Temos: $F = 12$, $n = 4$

$$A = \frac{nF}{2} = 24$$

5) O tetra-hexaedro é um sólido limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. Calcular o número de arestas e de vértices desse poliedro.

Temos: $F = 4 + 6 = 10$

$$A = \frac{4\times3+6\times6}{2} = 24 \text{ e } 24 + 2 = 10 + V \ \therefore\ V = 16$$

8. Exercícios para resolver.

1) Calcular o número de arestas de um poliedro convexo de 12 faces e 20 vértices.

2) Quantas arestas tem um poliedro convexo que possui uma face hexagonal e 6 triangulares?

3) Quantos vértices tem um poliedro convexo de 7 faces, sendo duas pentagonais e cinco quadrangulares?

4) Um poliedro não regular tem o mesmo número de arestas concorrendo em um mesmo vértice. Calcular o número de arestas de cada ângulo sabendo-se que tem 6 arestas e que o número de faces é igual ao número de vérti[illegible]

5) Um poliedro convexo de 15 vértices só possui faces triangulares e hexagonais. Quantas faces tem o poliedro se o número de faces triangulares é $\frac{2}{3}$ do número de faces hexagonais?

6) Em um poliedro convexo de 90 arestas o número de faces excede o de vértices de 16. Quantas faces e quantos vértices tem o poliedro?

7) Um poliedro convexo tem 16 faces. De um dos seus vértices partem 5 arestas, de 5 outros vértices partem 4 arestas e, finalmente, de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. Calcule o número desse poliedro. (EPUC – 1961).

8) Qual o número de faces de um poliedro convexo de 20 vértices e tal que em cada vértice concorram 5 arestas?

UFRJ – 1970).

RESPOSTAS

1) 30 2) 12 3) 10 4) 3 5) 10 6) 54 e 38 7) 35 8) 32

CAPÍTULO III

Superfícies

ESTUDO SUCINTO DAS SUPERFÍCIES EM GERAL

Superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge.

1. Preliminares. Quando uma linha g se desloca no espaço, o conjunto de todos os pontos situados sobre a infinidade de posições ocupadas por g em seu deslocamento constitui o que se chama uma *superfície*.

A linha g que, em seu deslocamento, pode se manter invariável, ou não, em forma e grandeza, denomina-se geratriz da superfície.

A linha ou as linhas d sobre as quais a geratriz se deve apoiar chamam-se *diretrizes* da superfície.

Se a geratriz g assume em seu deslocamento uma posição determinada em relação a uma outra superfície S fixa, esta superfície S diz-se *diretora*.

Do ponto de vista matemático, só podem ser estudadas as superfícies que possam ser definidas geometricamente.

Uma *superfície* diz-se *definida geometricamente* quando existir uma lei ou propriedade que a caracterize. Isto é, chama-se *superfície geométrica definida* a toda superfície caracterizada ou por uma propriedade comum a todos os seus pontos ou por sua *lei de geração*. Assim, por exemplo, a superfície esférica é caracterizada pela propriedade comum a seus pontos (lugar geométrico dos pontos equidistantes do centro) e, a superfície prismática, pela sua lei de geração.

Chamamos de *lei de geração de uma superfície* a lei que regula o movimento de sua geratriz, que, quase sempre, não é arbitrário.

2. Classificação das superfícies. As superfícies são classificadas de acordo com o seu modo de geração, o qual depende da natureza da geratriz, das suas condições de movimento e do número e da forma da diretriz ou diretrizes em que se apoia a geratriz.

Dentro dessa idéia, o matemático francês Monge classificou as superfícies em *famílias*. E chamou de *famílias de superfícies* ao conjunto de superfícies, que possuem a mesma geratriz e a mesma lei de geração, diferindo apenas pela diretriz.

Como o número de diretrizes, de natureza diferente, é infinito, vemos que, cada família de superfícies possui uma infinidade de superfícies.

Ao conjunto de famílias de superfícies, que possuem a mesma geratriz mas, cujas leis de geração são diferentes, denominamos de *categoria de famílias* de superfícies.

E podemos dizer então que as superfícies se dividem em duas grandes categorias de famílias de superfícies:

1) Superfícies retilíneas;
2) Superfícies curvilíneas.

Pode muitas vezes uma mesma superfície pertencer ao mesmo tempo aos dois grupos.

3. Superfícies retilíneas. As superfícies retilíneas ou reguadas (regradas segundo alguns autores) são as superfícies que pertencem à categoria de famílias cuja geratriz comum é uma *reta*. Isto é, são as superfícies que podem ser geradas por uma reta.

As superfícies retilíneas dividem-se em dois grandes grupos:

1) *Superfícies desenvolvíveis;*
2) *Superfícies reversas.*

4. Superfícies curvilíneas. As superfícies curvilíneas ou propriamente curvas são aquelas que pertencem à categoria de famílias cuja geratriz comum é uma linha curva. Isto é, são as superfícies sobre as quais não podemos traçar uma reta.

É fácil de ver que as superfícies curvilíneas são constituídas por uma infinidade de categorias de famílias, pois, para cada espécie de geratriz fixada, teremos uma categoria de famílias de superfícies.

Assim, se as superfícies têm para geratriz comum uma circunferência (de raio constante ou não) teremos a *categoria de famílias de superfícies circulares;* se a geratriz comum é uma parábola, teremos a *categoria de famílias de superfícies parabólicas*, etc.

Na categoria de famílias de superfícies circulares estão incluídas as chamadas *superfícies de revolução*.

5. Superfícies desenvolvíveis. Uma superfície retilínea diz-se *desenvolvível* quando, suposta flexível mas inextensível, pode ser estendida sobre um plano sem ser necessário sofrer qualquer dobra ou rutura.

Entre as superfícies desenvolvíveis podemos citar:

1) As superfícies cilíndricas;
2) As superfícies cônicas.

As superfícies *cilíndricas* bem como as *cônicas* só diferem entre si pela natureza da diretriz, logo segundo a classificação de Monge, constituem famílias de superfícies.

6. Superfícies cilíndricas. Chama-se superfície cilíndrica a superfície gerada por uma reta g que se move no espaço conservando-se paralela a uma reta fixa r e apoiando-se sobre uma linha fixa d (fig. 43).

A reta g chama-se *geratriz* da superfície cilíndrica e a linha d é a sua *diretriz*.

A superfície cilíndrica diz-se *fechada* ou não conforme o seja sua diretriz. A superfície cilíndrica diz-se *circular*, *elítica*, etc., conforme sua diretriz seja uma circunferência, elipse, etc.

Quando a diretriz é uma reta ou é uma linha plana, cujo plano contém a reta r ou é paralelo a ela, a superfície cilíndrica se reduz a um plano.

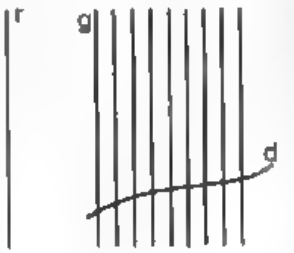


FIG. 43

7. Superfícies cônicas. Chama-se *superfície cônica* a superfície gerada por uma reta g que se move no espaço apoiando-se sobre uma linha fixa d e passando por um ponto P não pertencente a essa linha d (fig. 44).

FIG. 44

O ponto P diz-se *vértice* da superfície e a linha d sua diretriz.

A superfície cônica diz-se *fechada* ou não conforme seja sua diretriz.

A superfície cônica diz-se *circular elítica*, etc., segundo sua diretriz seja uma circunferência, elipse, etc.

Quando a diretriz d é uma reta a superfície cônica reduz-se a um plano.

8. Superfícies reversas. Uma superfície retilínea diz-se *reversa* quando não é desenvolvível. Em geral uma superfície reversa é uma superfície gerada por uma reta que se move no espaço, tendo um ponto comum com três linhas fixas, chamadas *diretrizes*, ou é gerada por uma reta que tem um ponto comum com duas diretrizes e é paralela a um plano, chamado *diretor*.

Entre as superfícies reversas que têm um ponto comum com três diretrizes podemos citar o *hiperboloide de uma folha* e o *cone reverso*

Conforme a natureza das diretrizes, teremos famílias de superfícies reversas.

Entre as superfícies reversas, em que a geratriz tem um ponto comum com duas diretrizes e é paralela a um plano diretor, temos o grupo dos *cilindróides* ao qual pertence a família dos *conóides*.

9. Hiperboloide de uma folha. É a superfície reversa gerada por uma reta que se move no espaço, apoiando-se sobre três retas duas a duas não complanares (fig. 45).

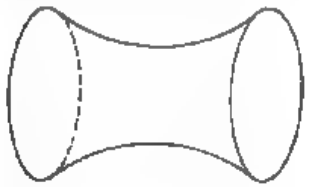


FIG. 45

FIG. 46

10. Cone reverso. É a superfície reversa gerada por uma reta que se move no espaço apoiando-se sobre uma reta e duas linhas curvas (fig. 46).

11. Cilindróides. São as superfícies reversas geradas por uma reta que se move no espaço apoiando-se sobre duas diretrizes e conservando-se paralela a um plano diretor.

12. Conóides. Constituindo uma das famílias dos cilindróides, os *conóides* são as superfícies reversas geradas por uma reta que se move no espaço, apoiando-se sobre uma reta e uma curva e conservando-se paralela ao plano diretor.

Isto é, os *conóides* são cilindróides cujas diretrizes são uma reta e uma curva.

A diretriz retilínea chama-se *eixo do conóide*.

Um exemplo de conóide é a *cunha de Wallis*, que é um conóide reto cuja diretriz curvilínea é uma semicircunferência, pertencente a um plano paralelo ao eixo (fig. 47).

É o conóide usado nas construções navais na forma das proas dos navios e na arquitetura na junção de tetos curvos e planos.

13. Paraboloide hiperbólico. Pertencendo a uma das famílias dos cilindróides, é o *paraboloide hiperbólico* a superfície gerada por uma reta que se move no espaço apoiando-se sobre duas retas fixas e conservando-se paralela a um plano diretor (fig. 48).

FIG. 47

FIG. 48

É pois um cilindróide cujas diretrizes são retilíneas.

Usado na construção de tetos de madeira ou de lajes de concreto armado e na forma dos limpa-trilhos das locomotivas.

14. Superfícies de revolução. Chama-se superfície de revolução a superfície gerada por uma linha g, pertencente

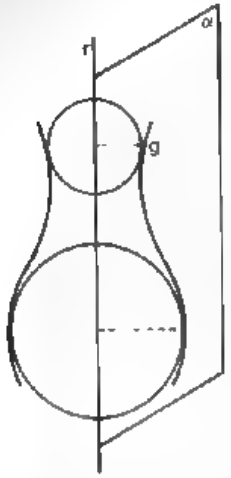


FIG. 49

a um semiplano α de origem r, quando o semiplano α sofre uma rotação completa, em torno de sua origem r (fig. 49).

A linha g é a *geratriz* da superfície de revolução e a reta r é o seu *eixo*.

Cada ponto da geratriz, não pertencente ao eixo, gera, na rotação de α em torno do eixo, uma circunferência cujo centro está sobre o eixo r e cujo plano é perpendicular a r.

Os círculos limitados por essas circunferências chamam-se *paralelos* da superfície de revolução.

O paralelo de raio máximo chama-se *equador*.

Cada posição da geratriz no seu movimento de rotação representa a interseção da superfície de revolução com um determinado semiplano cujo eixo é a origem. Assim todo plano que passe pelo eixo determina sobre a superfície duas geratrizes. Ao conjunto dessas duas geratrizes denominamos de *curva meridiana* ou simplesmente, *meridiano* da superfície. O plano que determina o meridiano chamamos de *plano meridiano da superfície*.

15. Principais superfícies de revolução. Superfície cilíndrica, superfície cônica, superfície esférica, toro, elipsóide, hiperboloide de uma folha, paraboloide hiperbólico.

As superfícies de revolução tem grande importância nas artes e indústrias pois é grande o número de objetos cuja superfície é de revolução.

16. Superfície cilíndrica de revolução. É a superfície de revolução cuja geratriz é paralela ao eixo.

Assim uma superfície cilíndrica de revolução é a superfície gerada por uma reta g, pertencente a um semiplano cuja origem r é paralela a g, quando o semiplano sofre uma rotação completa (fig. 50).

A distância constante R entre a geratriz e o eixo, diz-se *raio* da superfície cilíndrica de revolução.

Os paralelos da superfície cilíndrica de revolução são iguais evidentemente.

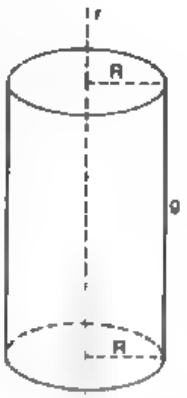


FIG. 50

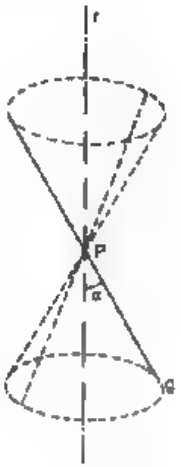


FIG. 51

Pelo que acabamos de ver, podemos dizer que o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de uma reta fixa é a superfície cilíndrica de revolução cujo eixo é essa reta e cujo raio é a distância constante.

Um plano π, paralelo ao eixo de uma superfície cilíndrica de revolução, diz-se *secante*, *tangente* ou *exterior* a essa superfície, conforme a sua distância ao eixo da superfície seja inferior, igual ou superior ao raio da mesma.

17. Superfície cônica de revolução. É a superfície de revolução cuja geratriz e o eixo são retas incidentes e não perpendiculares (fig. 51).

De fato, dadas duas retas concorrentes e não perpendiculares g e r, cujo plano por elas definido é π, dando a π uma rotação completa em torno de r temos que a reta g gera uma superfície que é *cônica* pois g passa sempre por P e é de revolução.

Qualquer das circunferências dos paralelos dessa superfície pode ser considerada como diretriz da superfície cônica de revolução.

O vértice P divide a nossa superfície em duas folhas, cada uma delas gerada por uma das semiretas de g.

Seja o ângulo agudo α formado pela geratriz com o eixo.

Chama-se **abertura da superfície cônica de revolução** ao ângulo 2α formado por duas de suas geratrizes opostas.

Um plano π, que passe pelo vértice de uma superfície cônica de revolução, diz-se *secante*, *tangente* ou *exterior* a essa superfície, conforme o ângulo agudo por ele formado com o eixo seja menor, igual ou superior à metade da abertura dessa superfície.

18. Superfície esférica. É a superfície de revolução cuja geratriz é uma semicircunferência cujo diâmetro pertence ao eixo (fig. 52).

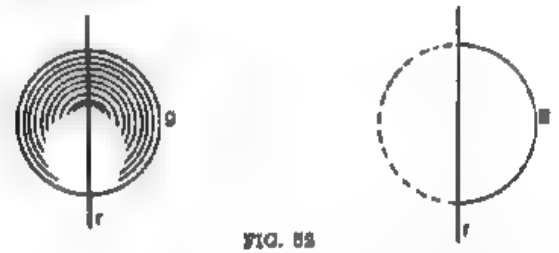


FIG. 52

É o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de um ponto fixo.

19. Toro. É a superfície de revolução cuja geratriz é uma circunferência que é complanar com o eixo, mas cujo centro não pertence ao eixo (fig. 53).

20. Elipsóide de revolução. É a superfície de revolução cuja geratriz é uma *elipse* e cujo eixo é um dos eixos da elipse (fig. 54).

21. Hiperbolóide de revolução de uma folha. É a superfície de revolução cuja geratriz é um ramo da hipérbole e cujo eixo é o eixo não transverso da hipérbole (fig. 55).

FIG. 53

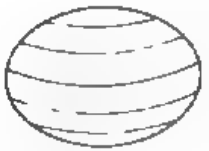


FIG. 54

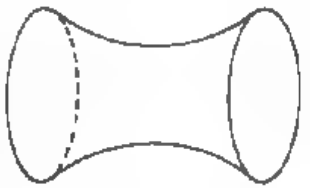


FIG. 55

22. Paraboloide hiperbólico de revolução. É a superfície de revolução cuja geratriz é uma parábola e cujo eixo é o eixo da parábola (fig. 56).

FIG. 56

23. Quadro sinótico do estudo das superfícies que acabamos de estudar.

- **Superfícies**
  - **RETILÍNEAS**
    - *Desenvolvíveis*
      - Cilíndricas
      - Cônicas
    - *Reversas*.....
      - Hiperbolóide de uma folha
      - Cone reverso (Cunha Wallis)
      - Cilindróides
        - Conóides
        - Paraboloide hiperbólico
  - **CURVILÍNEAS**
    - *Circulares, parabólicas, etc.*
    - *Superfícies de revolução*..
      - Cilíndricas
      - Cônicas
      - Esféricas
      - Tora
      - Elipsóide
      - Hiperbolóide de uma folha
      - Paraboloide de revolução

CAPÍTULO IV

Prismas

1. Superfície prismática.

Chamamos de *superfície prismática* a superfície gerada por uma reta, que se desloca, apoiando-se sobre uma linha poligonal, paralelamente a uma reta não pertencente ao plano da linha poligonal (fig. 57).

Chama-se de *aresta* da superfície prismática a uma geratriz que passe por um vértice da linha poligonal

A linha poligonal sobre a qual de apóia a geratriz diz-se *diretriz* da superfície.

As porções de plano limitadas por duas arestas consecutivas chamam-se *faces*, e os ângulos diedros, formados por duas faces adjacentes, são os *diedros* da superfície prismática.

Chama-se *prisma indefinido* ao conjunto de pontos do espaço limitados por uma superfície prismática fechada.

Chama-se *secção plana* de um prisma indefinido a todo polígono determinado pela interseção desse prisma com um plano que corte todas suas arestas.

As secções planas paralelas de um prisma indefinido são iguais, pois são polígonos de lados e ângulos iguais.

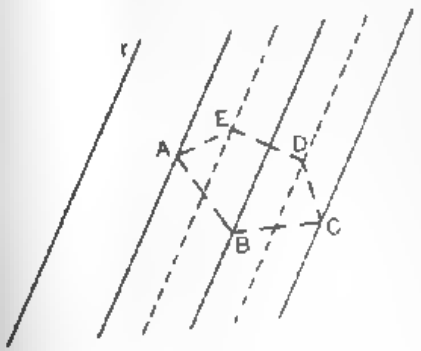


FIG. 57

Chama-se *secção reta* de um prisma indefinido a secção plana determinada por um plano perpendicular a todas as suas arestas.

A porção de prisma indefinido compreendida entre duas secções planas paralelas se chama *prisma finito* ou simplesmente *prisma*.

PRISMAS

2. Definições. Chama-se de *prisma* ao prisma indefinido limitado por dois planos paralelos que cortem todas as suas arestas.

As duas secções planas paralelas do prisma indefinido são dois polígonos iguais chamados *bases* do prisma.

As porções das faces da superfície prismática, que limitam o prisma indefinido, limitadas pelos dois planos paralelos, chamam-se faces laterais do prisma e as porções de arestas da superfície prismática limitadas por esses dois planos são as *arestas laterais* do prisma. Os lados das bases são as arestas das bases.

A distância entre esses dois planos paralelos denomina-se *altura* do prisma.

O *prisma* é, então, um poliedro convexo em que duas faces são polígonos quaisquer, iguais e paralelos, chamados *bases*, e todas as outras faces são paralelogramos, chamados *faces laterais*.

A soma dessas faces laterais chama-se *superfície lateral* do prisma e a soma desta com as duas bases chama-se *superfície total* do prisma.

3. Classificação dos prismas. Um prisma diz-se *reto* ou *oblíquo* conforme suas arestas laterais sejam ou não perpendiculares às bases.

Em todo prisma reto as bases são secções retas, as faces laterais são retângulos ou quadrados e as arestas laterais são iguais à altura.

Dois prismas retos dizem-se iguais quando possuem as bases e as alturas iguais.

Todo prisma reto cujas bases sejam polígonos regulares chama-se *prisma regular*.

Um prisma regular não é necessariamente um poliedro regular. Em particular, o cubo é o único prisma regular que é também poliedro regular.

Um prisma denomina-se triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc., conforme suas bases sejam triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.

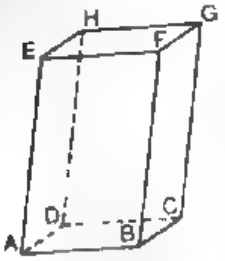


FIG. 58

4. Paralelepípedos. Chama-se paralelepípedo a todo prisma cujas bases são paralelogramos (fig. 58).

E, portanto, é um poliedro convexo cujas faces são paralelogramos.

Duas faces de um paralelepípedo dizem-se opostas quando contém dois lados opostos das bases, (na figura 58 as faces laterais a que pertencem AB e CD são opostas).

Diz-se que um paralelepípedo *é reto* (fig. 59) ou *oblíquo* (fig. 58) conforme suas arestas laterais sejam ou não perpendiculares às bases.

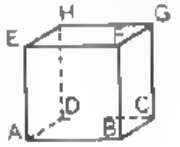


FIG. 59

Um paralelepípedo reto cujas bases são retângulos diz-se *paralelepípedo retângulo*.

Um *paralelepípedo retângulo* é então um poliedro convexo em que todas as faces são retângulos e, portanto, é reto em relação a qualquer uma de suas faces. E as três arestas, que concorrem em cada um de seus vértices, são as suas *dimensões*.

Todo paralelepípedo reto, que não seja retângulo, não é reto em relação a qualquer de suas faces.

5. Cubo. Já vimos que o *cubo* é um poliedro regular de seis faces quadrangulares.

Como satisfaz a definição de *prisma*, dizemos que o cubo é um tipo de prisma, que é reto, porque suas arestas laterais são perpendiculares às bases, e que é regular porque, sendo reto, tem para bases polígonos regulares.

É pois o cubo o único prisma regular que é também poliedro regular. E pode, também, ser considerado como um paralelepípedo retângulo de dimensões iguais.

6. Propriedades dos paralelepípedos.

1.ª) *As faces opostas de um paralelepípedo são iguais e paralelas.*

Seja um paralelepípedo $ABCDEFGH$ cujas bases são os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ (fig. 60).

Provemos que suas faces opostas, $ABFE$ e $DCGH$, por exemplo, são iguais e paralelas.

Com efeito, $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são iguais e paralelos como lados opostos de um paralelogramo e, pela mesma razão, $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ são também iguais e paralelas. Então as duas faces opostas $ABFE$ e $DCGH$ são paralelas e os ângulos $\widehat{ABF}$ e $\widehat{DCG}$ são iguais. E se as faces $ABFE$ e $DCGH$ são paralelas e têm lados e ângulos iguais, então são iguais.

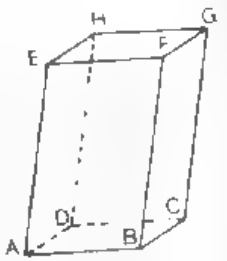


FIG. 60

2.ª) *Um paralelepípedo pode ser considerado como um prisma de três modos diferentes, tomando por bases duas faces opostas quaisquer.*

(Esta propriedade é uma conseqüência da anterior).

3.ª) *Dois paralelepípedos retângulos de mesmas dimensões são iguais.*

(A demonstração é simples e evidente)

4.ª) *Toda secção plana que encontra quatro arestas de um paralelepípedo é um paralelogramo.*

É evidente, pois os lados opostos da secção plana são paralelos, pois são interseções da secção plana com dois planos paralelos.

5.ª) *Um paralelepípedo possui quatro diagonais que se cortam ao meio em um mesmo ponto chamado* CENTRO DO PARALELEPÍPEDO.

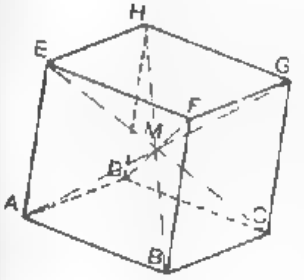


FIG. 61

Seja o paralelepípedo $ABCDE FGH$ e suas quatro diagonais $\overline{AG}$, $\overline{CE}$, $\overline{BH}$ e $\overline{DF}$ (fig. 61).

Como $\overline{AE}$ e $\overline{CG}$ são iguais e paralelas, o quadrilátero $ACGE$ é um paralelogramo e suas diagonais $\overline{AG}$ e CE cortam-se ao meio em um ponto M.

O quadrilátero $ABGH$ é também um paralelogramo e suas diagonais $\overline{AG}$ e $\overline{BH}$ cortam-se também ao meio no ponto M.

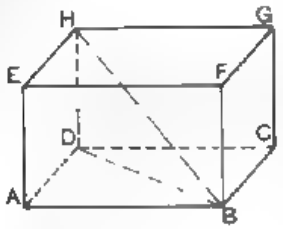


FIG. 62

E, finalmente, se traçassemos o quadrilátero $DCFE$ que seria também um paralelogramo, suas diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ se cortariam, também ao meio, no ponto M.

Portanto, as quatro diagonais do paralelepípedo cortam-se ao meio em um mesmo ponto. c.q.d.

6.ª) *Em um paralelepípedo retângulo as diagonais são iguais.*

É fácil de ver que os quadriláteros considerados na propriedade anterior são retângulos e portanto suas diagonais, que são as do paralelepípedo, são iguais.

7.ª) *O quadrado da diagonal de um paralelepípedo retângulo é a soma dos quadrados de suas três dimensões.*

Seja um paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ e tracemos uma de suas diagonais (fig. 62).

Seja BH a diagonal do paralelepípedo, que é também do retângulo $BDHF$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2$$

Como BD é a diagonal do retângulo $ABCD$, então, ainda pelo teorema de Pitágoras, temos: $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$

$$\therefore \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 \quad \text{c.q.d.}$$

8.ª) *A diagonal do cubo é igual ao produto da aresta pela* $\sqrt{3}$.

Seja um cubo de aresta a e diagonal d. Como o cubo pode ser considerado como um paralelepípedo retângulo de dimensões iguais, então, pela propriedade anterior,

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \quad \therefore \quad d = a\sqrt{3} \quad \text{c.q.d.}$$

9.ª) *Dois paralelepípedos de mesmas bases e mesma altura são equivalentes.*

É fácil de ver que podemos decompor os dois paralelepípedos em dois prismas triangulares equivalentes.

7. Área lateral e área total de um prisma. São, respectivamente, as áreas da superfície lateral e da superfície total de um prisma.

Então, a *área lateral* é a soma das áreas de suas faces laterais e a *área total* é a área lateral mais o dobro da área da base.

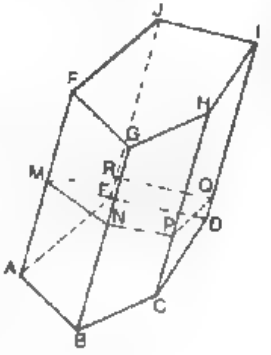


FIG. 63

8. Área lateral de um prisma oblíquo. Seja $ABCDE\,FGHIJ$ um prisma oblíquo e seja $MNPQR$ sua secção reta (fig. 63).

Os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RM}$ são então perpendiculares às arestas laterais e, portanto, são as alturas dos paralelogramos que constituem as faces laterais do prisma.

As áreas desses paralelogramos são os produtos das bases pelas alturas, mas as bases são as arestas laterais que são todas iguais a l; então, a área lateral do prisma será:

$$S_l = \overline{MN} \cdot l + \overline{NP} \cdot l + \overline{PQ} \cdot l + \overline{RM} \cdot l$$

Colocando l em evidência, temos que a área lateral do prisma oblíquo será igual ao produto do perímetro da secção reta pela sua aresta lateral.

9. Área lateral do prisma reto. Como as bases de um prisma reto são secções retas do prisma, então sua área lateral (S_l) será o produto do perímetro de sua base ($2p$) pela sua aresta lateral ou altura (h).

Isto é, $\boxed{S_l = 2\,ph}$

10. Área total de um prisma. Sendo a área total (St) de um prisma igual à sua área lateral mais o dobro da área da base (S_b), temos:

$$St = S_l + 2S_b$$

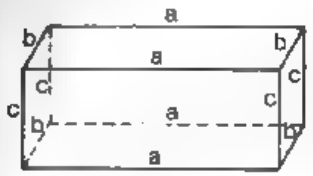


FIG. 64

11. Área lateral e área total do paralelepípedo retângulo. Seja um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c (fig. 64). Sua área lateral será:

$$S_l = 2bc+2ac = 2c(a+b)$$

Sua área total será:

$$St = 2ab+2bc+2ac = 2(ab+ac+bc)$$

12. Área lateral e área total do cubo. Seja um cubo de aresta a. Como todas suas faces são quadrados de lado a, temos:

$$S_l = 4a^2 \text{ e } St = 6a^2$$

VOLUMES

13. Já vimos que volume de um poliedro é a medida da porção finita do espaço limitada por uma superfície poliédrica.

É, pois, o número que mede o poliedro em relação a uma dada unidade. Por unidade de medida se considera um cubo que tem de aresta a unidade de medida de um comprimento.

14. Volume de um paralelepípedo retângulo. Partindo-se do teorema seguinte: *dois paralelepípedos retângulos de mesma base estão entre si como as suas alturas* e, mediante certas considerações, chega-se à conclusão de que o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da medida de suas três dimensões.

Consideraremos, todavia, para simplicidade, e de modo análogo ao que se procede modernamente com um grande número de conceitos da Geometria Euclideana que, *por definição*, o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da medida de suas três dimensões.

Assim, sendo a, b, c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume será:

$$V = abc$$

E sendo a e b as medidas dos lados da base, então

$$\boxed{V = S_b h}$$

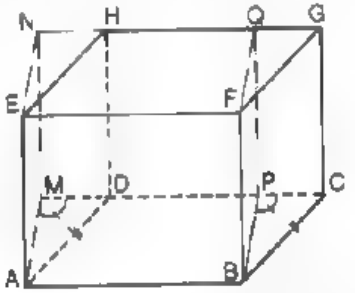
isto é, o volume do paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela altura.

15. Volume do cubo. Como o cubo é um paralelepípedo de dimensões iguais, temos:

$$V = a.a.a = a^3$$

E dizemos que o volume de um cubo é o cubo de sua aresta.

16. Volume do paralelepípedo reto. Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo reto (fig. 65).



Tracemos $AENM$ e $BFQP$ perpendiculares à face $CDHG$. O paralelepípedo $ABPMEFQN$ é retângulo, pois suas bases $ABPM$ e $EFQN$ são retângulos.

O volume deste último paralelepípedo considerado é:

$V = S_{ABPM} \times \overline{AE}$ ou $V = S_{ABCD} \times \overline{AE}$ porque $ABPM$ e $ABCD$ são equivalentes (têm a mesma área), pois:

$$S_{ABCD} = S_{ABPD} + S_{BCP} \text{ e } S_{ABPM} = S_{ABPD} + S_{AMD}$$

e os triângulos retângulos BCP e AMD são iguais (pois têm a hipotenusa e um cateto respectivamente iguais).

Mas, se os dois paralelepípedos considerados têm as mesmas bases e a mesma altura ($\overline{AE}$), então são equivalentes.

Se são equivalentes têm o mesmo volume. Isto é, o volume do paralelepípedo reto $ABCDEFGH$, tem para volume

$$V = S_{ABCD} \times \overline{AE} \text{ ou } V = S_b \, h$$

E dizemos que o volume de um paralelepípedo reto é a área da base vezes a altura.

17. Teorema. *Todo prisma oblíquo é equivalente a um prisma reto cuja base é uma secção reta do prisma oblíquo e cuja altura é uma aresta lateral desse prisma.*

Seja o prisma oblíquo $ABCDEFGHIJ$ ou AJ (fig. 66).

Por um ponto M da aresta BG, tracemos a secção reta $LMNOP$. Prolonguemos a aresta BG de um segmento $\overline{BR} = \overline{MG}$ e, pelo ponto R, tracemos um plano paralelo ao plano da secção reta. Como as secções planas paralelas de um prisma são iguais, o poliedro $QRSTULMNOP$ ou QP é um prisma reto tendo para bases secções retas do prisma oblíquo AJ e para altura sua aresta lateral BG, pois

$$\overline{MR} = \overline{MB} + \overline{BR} = \overline{MB} + \overline{MG} = \overline{BG}$$

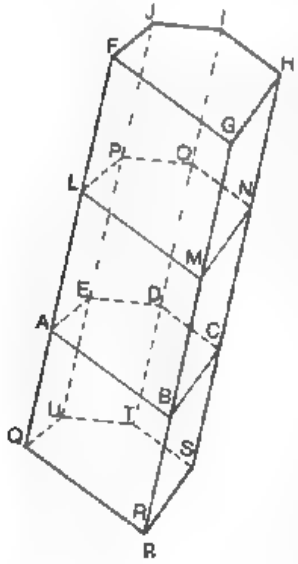


FIG. 66

O prisma AJ é formado pelos poliedros $ABCDELMNOP$ ou AP e $LMNOPFGHILJ$ ou LJ, e o prisma QP pelos poliedros AP e $QRSTUABCDE$ ou QE. Mas, como os poliedros LJ e QE são iguais pois, evidentemente, coincidem por superposição, então os prismas AJ e QP são equivalentes, pois são formados de um poliedro comum AP e dos poliedros LJ e QE, respectivamente, os quais, como já vimos, são iguais.

Temos portanto demonstrado o nosso teorema.

18. Volume de um paralelepípedo oblíquo. Seja o paralelepípedo oblíquo $ABCDEFGH$ ou AH (fig. 67), cujas bases são $ABCD$ e $EFGH$ e cuja altura é $\overline{FT}$.

Tracemos por F, a perpendicular $\overline{FS}$ a $\overline{HG}$.

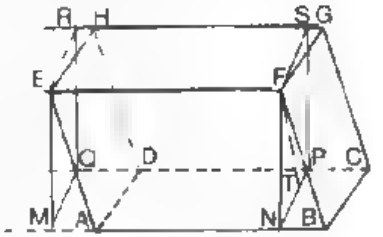


FIG. 67

Tomando-se para base do paralelepípedo AH a face $BCGF$, uma de suas arestas laterais será $\overline{EF}$ e uma de suas secções retas será $FNPS$, que é um paralelogramo.

O paralelepípedo oblíquo AH será equivalente ao paralelepípedo reto $FNPSEMQR$ ou FR, que tem para base a secção reta de AH e para altura sua aresta lateral $\overline{EF}$ (n.º 15).

Mas o volume de FR é (n.º 14):

$$V_{FR} = S_{FNPS} \times \overline{EF}$$

e como

$$S_{FNPS} = \overline{NP} \times \overline{FT}$$

então

$$V_{FR} = \overline{NP} \times \overline{FT} \times \overline{EF}$$

ou $$V_{FR} = \overline{AB} \times \overline{NP} \times \overline{FT} \quad \text{pois } \overline{EF} = \overline{AB}$$

Mas $\overline{AB} \times \overline{NP} = S_{ABCD}$ e $\overline{FT}$ é, como já vimos, a altura do paralelepípedo AH.

E portanto,

$$V_{AH} = S_{ABCD} \times \overline{FT}$$

Isto é, o volume de um paralelepípedo oblíquo é a área de sua secção reta vezes sua aresta lateral, ou a área de sua base vezes a sua altura.

19. Volume de um prisma.

I) *Volume de um prisma triangular.* Seja um paralelepípedo oblíquo $ABCDEFGH$ ou AH e seja $MNPQ$ uma de suas secções retas (fig. 68).

O plano que contém as arestas opostas $\overline{BF}$ e $\overline{DH}$ do paralelepípedo AH divide-o em dois prismas triangulares $ABDEFH$ e $BDCFHG$, que são equivalentes a dois prismas retos de

mesma base (triângulos MNQ e QNP iguais) e mesma altura BF; então, como já vimos, êsses dois prismas triangulares são iguais, e como $V' = S_{ABCD} \times h$

o volume do prisma triangular será $V = \frac{S_{ABCD} \times h}{2}$

ou $V = \frac{S_{ABCD}}{2} \times h = S_{ABD} h$

Isto é, o volume de um prisma triangular é igual à área base vezes a altura.

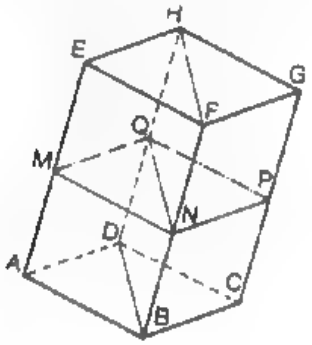


FIG. 68

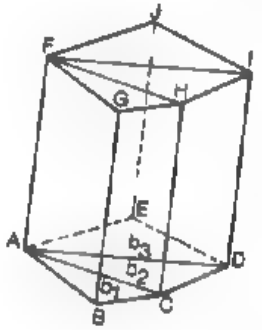


FIG. 69

II) *Volume de um prisma qualquer.* Qualquer que seja o prisma considerado podemos decompô-lo em um certo número de prismas triangulares (fig. 69), de mesma altura h.

Então o volume do prisma AJ considerado é

$$V = b_1 h + b_2 h + b_3 h = (b_1 + b_2 + b_3)\, h$$

$$\therefore\ V = S_{ABCDE} \times h$$

O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.

Ou, como o prisma oblíquo é equivalente ao prisma reto cuja base é a secção reta e a altura é a aresta lateral, podemos também dizer que o volume de um prisma qualquer é o produto da área de sua secção reta pela sua aresta lateral.

20. Exercícios resolvidos.

1) Qual o volume de um prisma hexagonal regular cujo perímetro da base é 24cm e cuja altura é $5\sqrt{3}$ cm?

Se $2p = 24$cm, uma aresta da base é 4cm

A área da base é

$$\therefore\ S_b = \frac{3 \times 16\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

e $$V = S_b h = 24\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 360\text{cm}^3$$

2) A soma das arestas que concorrem em um mesmo vértice de um paralelepípedo retângulo é igual a 15cm. Qual o volume do paralelepípedo se as arestas têm para medida números ímpares consecutivos?

Seja m a menor aresta, temos:

$$m + m + 2 + m + 4 = 15\ \therefore\ m = 3$$

Então, as arestas medem, respectivamente,

3cm, 5cm e 7cm.

E o volume será: $V = abc = 3 \times 5 \times 7 = 105\text{cm}^3$

3) Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo sabendo que a área total é 180m^2, a diagonal da base é 10m e que a soma das arestas que concorrem em um mesmo vértice é 17m.

Sejam a e b as dimensões da base e c a altura do paralelepípedo.

Temos: $2ab + 2ac + 2bc = 180$

$$a^2 + b^2 = 100$$
$$a + b + c = 17$$

Resolvendo o sistema obteremos a solução

$$a = 8\text{m},\ b = 6\text{m}\ \text{e}\ c = 3\text{m}$$

Então o volume pedido será: $V = 144\text{m}^3$

4) Um prisma inclinado tem altura de 8cm e arestas laterais de 9cm. Sua base é um triângulo retângulo cujos catetos têm 3 e 4cm e cuja hipotenusa tem 5cm. Qual é o volume do prisma?

O volume de um prisma é a área de sua secção reta pela sua aresta lateral ou a área da base vezes a altura.

Como não é possível calcular a área da secção reta, empregamos a fórmula $V = S_{base} \times h$.

$$S_{base} = \frac{3 \times 4}{2} = 6\text{cm}^2\ \therefore\ V = 6 \times 8 = 48\text{cm}^3$$

21. Exercícios para resolver.

1) Qual o volume de um cubo cuja área base é 36m^2?
2) Qual a diagonal de um cubo de $24\sqrt{3}\,\text{m}^3$ de volume?
3) Qual a diagonal de um cubo de 72m^2 de área total?

4) Um prisma oblíquo de 20cm de altura e 50cm² de área da base, tem 30cm de aresta lateral. Calcule a área de uma seção reta.
(EPUC - 1961).

5) Calcule a área total do cubo cujas faces são inscritíveis em círculos de πcm² de área. (E. Flum. Engenharia - 1959).

6) Qual o volume de um paralelepípedo retângulo cuja soma de todas as arestas é 48m, sabendo-se que suas dimensões são números consecutivos?

7) Calcule a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede $\sqrt{38}$ cm, sabendo que a soma de todas as arestas mede 40cm.
(ENE - 1961).

8) Calcular a área total de um prisma hexagonal regular em que uma aresta lateral mede $4\sqrt{3}$ m e uma aresta da base mede 2m.

9) Qual o volume de um prisma triangular regular cuja altura mede $12\sqrt{3}$ m e cuja base está inscrita em um círculo de 2π metros de perímetro?

10) Calcular a área total e o volume de um prisma triangular regular cuja base tem 1,5cm de apótema e cuja altura é o diâmetro da circunferência circunscrita à base. (E. Aeronáutica - 1942).

11) Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede 7m e duas de suas dimensões medem respectivamente 2m e 6m.

12) A soma de todas arestas de um paralelepípedo retângulo é 48m, a área de sua base é 12m² e a sua diagonal $5\sqrt{2}$ m. Qual o volume desse paralelepípedo?

13) Um cubo tem 8cm de aresta. Prolonga-se uma das arestas AB do cubo, de um segmento BM igual a 5cm. Calcular a distância do ponto M aos vértices do cubo. (F. N. de Arquitetura - 1946).

14) Calcular o volume de um prisma triangular regular, sabendo-se que uma aresta da base mede 4m e que a altura do polígono da base é a metade da altura do prisma.

15) Calcular o volume de um prisma quadrangular regular cuja base está inscrita em um círculo de 2π metros de perímetro e cuja altura é igual ao diâmetro desse círculo.

16) Em um prisma hexagonal regular a altura mede $10\sqrt{3}$ m e a área lateral é o quádruplo da área da base. Achar o volume do prisma

17) Calcular a área lateral de um prisma triangular regular, cuja altura é o dobro da aresta da base e o volume é igual a 55,424m³.
(E. P. C. Aer. - 1956).

18) Um prisma reto tem para base um paralelogramo em que dois lados adjacentes formam um ângulo de 45° e medem respectivamente 2m e $5\sqrt{2}$ m. Qual o seu volume se a sua altura é 6 metros?

19) Um prisma quadrangular reto tem para base um paralelogramo, que possui um ângulo de 120° e tem para base 20cm. Qual o volume desse prisma se a menor aresta da base é $6\sqrt{3}$ cm e a altura do prisma é 5cm?

20) Um paralelepípedo retângulo tem 142cm² de superfície total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60cm. Sabendo que os seus lados estão em progressão aritmética, eles valem

21) Um cubo de área total 18 $\sqrt[3]{4}$ m² é equivalente a um prisma triangular regular cuja aresta lateral é o triplo da aresta da base. Qual o valor da aresta da base?

22) Um cubo de aresta igual a $2\sqrt{3}$ metros e um prisma hexagonal regular de aresta base igual a 2m são equivalentes. Qual a altura do prisma?

23) Calcule a área total de um prisma reto de 10cm de altura e cuja base é um triângulo retângulo isósceles de perímetro igual a 100cm.
(E. Flum. Engenharia - 1957).

24) A seção reta de um prisma é um trapézio isósceles cujas bases medem 20cm e 12cm e cuja altura mede 8cm. Sabendo que a área lateral desse prisma mede 840cm², calcule o seu volume.
(ENE - 1961).

25) Um paralelepípedo retângulo tem 750cm³ de volume. Uma das suas diagonais é o dobro da diagonal de uma das faces de menor área; esta diagonal é, por sua vez, o dobro da menor dimensão do paralelepípedo. Calcule a área total do sólido. (EPUC - 1961).

26) Qual a expressão que dá o volume (V) de um prisma triangular, em função da área de uma face lateral (s) e da distância (d) dessa face à aresta oposta?

27) Ligam-se 2 a 2 os pontos médios de 3 arestas, não complanares duas a duas, de um cubo de volume 64dm³. Calcule a área do triângulo formado
(ENE - 1963).

28) Calcule a razão entre o volume de um cubo e o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo.
(F. E. U. E. G. - 1963)

RESPOSTAS:

1) 216m³ 4) 40cm² 7) 62cm²
2) 6m 5) 12cm² 8) $60\sqrt{3}$ m²
3) 6m 6) 60m³ 9) 27m³
10) $67{,}5\sqrt{3}$ cm² e $40{,}5\sqrt{3}$ cm³
11) 36m³ 12) 60m³
13) 5cm; 8cm; 5,8cm; 5,8cm; 8,5cm; 8,5cm; 6,5cm; 9cm
14) 48m³ 18) 60m³ 22) 4m
15) 4m³ 19) 900cm³ 23) 1900cm³
16) 4500m³ 20) 3cm, 5cm e 7cm 24) 960cm³
17) 96m² 21) 2m
25) 659,80cm²

26) Esse prisma é equivalente à metade de um paralelepípedo cuja base é uma face lateral do prisma e cuja altura é d. $\therefore V = \frac{sd}{2}$

27) $6\sqrt{3}$ dm² 28) 6

CAPÍTULO V

Pirâmides

ESTUDO SUCINTO DAS PIRÂMIDES

Propriedades gerais; área lateral; área total; volume.
Troncos de prismas e troncos de pirâmide.

1. Definições. Chama-se *pirâmide* ao conjunto de pontos limitados por um ângulo poliédrico e por um plano que, não passando pelo vértice, corte todas as arestas do ângulo poliédrico.

A secção plana do ângulo poliédrico chama-se *base* da pirâmide e as porções das faces do ângulo poliédrico limitadas por essa base chamam-se *faces* da pirâmide. O vértice do ângulo poliédrico chama-se *vértice* da pirâmide. Assim, podemos dizer que uma *pirâmide* é um poliedro limitado por um polígono qualquer chamado *base*, e por triângulos que se chamam *faces laterais*.

Chamam-se de *arestas laterais* da pirâmide as arestas que concorrem no seu vértice. As outras arestas são as *arestas da base*.

A soma de todas as faces da pirâmide chama-se *superfície total* da pirâmide; a soma de suas faces laterais chama-se *superfície lateral*.

Chama-se altura de uma pirâmide a distância do seu vértice ao plano de sua base. Se o vértice da pirâmide se desloca em uma reta ou um plano paralelo à base, a altura da pirâmide não se altera.

Uma pirâmide diz-se *triangular* ou *tetraedro*, *quadrangular*, *hexagonal*, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um hexágono, etc.

Uma pirâmide diz-se *regular* quando sua base é um polígono regular e sua altura tem para extremos o vértice da pirâmide e o centro da base.

As arestas laterais de uma pirâmide regular são oblíquas, traçadas do vértice da pirâmide à base, e tem seus pés eqüidistantes do pé da perpendicular; portanto, são iguais.

As faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles, pois tem dois lados iguais (arestas laterais) e são iguais entre si, pois têm também iguais suas bases (lados de um polígono regular).

A altura comum a êsses vários triângulos isósceles iguais chama-se *apótema* da pirâmide.

Só existe uma pirâmide regular que é também poliedro regular. É o *tetraedro regular*, cujos elementos já vimos anteriormente.

2. Relações métricas na pirâmide regular. É fácil de ver que, em uma pirâmide regular, o apótema (A), a altura (h) e o apótema da base (a) formam um triângulo retângulo, e a altura (h), a aresta lateral (l) e o raio do círculo (R) circunscrito ao polígono da base (fig. 70) formam um outro triângulo retângulo.

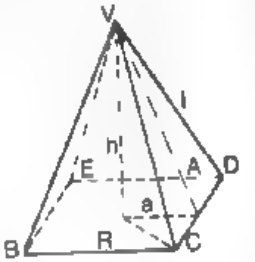


FIG. 70

Podemos escrever então as seguintes relações:

$$A^2 = h^2 + a^2$$
$$l^2 = h^2 + R^2$$

3. Propriedades gerais das pirâmides. Todo plano paralelo à base de uma pirâmide que, não passando pelo vértice, intercepte todas as arestas laterais dessa pirâmide:

1.ª) divide as arestas laterais e a altura na mesma razão;

2.ª) corta a pirâmide segundo uma secção plana que é um polígono semelhante à base;

3.ª) os perímetros desses dois polígonos estão na mesma razão que as distâncias de seus planos ao vértice da pirâmide;

4.ª) as áreas desses dois polígonos estão entre si como os quadrados de suas distâncias ao vértice da pirâmide.

Demonstração: Seja $VABCD$ uma pirâmide cuja secção plana determinada por um plano paralelo ao plano da base, seja $MNPQ$ (fig. 71).

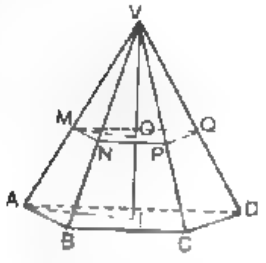


FIG. 71

1.ª) Como $\overline{OM}$ é paralelo a $\overline{AI}$, os triângulos AIV e MOV são semelhantes (Teorema linear de Thales). Então podemos escrever:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{MO}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VM}} = \frac{\overline{VI}}{\overline{VO}} \qquad \text{(I)}$$

2.ª) Os lados do polígono $MNPQ$ são proporcionais aos lados do polígono $ABCD$, pois sendo os lados de $MNPQ$ paralelos aos lados de $ABCD$, os triângulos VMN, VNP, VPQ são respectivamente semelhantes aos triângulos VAB, VBC, VCD e VAD (Teorema linear de Thales); como os ângulos do polígono $MNPQ$ são respectivamente iguais aos lados de $ABCD$, então os dois polígonos considerados são semelhantes por terem ângulos iguais e lados respectivamente proporcionais.

3.ª) Se $ABCD$ e $MNPQ$ são semelhantes, seus lados homólogos estão entre si como os seus perímetros $2P$ e $2p$ (Geometria Plana).

Porém, como já vimos que os triângulos VAB e VMN são semelhantes temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VM}} = \frac{2P}{2p}$$

Comparando essas últimas igualdades com as igualdades (I) da primeira propriedade, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VM}} = \frac{2P}{2p} = \frac{\overline{VI}}{\overline{VO}} \qquad \text{(II)}$$

4.ª) Se $ABCD$ e $MNPQ$ são semelhantes, suas áreas S e s estão entre si como os quadrados de duas quaisquer de suas linhas homólogas (Geometria Plana).

Então

$$\frac{S}{s} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{MN}^2}$$

Comparando com as igualdades (II) da propriedade anterior, temos que

$$\frac{S}{s} = \frac{\overline{VI}^2}{\overline{VO}^2}$$

4. Corolários.

1. Duas secções planas paralelas de uma pirâmide são polígonos semelhantes, cujos perímetros estão entre si como as distâncias dos planos dessas secções ao vértice da pirâmide e cujas áreas estão entre si como os quadrados dessas distâncias.
2. As secções planas feitas paralelamente às bases de duas pirâmides de mesma altura, estão entre si como as bases.
3. Duas pirâmides de mesma altura e de bases equivalentes têm equivalentes as seções planas, paralelas às bases, eqüidistantes dos vértices respectivos.

5. Área lateral da pirâmide regular. É a área da sua superfície lateral.

Seja uma pirâmide regular cuja base é um polígono de n lados iguais a b e seja A o apótema dessa pirâmide.

Como a superfície lateral da pirâmide regular é constituída de n triângulos isósceles iguais a área lateral (S_l) da pirâmide será a soma das áreas dos n triângulos.

Sendo a base de cada um desses triângulos igual a b e a altura igual a A, temos que:

$$S_l = n \times \frac{bA}{2} = \frac{nb}{2} \times A$$

e como $\frac{nb}{2}$ é o semiperímetro p da base, temos

$$\boxed{S_l = p \quad A}$$

Concluímos então que a área lateral da pirâmide regular é o semiperímetro da base pelo apótema da pirâmide.

6. Área total da pirâmide regular. É a área da superfície total da pirâmide.

Ou, $S_t = S_l + S_b$

Mas, a área da base S_b é a área de um polígono regular. Então $S_b = p.a$ sendo a o apótema da base.

$$S_t = p.A + p\,a = p.(A + a)$$

E dizemos que a área total de uma pirâmide regular é igual ao produto do semiperímetro da base pela soma do apótema (A) da pirâmide com o apótema (a) dessa base.

VOLUMES

7. Teorema.

Dois tetraedros de mesma altura e bases equivalentes são equivalentes.

Sejam dois tetraedros $VABC$ e $V'A'B'C'$ de mesma altura h e de bases ABC e $A'B'C'$ equivalentes e pertencentes a um mesmo plano α (fig. 72).

(Demonstraremos por redução ao absurdo).

Se os dois tetraedros não fossem equivalentes, poderíamos, supondo $V_{ABC} > V_{A'B'C'}$ representar a diferença de seus volumes por $V = S_{\triangle ABC} \times h'$.

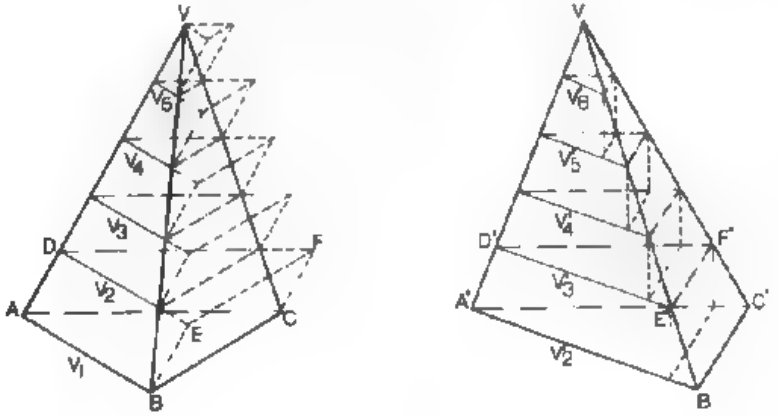


FIG. 72

Isto é, pelo volume de um prisma triangular de base ABC e altura h'.

Dividamos a altura h dos tetraedros em partes p menores do que h' e determinemos suas secções planas, por planos paralelos ao plano α, traçados pelos pontos de divisão de h.

Sobre a base ABC do $VABC$ e sobre suas secções planas construamos prismas, os quais possuem uma parte exterior ao tetraedro e sua soma é maior do que o tetraedro $VABC$.

E, sobre a base $A'B'C'$ de $V'A'B'C'$ e sôbre suas secções planas construamos prismas inscritos cuja soma é menor do que o tetraedro $VA'B'C'$

Sejam V_1, V_2, V_3, V_4 e V_5 os volumes dos prismas construídos em $VABC$ e V'_2, V'_3, V'_4 e V'_5 os volumes dos prismas construídos em $V'A'B'C'$.

Mas os prismas têm, dois a dois, mesma altura p (construção) e bases equivalentes, logo são equivalentes.

Isto é $V_2 = V'_2$, $V_3 = V'_3$, $V_4 = V'_4$ e $V_5 = V'_5$

É evidente que a diferença entre a soma dos prismas de $VABC$ e os de $V'A'B'C'$ é o prisma $ABCDEF$ de volume $V_1 = S_{\triangle ABC} \times p$

Podemos escrever: $\Sigma P_i < V\Delta'B'C' < VABC < \Sigma P_e$

$\therefore\ \Sigma P_e - \Sigma P_i > VABC - V'A'B'C'$ ou $V_1 > V$

$\therefore\ S_{\triangle ABC} \times p > S_{\triangle ABC} \times h' \ \therefore\ p > h'$

o que é absurdo pois, por construção, $p < h'$.

8. Teorema.

Todo prisma triangular é equivalente a três pirâmides (tetraedros) equivalentes.

Seja um prisma triangular $ABCDEF$ (fig. 73).

Traçando os planos AEC e AEF ficam formadas três pirâmides $EABC$, $EADF$ e $EACF$.

Os dois últimos tetraedros são equivalentes (n.º 7) pois têm as bases AFD e ACF iguais (triângulos determinados no paralelogramo $ACFD$ pela sua diagonal AF) e a mesma altura (distância do vértice E ao plano das duas bases).

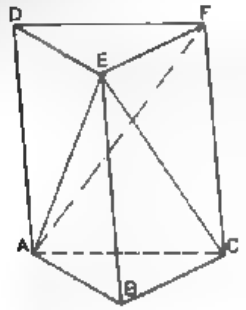


FIG. 73

Mas o tetraedro *EADF* é equivalente ao tetraedro *EABC*, pois, tomando o ponto *A* como vértice de *EADF*, vemos que esses dois tetraedros têm para bases a base do prisma e para altura a altura do prisma, e portanto, são equivalentes (n.º 7).

Concluímos então que o prisma triangular *ABCDEF* é equivalente a três pirâmides equivalentes.

9. Corolários.

1. **Uma pirâmide triangular é equivalente à terça parte de um prisma de mesma altura e de base equivalente.**
2. **Uma pirâmide de base qualquer é equivalente à terça parte de um prisma triangular de mesma altura e de base equivalente.**
3. **É sempre possível construir um prisma equivalente a um poliedro dado. (Basta decompor o poliedro em pirâmides cujas bases sejam as faces do poliedro e cujo vértice comum seja um ponto interior ao poliedro).**
4. **Um prisma triangular é equivalente ao triplo de um tetraedro cuja base e uma altura são as mesmas do prisma.**

10. Volume da pirâmide triangular. Seja um prisma triangular de altura h e área da base S_b (fig. 73). Seu volume será $V_1 = S_b \times h$

Como esse prisma é equivalente ao triplo de uma pirâmide triangular de base e altura respectivamente iguais, então o volume da pirâmide será

$$V = \frac{V_1}{3} \quad \text{ou} \quad V = \frac{S_b \times h}{3}$$

11. Volume de uma pirâmide de base qualquer. Seja uma pirâmide de altura h e cuja base seja um polígono qualquer de área S_b.

Como podemos decompor essa pirâmide em $n-2$ pirâmides triangulares cujo vértice comum é o vértice da pirâmide

primitiva, todas com a mesma altura h e tendo para áreas de suas bases $S_1, S_2, \ldots S_{n-2}$, então o volume V da pirâmide será:

$$V = \frac{S_1 h}{3} + \frac{S_2 h}{3} + \ldots + \frac{S_{n-2} h}{3} = \frac{(S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2})h}{3}$$

Porém $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2} = S_b$, logo:

$$V = \frac{S_B \times h}{3}$$

E dizemos que o volume de uma pirâmide é a terça parte do produto da área da base pela sua altura.

TRONCO DE PRISMA

12. Definição. Chama-se *tronco de prisma* a um qualquer dos dois poliedros determinados em um prisma por uma secção plana não paralela às bases.

O tronco de prisma é pois a porção do prisma compreendida entre uma de suas bases e uma secção plana não paralela às bases.

13. Teorema.

> **Um tronco de prisma triangular é equivalente à soma de três pirâmides, cuja base comum é uma das bases do tronco e cujos vértices são os vértices da outra base.**

Seja um tronco de prisma triangular *ABCDEF* (fig. 74).

Cortando o tronco segundo os planos *EAC* e *DEC* dividimos o tronco em três pirâmides *EABC*, *EACD* e *ECDF*.

A primeira, é fácil de ver, tem para base a base *ABC* do tronco e o seu vértice *E* pertence a outra base *DEF*.

A segunda, *EACD*, é equivalente à pirâmide *BACD*, porque tem a mesma base *ACD* e a mesma altura, pois *B* e *E* estão na mesma reta paralela a *ACD*.

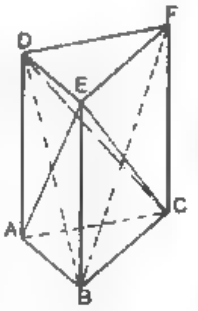


FIG. 74

Mas, $BACD$ pode ser considerada como tendo a base ABC, que é uma base do tronco, e o vértice D na outra base.

A terceira pirâmide, $ECDF$, é equivalente à pirâmide $BCDF$, pois têm mesma base CDF e mesma altura; mas $BCDF$, considerada como pirâmide de base BCF e vértice D, é equivalente à pirâmide $ABCF$ de mesma base BCF e alturas iguais, pois A e D estão na mesma reta paralela a BCF. Logo, a terceira pirâmide $ECDF$ é equivalente à pirâmide $FABC$ cuja base ABC é a base do tronco e cujo vértice F está na outra base DEF.

E fica assim demonstrado esse teorema.

14. Volume do tronco de prisma triangular.

1.º) O volume (V) de um tronco de prisma triangular é igual ao produto da área (S_b) de uma das bases pela média aritmética das distâncias desta base aos vértices da outra base.

Como o tronco é equivalente a três pirâmides, seu volume é a soma dos volumes das pirâmides.

Isto é:

$$V=\frac{S_b d_1}{3}+\frac{S_b d_2}{3}+\frac{S_b d_3}{3}+\quad S_b\times\frac{d_1+d_2+d_3}{3}$$

2.º) Se o prisma triangular é reto, as distâncias dos vértices de uma base à outra são, respectivamente, as arestas laterais a, b e c do tronco; então:

$$V=S_b\times\frac{a+b+c}{3}$$

E dizemos que o volume do tronco de prisma reto é o produto da área de uma das bases pela média aritmética das arestas que são perpendiculares a essa base.

3.º) Podemos também calcular o volume de um tronco de prisma triangular qualquer multiplicando a área de sua secção reta pela média aritmética de suas arestas.

Consideremos um tronco de prisma triangular de arestas laterais a, b e c.

Traçando uma secção reta desse tronco, de área S, suas arestas laterais ficam divididas em partes m, n, p, q, r e s tais que:

$$m+n=a \quad p+q=b \text{ e } r+s=c$$

Como ficam formados dois troncos de prisma reto, cujos volumes são respectivamente:

$$V_1=S\times\frac{m+p+r}{3} \quad \text{e} \quad V_2=S\times\frac{n+q+s}{3}$$

Então o volume do tronco considerado será:

$$V=V_1+V_2=S\times\frac{(m+n)+(p+q)+(r+s)}{3}$$

$$\therefore \boxed{V=S\times\frac{a+b+c}{3}}$$

15. Volume de um tronco de prisma qualquer. É calculado decompondo o tronco em troncos de prismas triangulares e, a seguir, calculando seus volumes de acôrdo com o (n.º 14, 3.º).

TRONCO DE PIRÂMIDE

16. Definições. Se traçarmos um plano que, não passando pelo vértice de uma pirâmide, corte todas suas arestas laterais, esse plano determinará uma secção plana da pirâmide que a divide em dois poliedros: uma nova pirâmide e um poliedro chamado *tronco de pirâmide* (fig. 75).

Podemos então dizer que *tronco de pirâmide* é a porção de pirâmide limitada por sua base e por uma de suas secções planas.

A base $MNPQ$ da pirâmide e a sua secção plana $RSTU$ são as *bases* do tronco de pirâmide. As outras faces são as *faces laterais*.

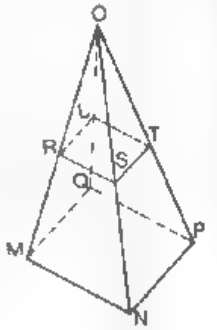


FIG. 75

Estudaremos apenas os *troncos de pirâmides de bases paralelas*, isto é, aqueles em que a secção plana é paralela à base da pirâmide. Sua *altura* é a distância entre as bases.

Suas bases são polígonos semelhantes n.º 3, 2.º).

Um tronco de pirâmide de bases paralelas diz-se *regular* quando suas bases

são polígonos regulares, o que só acontece quando ele é obtido de uma pirâmide regular.

As faces laterais de um tronco de pirâmide regular são trapézios isósceles iguais cujas bases são os lados homólogos das bases do tronco.

A altura de uma face lateral qualquer de um tronco de pirâmide regular chama-se *apótema* desse tronco.

17. Área lateral de um tronco de pirâmide regular. Seja um tronco de pirâmide regular cujas bases são polígonos de n lados. Seja L um lado da base maior, l um lado da menor e A o *apótema* do tronco.

Uma face lateral do tronco tem área:

$$S=\frac{L+l}{2}\times A \text{ (área do trapézio)}$$

Como o tronco tem n faces laterais iguais, sua área lateral (S_l) será a soma das áreas de suas faces.

Isto é: $S_l=n\times\frac{L+l}{2}\times A=\left(\frac{nL}{2}+\frac{nl}{2}\right)A$

Como $\frac{nL}{2}$ e $\frac{nl}{2}$ são os semiperímetros p e p_1, respectivamente, das bases, então

$$\boxed{S=(p+p_1)\,A}$$

Portanto a área lateral do tronco de pirâmide regular é o produto de seu apótema pela soma dos semiperímetros de suas bases

18. Área total de um tronco de pirâmide regular. Temos, chamando de S_t a área total, de a e a_1, os apótemas da base maior e menor, respectivamente. Temos:

$$S_t=S_l+S_B+S_b=(p+p_1)A+pa+p_1a_1$$

$$\therefore \boxed{S_t=p\,(A+a)+p_1\,(A+a_1)}$$

19. Volume do tronco de pirâmide. Seja uma pirâmide $OMNPQ$ de área da base igual a B e de altura igual a H (fig. 76).

Tracemos a uma distância h da base uma secção plana $URST$ cuja área é B_1.

O volume V do tronco $MNPQRSTU$ será igual à diferença entre os volumes V_1 e V_2 das pirâmides $OMNPQ$ e a $ORSTU$ respectivamente.

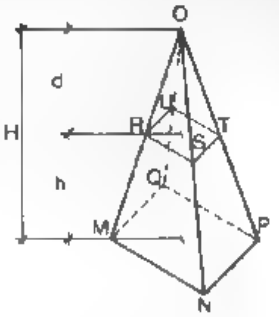


FIG 76

Temos que:

$$V_1=\frac{BH}{3} \text{ e } V_2=\frac{B_1\,d}{3}=\frac{B_1(H-h)}{3}$$

$$\therefore V=\frac{BH-B_1\,(H-h)}{3}=\frac{(B-B_1)\,H+B_1h}{3} \quad (1)$$

Porém, de acordo com o (n.º 3, 4.º) podemos escrever:

$$\frac{B}{B_1}=\frac{H^2}{(H-h)^2} \quad (2)$$

Fazendo $B=x^2$ e $B_1=y^2$, temos:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{H^2}{(H-h)^2} \therefore \frac{x}{y}=\frac{H}{H-h}$$

Por uma propriedade das proporções, vem:

$$\frac{x-y}{x}=\frac{H-(H-h)}{H} \therefore \frac{x-y}{x}=\frac{h}{H}$$

$$\therefore H=\frac{hx}{x-y}$$

Substituindo em (1) B, B_1 e H por seus valores, obtemos:

$$V=\frac{(x^2-y^2)\times\frac{hx}{x-y}+y^2h}{3}=\frac{hx(x+y)+hy^2}{3}+\frac{h(x^2+xy+y^2)}{3}$$

$$\therefore \quad V=\frac{h}{3}\,(x^2+y^2+xy)$$

Mas, $\qquad xy=\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{BB_1}$

Então $\qquad \boxed{V=\frac{h}{3}\,(B+B_1+\sqrt{BB_1})}$

20. Corolário. Da observação da expressão obtida

$$V=\frac{h}{3}\,(B+B_1+\sqrt{BB_1})=\frac{Bh}{3}+\frac{B_1\,h}{3}+\frac{\sqrt{BB_1}\ .\ h}{3}$$

podemos concluir que, um "tronco de pirâmide de bases paralelas é equivalente à soma de três pirâmides, de mesma altura que o tronco, e de bases respectivamente iguais às bases do tronco e a média geométrica destas".

21. Exercícios resolvidos.

1) Calcular a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema é 8m sabendo que o apótema da base é 6m.

Temos: $A=8\text{m}$ e $a=6\text{m}$

$$S_l=p\,.\,A$$

Sendo a base um quadrado de 6m de apótema seu lado será:

$$l=2\times 6\text{m}=12\text{m} \quad \therefore \quad S_l=24\times 8=192\text{m}^2$$

2) Calcular a área total de uma pirâmide triangular regular de apótema de 12m sabendo que o raio da circunferência circunscrita à base é $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ m.

Temos: $A=12\text{m}$ e $R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\quad S_t=S_l+S_B=p\,.\,A+S_B$

Sendo a base um triângulo equilátero seu lado $l_3=R\sqrt{3}=5\text{m}$

$$\therefore \quad 2p=3\times 5=15\text{m} \quad \text{e} \quad p=\frac{15}{2}\text{m}$$

$$\therefore \quad S_l=\frac{15}{2}\times 12=90\text{m}^2 \quad \text{e} \quad S_B=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{25\sqrt{3}}{4}=10{,}82\text{m}^2$$

$$S_t=90+10{,}82=100.82\text{m}^2$$

3) Calcular o volume de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta lateral é 10m e o raio da circunferência circunscrita à base é 6m.

Temos: $l=10\text{m}$ $R=6\text{m}$ $\qquad V=\frac{S_B\,h}{3}$

mas, $\qquad l^2=h^2+R^2 \quad \therefore \quad h=8\text{m}$

$$S_b=S_t=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}=54\sqrt{3}\text{m}^2 \quad V=\frac{54\sqrt{3}\times 8}{3}=144\sqrt{3}\text{m}^3$$

4) A base de uma pirâmide tem 225m². A $\frac{2}{3}$ de uma aresta, a partir do vértice, corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base Calcular a área da secção plana determinada.

(I. T. A. – 1956).

Temos: $S_b=225\text{m}^2$ e seja S a área da secção e l uma aresta lateral.

Temos: $\frac{S_b}{S}=\frac{l^2}{\left(\frac{2}{3}l\right)^2}=\frac{l^2}{\frac{4l^2}{9}}=\frac{9}{4}$ $\quad \therefore \quad 9S=4S_b \quad$ e $\quad S=100\text{m}^2$

5) Um tronco de prisma triangular tem para área da base 10m². Os vértices da face oposta distam, respectivamente, 5m, 4m e 3m do plano da base. Qual o seu volume?

Temos: $V=S_b\times\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=10\times\frac{5+4+3}{3}=40\text{m}^3$

7) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a aresta lateral tem 9m, o apótema tem 7m e a base maior tem 80m de perímetro. Qual o seu volume e a sua área lateral?

Temos: $V=\frac{h}{3}(B+B_1+\sqrt{BB_1})$ e $S=(p+p_1)A$

Uma face lateral da pirâmide é um trapézio isósceles (fig. 77), onde $l=9\text{m}$ é a aresta lateral, $A=7\text{m}$ é o apótema e $x=80\text{m}\div 4=20\text{m}$ é o lado da base maior.

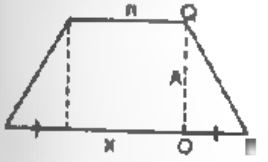


FIG. 77

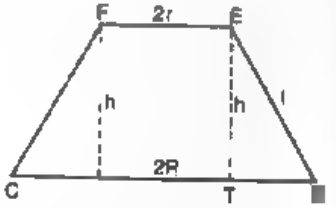


FIG. 78

No triângulo retângulo OPQ, $\overline{OP}=\frac{x-n}{2}$ e, $\left(\frac{x-n}{2}\right)^2=l^2-A^2$

$$\therefore \quad 400-40n+n^2=4(81-49) \quad \text{ou} \quad n^2-40n+272=0$$

Resolvendo esta equação temos as raízes $n=20\pm 8\sqrt{2}$

Como o lado n da base menor não pode ser maior do que x então $n = 20 - 8\sqrt{2}$

Logo $S_1 = (2x + 2n)\,A = 401{,}63\text{m}^2$

Calculemos agora a altura h:

Tracemos um plano que passe por duas arestas laterais opostas; temos: um trapézio $CDEF$ (fig. 73), $\overline{ET} = h$, $\overline{DE} = l$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são os diâmetros $2R$ e $2r$ das circunferências circunscritas às bases.

$$\therefore\ TD = \frac{2R - 2r}{2} = R - r$$

Se $x = R\sqrt{2} = 20$, $R = \dfrac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$

Se $n = x\sqrt{2} = 20 - 8\sqrt{2}$; $r = \dfrac{20\sqrt{2} - 16}{2} = 10\sqrt{2} - 8$

$$\therefore\ \overline{TD} = 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 8 = 8\text{m}$$

Então $h^2 = l^2 - TD^2 = 81 - 64 = 17$ $\therefore$ $h = \sqrt{17}\text{m}$

Mas, $B = (20)^2 = 400\text{m}^2$ e $B_1 = (20 - 8\sqrt{2})^2 = 205{,}75$

E o volume V será, aproximadamente, $1\,223\text{m}^3$

22. Exercícios para resolver.

1) A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é igual a 64m^2. A altura da pirâmide é igual a uma das diagonais da base. Calcule a área lateral do sólido. (PUC – 1963).

2) Qual a área lateral de uma pirâmide triangular regular, cujo apótema é o dobro da aresta da base, cujo perímetro da circunferência circunscrita é 48π metros?

3) Qual a aresta lateral de uma pirâmide quadrangular regular cuja altura é 8m e o perímetro da base é $24\sqrt{2}$ metros?

4) Uma pirâmide de base quadrada tem de volume 360dm^3. Pede-se a altura, sabendo que é igual a $^6/_4$ da diagonal da base. (E. Flum. Engenharia – 1953).

5) Qual a área total de um tetraedro regular de aresta igual a a?

6) Qual o valor da aresta de um tetraedro regular cuja área lateral é $3\sqrt{3}\,\text{m}^2$?

7) Qual a área total de uma pirâmide quadrangular regular cuja altura é 4m e a área da base é 36m^2?

8) Qual a área lateral de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta da base é 0,6m e a aresta lateral é 4m?

9) A base de uma pirâmide tem 192m^2. A secção plana paralela à base feita a 5m do vértice, tem 75m^2 de área. Qual a altura da pirâmide?

10) Qual o volume de uma pirâmide hexagonal regular cuja altura é $5\sqrt{3}$ m e o perímetro da base é 24m?

11) A aresta lateral de uma pirâmide quadrangular regular é 10m e sua altura é 8m. Calcular o seu volume.

12) O apótema de uma pirâmide quadrangular regular é 5m e o apótema da base é 3m. Calcular o volume.

13) A base de uma pirâmide regular é um hexágono regular de 1m de lado; qual deve ser o comprimento de suas arestas laterais para que seu volume seja 1m^3. (E. Aeronáutica – 1957).

14) Em uma pirâmide triangular regular o apótema é $\sqrt{73}$m e o apótema da base é 3m. Qual o volume?

15) A base de uma pirâmide quadrangular regular tem 24m de perímetro. Uma secção plana dessa pirâmide, paralela à base e distante dela 2m, tem uma área de 16m^2. Qual o volume da pirâmide?

16) A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é 8m^2. A aresta lateral da pirâmide é igual à diagonal da base. Achar o volume.

17) Qual o volume de um tetraedro regular cuja área da base é $6\sqrt{3}\,\text{m}^2$?

18) Calcule a altura do tetraedro regular de volume igual a $\sqrt{3}$ cm³. (Engenharia – 1966 – GB).

19) Calcular a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, cujas arestas são tôdas iguais, sabendo que o seu volume é 2m^3.

20) Achar o volume de um tronco de prisma triangular cuja área da base é 12m^2, sabendo que os vértices da face oposta distam do plano da base de 4m, 5m e 6m respectivamente.

21) Qual o volume de um tronco de prisma cuja secção reta é um triângulo de 2m^2 de área e cujas arestas laterais somam 21m?

22) A seção reta de um tronco de prisma é um triângulo equilátero de 3cm de lado e a soma das arestas laterais é igual a 30cm. Calcule o volume do tronco. (ENE – 1951).

23) Qual a área lateral de um tronco de pirâmide quadrangular cujas áreas das bases medem respectivamente 18m^2 e 36m^2 e cujo apótema é 5m?

24) Calcular a área total de um tronco de pirâmide triangular regular cujo apótema é $8\sqrt{3}$ m e cujas arestas das bases são respectivamente 2m e 4m.

25) Qual o volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular de 5m de aresta lateral cujas áreas das bases medem respectivamente $54\sqrt{3}$, e $6\sqrt{3}$ metros quadrados?

26) A área e o volume de um octaedro regular são expressos por um mesmo número. Calcule o valor da aresta do octaedro. (Engenharia – 1966 – GB).

27) Dois tetraedros semelhantes A e B, têm arestas homólogas iguais respectivamente a 2cm e 3cm. Se a área total do tetraedro A é de 40cm^2, qual é a área total do tetraedro B? (E. P. C. Aeronáutica – Seleção 2.º Ano – 1950)

28) Uma pirâmide e um prisma têm a mesma área de base. A altura do prisma é a metade da altura da pirâmide. A que é igual a relação entre o volume da pirâmide e do prisma? (E. P. C. Aeronáutica – 2.º Ano – 1950).

29) As arestas das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular, de 10cm de altura, medem 3cm e 4cm. Calcular o volume do tronco.
(E. P. C. Aeronáutica – 2.º Ano – 1950).

30) Uma pirâmide e um prisma têm a mesma área de base. O prisma tem 7,2cm de altura e seu volume é o dobro do volume da pirâmide. Qual é a altura da pirâmide?
(E. P. C. Aeronáutica – 2.º Ano – 1951).

31) Qual o volume de um tronco de pirâmide cuja altura é 2,4cm e cujas bases têm áreas iguais a $7{,}20\text{cm}^2$ e $5{,}00\text{cm}^2$?
(E. P. C. Aeronáutica – 2.º Ano – 1951).

32) Calcular o volume do tetraedro V, A, B, C cujas arestas partindo do vértice V formam um triedro tri-retângulo e tem, cada uma delas, 10 metros de comprimento. F. Fil. U.E.G. — 1965).

33) Num tetraedro duas arestas não concorrentes são perpendiculares têm o mesmo comprimento a, e são ambas perpendiculares ao segmento de comprimento b que une os seus pontos médios. O volume do tetraedro é.
(COMCITEC – 73 – GB)

34) Qual a expressão do volume do tetraedro regular em função da aresta?
(Escola Naval – 1952).

35) Calcular a altura e o volume do tetraedro regular, cuja aresta é igual ao perímetro de um triângulo equilátero circunscrito a um círculo de 3m de raio.
(E. N. Engenharia – 1956).

36) Um tetraedro regular tem arestas iguais a 6cm. Dê a distância do centro da base às arestas laterais.
(Engenharia – 1967 – GB)

37) A que distância do vértice se deve passar uma secção paralela à base de uma pirâmide para dividi-la em duas partes equivalentes?
(Escola Técnica do Exército – 1948).

38) Sobre um prisma quadrangular regular de 3m de altura está assente uma pirâmide regular de 1,5m de altura, tendo por base a base do prisma. O volume do sólido assim formado é de 14m^3. Pede-se a área lateral do sólido.
(E. N. Arquitetura – 1947).

39) É dado um cubo de 8cm^3 de volume. Determinar o volume de um tetraedro regular cuja área total seja igual à área total do cubo.
(E. Politécnica U. Cat. – Rio – 1943).

40) Uma pirâmide P de altura 10m é cortada por um plano paralelo à base de modo que a pirâmide destacada e o tronco de pirâmide restante tenham o mesmo volume. A distância do vértice de P (não contido na base) ao plano secante é
COMCITEC – 72 – GB).

41) Em uma pirâmide triangular $SABC$, o ângulo triedro S é tri-retângulo O triângulo ABC, da base, é equilátero de 22cm de lado. Calcular o volume da pirâmide.
(Escola Militar – 1937).

42) A base de uma pirâmide é um hexágono regular de 3m de lado Calcular 1.º) a altura que é preciso dar a esta pirâmide para que sua superfície lateral seja igual a 10 vezes a superfície da base; 2.º) o volume desta pirâmide
(E. Politécnica U Cat. Pernambuco – 1955).

43) Dividindo-se uma pirâmide de altura a com um plano paralelo ao da base, à distância x do vértice, obtêm-se duas partes de áreas laterais iguais. Calcular o valor de x
(Economia – UFRJ – 1971)

44) Uma pirâmide de base quadrada tem a altura igual ao triplo do lado do quadrado da base. Calcular a soma das arestas da pirâmide, sabendo-se que o seu volume é de 8cm^3
(Economia – Cândido Mendes – 1971).

45) Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra triangular, de mesmo volume, têm as bases inscritas em um círculo de raio R dm. Calcule a altura da pirâmide triangular sabendo que a altura da pirâmide quadrangular é igual a $4\sqrt{3}$ dm.
(Esc Eng. U. F. Est. Rio – 1963).

46) Uma pirâmide quadrangular regular tem as arestas laterais iguais às da base. A área total da pirâmide é igual a $4(1+\sqrt{3})\text{cm}^2$. Calcule o volume da pirâmide.
(UEG 1969)

RESPOSTAS:

1) 192m^2
2) $S_t = 5\,184\text{m}^2$
3) 10m
4) 15dm
5) $a^2\sqrt{3}$
6) 2m
7) 96m^2 0
8) $7{,}16\text{m}^2$
9) 8m
10) 120m^3
11) 192m^3
12) 48m^3
13) $1/3\sqrt{21}$ m
14) $72\sqrt{3}\text{ m}^3$
15) 72m^3
16) 6m^3
17) $8\sqrt{3}\text{ m}^3$
18) 2cm
19) $6\sqrt[4]{3}\text{ m}^2$
20) 60m^3
21) 14m^3
22) $45\sqrt{3}\text{ cm}^3$
23) 100m^3
24) $77\sqrt{3}\text{ m}^2$
25) $78\sqrt{3}\text{ m}^2$
26) $3\sqrt{6}$
27) 90cm^2
28) $\frac{2}{3}$
29) $185\sqrt{3}\text{ cm}^3$
30) 10,8cm
31) $14{,}560\text{cm}^3$
32) $500/3\text{m}^3$
33) $\frac{a^2b}{6}$
34) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
35) $h = 48\sqrt{2}\text{m}$; $V = 27\,648\sqrt{6}\text{ m}^3$
36) $(8\sqrt{2}+2)\text{m}^2$
37) $x = \frac{h\sqrt[3]{4}}{2}$
38) $31{,}20\text{m}^3$
39) $\frac{8\sqrt[3]{27}}{3}$ cm
40) $5\sqrt[3]{4}$ m
41) $\frac{121\sqrt{2}}{5}\text{ cm}^3$
42) $h = \frac{9}{2}\sqrt{33}$ m
$V = \frac{243}{4}\sqrt{11}\text{ m}^3$
43) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$
44) $8+4\sqrt{38}$
45) $\frac{32}{3}$ dm
46) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\text{ cm}^3$

CAPÍTULO VI

Cilindros

1. Definições. Chama-se *cilindro* ao sólido limitado por uma superfície cilíndrica fechada e por dois planos paralelos que interceptem as geratrizes da superfície.

A porção de superfície cilíndrica que limita o cilindro se chama *superfície lateral* do cilindro e as porções iguais de plano denominam-se *bases*.

Os segmentos das geratrizes da superfície cilíndrica limitados pelas bases dizem-se *geratrizes* do cilindro, e são iguais e paralelos.

Um cilindro diz-se *reto* ou *oblíquo* conforme as suas geratrizes sejam ou não perpendiculares às bases.

Chama-se *altura* de um cilindro a distância entre os planos das bases. Se o cilindro é reto, qualquer das geratrizes pode ser tomada como altura.

2. Cilindro de revolução. Se a superfície cilíndrica, que limita um cilindro, é de revolução, e os planos paralelos que a interceptam são perpendiculares às geratrizes, o cilindro diz-se de revolução.

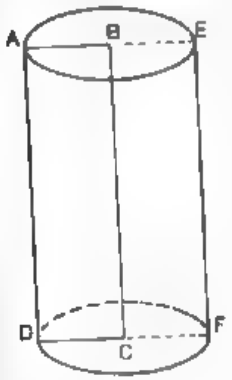


FIG. 79

Então, as bases do cilindro são círculos e as geratrizes são perpendiculares às bases, e portanto o cilindro de revolução é um cilindro reto de base circular.

Podemos dizer também que o *cilindro de revolução* ou *cilindro circular reto* é o sólido gerado por um retângulo $ABCD$ numa rotação completa em torno de um dos seus lados (fig. 79).

O lado fixo BC é o eixo do cilindro; o lado AD é a *geratriz* do cilindro

e gera a superfície lateral e os lados AB e DC são os raios das bases do cilindro.

De um modo mais simples, é o sólido limitado por dois círculos, chamados bases, e por uma superfície cilíndrica de revolução, chamada superfície lateral.

As secções obtidas por planos que cortem as geratrizes paralelamente às bases são círculos iguais às bases.

Se traçarmos um plano meridiano da superfície cilíndrica que limita o cilindro, a porção de plano meridiano limitado pelas bases do cilindro denomina-se secção meridiana do cilindro. Na figura 79 $ADFE$ é a secção meridiana.

A geratriz do cilindro de revolução é a altura desse cilindro.

A secção meridiana de um cilindro divide-o em dois semicilindros, que são os sólidos cuja forma vemos em certas molduras com o nome de meia-cana.

Toda secção feita no cilindro por um plano paralelo ao plano meridiano é um retângulo em que uma das dimensões é sempre a geratriz do cilindro.

Daqui para diante usaremos a denominação de *cilindro* para representar um *cilindro de revolução*.

Dois cilindros dizem-se *semelhantes* quando suas alturas estão entre si como os raios de suas bases.

As áreas laterais, ou totais, estão entre si como os quadrados dos raios e, os seus volumes, como os cubos de seus raios.

3. O cilindro como limite de um prisma regular. Um prisma reto diz-se *inscrito* ou *circunscrito* a um cilindro quando suas bases são polígonos inscritos ou circunscritos às bases do cilindro.

A altura de um prisma inscrito ou circunscrito a um cilindro é a altura do cilindro.

Se considerarmos um prisma regular convexo inscrito em um cilindro, vemos que, se o número de lados da base do prisma cresce indefinidamente, o seu número de faces laterais também cresce infinitamente.

Se o número de lados da base cresce infinitamente, a base do prisma tende para a do cilindro e portanto a superfície lateral do prisma tende para a do cilindro.

Podemos então considerar o cilindro como o limite de um prisma regular convexo, nele inscrito, cujo número de faces laterais aumenta indefinidamente.

Assim podemos estender as propriedades do prisma ao cilindro.

4. Área lateral do cilindro (S_l). É dada pelo produto dos números que medem a sua altura e a circunferência de sua base. Ou, mais simplesmente, o produto do perímetro da base pela altura.

De fato, a área lateral de um prisma reto é igual ao produto do perímetro da base pela altura, a área lateral do cilindro é o perímetro de sua base (comprimento da circunferência) multiplicado por sua altura.

Logo, um cilindro de altura h e raio da base R terá para área lateral:

$$S = 2\pi Rh$$

5. Desenvolvimento da superfície lateral do cilindro. Desenvolvendo a superfície lateral de um cilindro, conforme vemos na figura 80, obtemos um retângulo $ABDC$ cuja área é $2\pi Rg$.

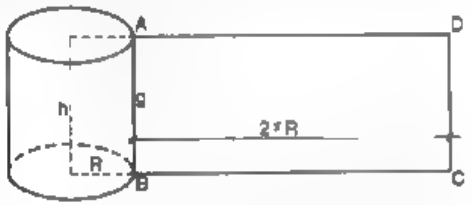


FIG. 80

Como a geratriz do cilindro é igual à sua altura, vemos que a área lateral do cilindro é, como acabamos de ver, $S_l = 2\pi Rh$.

6. Área total do cilindro (S_t). Como a área total de um prisma é $S_t = S_l + 2S_b$ então a área total do cilindro será:

$$S_t = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

ou

$$S_t = 2\pi R(h + R)$$

7. Volume do cilindro (V). O volume do prisma é $V = S_b \times h$, então o volume do cilindro será:

$$V = \pi R^2 h$$

8. Cilindro equilátero. É o cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (fig. 81).

Logo, num cilindro equilátero a altura h é igual ao diâmetro da base $2R$, pois os lados do quadrado $ABCD$ são iguais.

Tendo em vista que em um cilindro equilátero $g = h = 2R$, podemos escrever as expressões de sua área lateral, área total e volume.

$$S_l = 4\pi R^2 \qquad S_t = 6\pi R^2 \qquad V = 2\pi R^3$$

9. Semicilindro de revolução. Como já vimos, o semicilindro de revolução é um dos dois sólidos determinados em um cilindro por um plano meridiano.

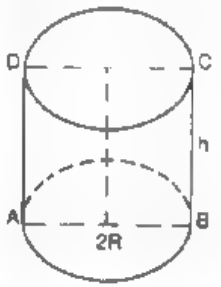


FIG. 81

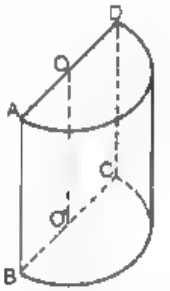


FIG. 82

Então, um semicilindro de revolução é limitado por duas bases, semicírculos iguais e, lateralmente, por um retângulo e uma porção de superfície cilíndrica, que é a metade da superfície lateral do cilindro do qual foi obtido.

Temos:

$$S_t = S_{ABCD} + \frac{2\pi Rh}{2} = 2Rh + \pi Rh = Rh(\pi + 2)$$

$$S_t = S_1 + 2 \times \frac{\pi R^2}{2} = 2Rh + \pi Rh + \pi R^2 =$$

$$= \pi R(h + R) + 2hR.$$

$$V = \frac{1}{2} \text{ (Volume cilindro)} = \frac{\pi R^2 h}{2}$$

10. Tronco de cilindro de revolução. Se cortarmos um cilindro de revolução por um plano não paralelo às bases e que corte suas geratrizes, obtemos dois sólidos, cada um dos quais se denomina *tronco de cilindro de revolução*.

E podemos dizer que um *tronco de cilindro* de revolução é a porção de cilindro limitada por uma de suas bases e por uma secção determinada por um plano, não paralelo às bases do cilindro e que corte todas suas geratrizes.

A base do cilindro e a secção chamam-se *bases* do tronco e a porção do eixo do cilindro, compreendido entre as bases do tronco, chama-se *eixo* deste.

Uma das bases do tronco é um círculo e a outra uma elipse.

11. Teorema.

> Um tronco de cilindro de revolução e sua superfície lateral são equivalentes, respectivamente, ao cilindro de revolução, cujas bases são iguais à base circular do tronco e cuja altura é o eixo do tronco, e a sua superfície lateral.

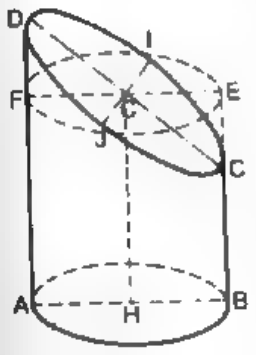


FIG. 83

Seja um tronco de cilindro de revolução $ABCD$, cuja base circular é a base do cilindro de revolução $ABEF$ e cujo eixo GH é a altura desse cilindro (fig. 83).

E seja IJ a interseção das bases não comuns ao tronco e ao cilindro.

Façamos girar o sólido $IJFD$, porção de tronco não pertencente ao cilindro, em torno de IJ, até que o semicírculo JFI coincida com o semicírculo IEJ. Então, os triângulos retângulos iguais GFD e GEC coincidirão,

os diedros opostos pela aresta IJ, que são iguais, também coincidirão e, portanto, o sólido $IJFD$ coincidirá com o sólido $IJCE$, porção de cilindro não pertencente ao tronco.

Logo o tronco de cilindro $ABCD$ e o cilindro $ABEF$ são equivalentes, assim como suas superfícies laterais.

12. Área lateral de um tronco de cilindro de revolução (S_t). Pelo teorema anterior e, ainda de acordo com o n.º 4 temos:

$$S_t = 2\pi Re$$

Isto é, a área do tronco de cilindro de revolução é igual ao produto de seu eixo (e) pelo perímetro de sua base circular.

O eixo e é a média aritmética de duas geratrizes opostas, (máxima e mínima) g e g', o que pode ser verificado na figura 83, onde o eixo GH é a base média do trapézio retângulo $ABCD$, secção meridiana do tronco, cujas bases são duas geratrizes opostas do tronco de cilindro de revolução.

Então

$$e = \frac{g + g'}{2} \text{ e } S_t = \pi R (g + g')$$

13. Volume do tronco de cilindro de revolução. Segundo o teorema anterior o volume do tronco será dado por

$$V = \pi R^2 e$$

Isto é, o volume do tronco de cilindro de revolução é o produto do seu eixo pela área de sua base circular.

14. Exercícios resolvidos.

1) Calcular a área lateral de um cilindro cuja base tem para perímetro 62,8m e cuja altura é a metade do raio da base ($\pi = 3{,}14$).

Temos: $2\pi R = 62{,}8\text{m}$ $\therefore$ $R = \frac{62{,}8}{6{,}28} = 10\text{m}$

$$h = \frac{R}{2} = 5\text{m} \text{ e } S_t = 62{,}8 \times 5 = 314\text{m}^2$$

2) Qual a área total de um cilindro cujo perímetro da secção meridiana é 64m e cuja altura excede o raio da base de 2m?

Como a secção meridiana é um retângulo (fig. 81) de dimensões $2R$ e h temos: $4R+2h = 64$ ou $2R+h = 32$

Mas, $h = R+2$ $\therefore$ $2R+R+2 = 32$ $\therefore$ $R = 10\text{m}$ e $h = 12\text{m}$

Logo $S_t = 2\pi \times 10(12+10) = 440\pi$ ou $S_t = 1\,381{,}60\text{m}^2$

3) Qual o volume do cilindro cuja base está circunscrita a um triângulo equilátero de $2\sqrt{3}$ m de lado e cuja altura é a altura do triângulo equilátero inscrito em sua base?

Temos: $R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\therefore$ $R = 2$ e $h = \dfrac{3R}{2} = 3$

$\therefore$ $V = \pi \times 4 \times 3 = 12\pi$ ou $V = 37{,}680\text{m}^3$

4) Calcular a área lateral de um semicilindro cuja área da base é $6{,}28\text{m}^2$ e cuja altura é 5m ($\pi = 3{,}14$).

Temos:

$$\frac{\pi R^2}{2} = 6{,}28 \quad \therefore \quad \pi R^2 = 12{,}56 \quad \therefore \quad R^2 = \frac{12{,}56}{3{,}14} = 4 \text{ e } R = 2\text{m}$$

Então $S_l = 10(\pi+2) = 51{,}40\text{m}^2$

5) Achar a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de 2m de altura.

$S_l = \pi h^2 = 4\pi = 12{,}56\text{m}^2$

$$S_t = \frac{3}{2}\pi h^2 = 6\pi = 18{,}84\text{m}^2 \qquad V = \frac{\pi h^3}{2} = \frac{8}{3}\pi = 8{,}373\text{m}^3$$

6) Achar a área lateral de um tronco de cilindro de revolução, cujo raio de sua base circular é $\dfrac{2}{\pi}$ metros, e em que duas geratrizes opostas medem, respectivamente, 6m e 4m.

Temos: $S_l = \pi R(g+g') = \pi \times \dfrac{2}{\pi}(6+4) = 20\text{m}^2$

7) A base circular de um tronco de cilindro de revolução está inscrita em um quadrado de 20m de lado. Qual o seu volume se sua área lateral é 628m^2? ($\pi = 3{,}14$)

R é o apótema do quadrado, logo $R = \dfrac{20}{2} = 10\text{m}$

Como $S_l = 2\pi Rs = 628$, $s = \dfrac{628}{62{,}8} = 10\text{m}$

Logo $V = 3{,}14 \times 100 \times 10 = 3\,140\text{m}^3$

15. Exercícios para resolver.

1) Calcular a área lateral de um cilindro cuja base está circunscrita a um hexágono regular de 60m de perímetro e cuja altura é igual ao raio da base.

2) Calcular a área total de um cilindro cuja área da base é $4{,}5216\text{m}^2$ e cuja altura é o triplo do raio da base.

3) Qual o volume de um cilindro cuja base está inscrita em um quadrado de 48m de perímetro e cujo raio da base é o triplo da altura?

4) A área da secção meridiana de um cilindro equilátero é 100m^2. Achar a área lateral do cilindro.

5) Um cilindro está inscrito em um cubo cuja diagonal mede 20cm. Calcule a área lateral do cilindro. (E. Flum. Engenharia – 1959).

6) Qual a área total de um cilindro equilátero cuja secção meridiana tem 200m^2 de área?

7) Um tambor de gasolina de forma cilíndrica tem $0{,}40\text{m}^2$ para área interna da base. Qual deve ser sua altura (em centímetros) para que sua capacidade seja 500 litros? (E. F. C. Aeronáutica – 1.º Ano – 1951).

8) Qual o volume de um cilindro equilátero de 20m de altura?

9) Qual a área lateral e o volume de um cilindro equilátero cuja secção meridiana tem 400m^2 de área?

10) A área lateral de um cilindro é 5π metros quadrados e o seu volume é 10π metros cúbicos. Qual o diâmetro da base?

11) O volume de um cilindro equilátero é igual a $54\pi\text{m}^3$. Qual o seu raio da base?

12) Achar a altura do cilindro equilátero de 16m^3 de volume.

13) O volume de um cilindro equilátero é igual a $\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{2}$ metros cúbicos. Achar sua área total.

14) Calcular o volume de um cilindro de revolução de raio igual a 5dm, sabendo-se que esse cilindro cortado por um plano paralelo ao eixo e a uma distância de 3dm desse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base. (F. N. Arquitetura – 1946).

15) Quantos metros quadrados possue a área lateral de um cilindro cuja altura mede 10m e cuja área total a excede de 50π metros quadrados?

16) Qual a área total do semicilindro de 3m de altura e 2m de raio da base?

17) Qual o volume da "meia cana" de 5m de raio e 4m de comprimento?

18) Calcular o volume de um cilindro equilátero cuja área lateral é $18{,}84\text{m}^2$.

19) Um cilindro de raio da base igual a 10m foi cortado por um plano paralelo ao seu eixo e distante dele de 6m. Sabendo que a secção determinada por este plano tem 80m^2 de área, calcular a altura do cilindro.

20) A altura de um cilindro é 20m. Calcular o raio de sua base, sabendo-se que aumentando-se de 5m esse raio, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do primeiro.

21) Um cilindro tem 5m de altura e 3m de raio da base. Qual a altura de um outro cilindro que tem o mesmo raio da base do primeiro, mas, cuja área total é o dobro da área lateral do primeiro?

22) Qual o raio da base de um cilindro de 4m de altura se sua área total é o triplo da área total de um outro cilindro cujo raio da base é 4m e cuja altura é igual ao raio da base do primeiro cilindro?

23) Qual a área lateral de um tronco de cilindro de revolução cuja área da base circular é $314m^2$ e tem seu eixo igual ao diâmetro desta base?

24) Um tronco de cilindro de revolução tem para secção meridiana um trapézio retângulo de bases 6m e 4m e de altura $\frac{4}{\pi}$ metros. Achar sua área lateral.

25) Achar o volume de um tronco de cilindro de revolução cuja secção, determinada por um plano que passe pelo seu eixo, é um trapézio cujas bases são 5m e 4m e a altura é $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ metros.

26) Um tronco de cilindro de revolução tem 2 204,280 metros cúbicos de volume e duas de suas geratrizes opostas medem respectivamente 100m e 56m. Achar o raio da base circular.

27) Cada um dos raios, das bases de dois cilindros, é, respectivamente, a altura do outro. Sabendo que a razão entre o raios dos dois cilindros é k, estabelecer a razão entre as áreas totais desses dois cilindros.

28) A área lateral de um cilindro excede de $3cm^2$ a área de sua seção meridiana. Calcule a área lateral. (E. P. U. C. – Rio – 1961).

29) Estabelecer a expressão da altura do cilindro em função de sua área lateral e de sua área da base.

30) Estabelecer a expressão do raio da base de um cilindro em função do seu volume e de sua área lateral.

31) Estabelecer a expressão do raio da base circular de um tronco de cilindro de revolução em função de sua área lateral e de seu volume.

32) Qual a razão entre a área total e a área lateral de um cilindro equilátero?

33) Um cilindro tem altura igual a 2m. Calcular seu volume se a superfície de uma de suas bases é equivalente à sua superfície lateral.

34) Um cilindro e um prisma quadrangular regular têm a mesma altura e são equivalentes. Sabendo que a área lateral do prisma é $\frac{2}{\sqrt{\pi}}m^2$, calcular a área lateral do cilindro.

35) Um cilindro e um prisma triangular regular têm a mesma altura e mesma área lateral. Calcular o volume do cilindro sabendo que o volume do prisma é $\pi\sqrt{3}$ metros cúbicos.

36) Um cilindro circular reto tem a sua superfície total equivalente à superfície lateral de um prisma oblíquo cuja secção reta é um pentágono regular de lado 5m e aresta lateral igual a $\frac{4}{3}\pi$ metros. Sabe-se que o perímetro da secção meridiana do cilindro é 14m. Pede-se: *a*) o raio da base e a altura do cilindro; *b*) a área de um cilindro semelhante cuja razão de semelhança é 2.

(Escola Naval – 1950).

37) Um cilindro e uma pirâmide quadrangular regular têm a mesma altura e são equivalentes. Calcular o raio da base do cilindro, se o raio do círculo inscrito na base da pirâmide é igual a $\frac{1}{2}\sqrt{8\pi}$ metros.

38) Calcular o volume de um cilindro cujo raio de base é igual a um sexto da altura, sabendo que esta é igual ao dobro da altura de um triângulo retângulo que divide a hipotenusa em segmentos iguais a 9 e 16.

(Fac. Nac. Ciências Econômicas – Rio – 1953).

RESPOSTAS:

1) $628m^2$
2) $36,172\,8m^3$
3) $226,080m^3$
4) $314m^2$
5) $\frac{400\,\pi}{3}cm^3$
6) $942m^2$
7) 125cm
8) $6\,280m^3$
9) $S_l = 1\,256m^2$ e $V = 6\,280m^3$
10) 8m
11) 3m
12) $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}m$
13) $9,42m^2$
14) $770,281m^3$
15) $314m^2$
16) $43,40m^3$
17) $157m^3$
18) $4,71\sqrt{6}\,m^3$
19) 5m
20) 10m
21) 7m
22) 12m
23) $1\,256m^2$
24) $20m^2$
25) $5m^3$
26) 3m
27) k
28) $4,40cm^2$
29) $h = \frac{S_l}{2\sqrt{\pi S_b}}$
30) $R = \frac{2V}{S_l}$
31) $R = \frac{2V}{S_l}$
32) $\frac{3}{2}$
33) $100,480m^3$
34) $1m^2$
35) $9m^3$
36) $R = 2m$ $h = 3m$ $S = 180\pi m^2$
37) 1m
38) $384\,\pi$

CAPÍTULO VII

Cones

1. Definições. Chama-se *cone* ao sólido limitado por uma folha de uma superfície cônica fechada e por um plano que, não passando pelo vértice dessa superfície, intercepte suas geratrizes.

A porção de superfície cônica que limita o cone denomina-se *superfície* lateral do cone e a porção de plano que o limita diz-se *base* do cone.

O vértice da superfície cônica é o *vértice do cone*, os segmentos das geratrizes dessa superfície limitados pelo vértice e pela base são as *geratrizes do cone*.

Chama-se *altura do cone* a distância do vértice ao plano da base.

O cone diz-se circular, elítico, etc., conforme a sua superfície lateral seja uma porção de superfície cônica circular, elítica, etc.

Um cone cuja base possui centro diz-se *reto*, quando a altura une o vértice do cone ao centro da base; diz-se oblíquo, em caso contrário.

2. Cone de revolução. É o cone limitado por uma superfície cônica de revolução e por um plano perpendicular ao eixo da superfície.

O cone de revolução é um *cone circular reto*, pois sua base é um círculo cujo centro pertence ao eixo e portanto é o pé da altura do cone.

As geratrizes do cone de revolução são iguais, como oblíquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular.

Observemos que o cone de revolução pode ser definido como o sólido gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos (fig. 84).

Existe pois a seguinte relação unindo os elementos de um cone de revolução:

$$g^2 = h^2 + R^2$$

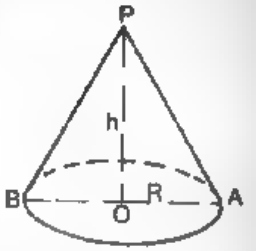


FIG. 84

Chama-se *secção meridiana* de um cone de revolução a intersecção de um cone de revolução com um plano meridiano.

Na figura 84 o triângulo isósceles *BPA* é a secção meridiana do cone.

Daqui para diante usaremos a denominação de cone para designar o cone de revolução.

Dois cones dizem-se semelhantes, quando suas alturas estão entre si como os raios de suas bases.

As áreas laterais, ou totais, estão entre si como os quadrados de seus raios, e os seus volumes, como os cubos de seus raios.

3. O cone como limite de uma pirâmide regular. Uma pirâmide regular diz-se *inscrita* ou *circunscrita* a um cone quando seu vértice coincide com o vértice do cone e sua base está inscrita ou circunscrita à base do cone.

A figura 86 nos mostra uma pirâmide regular inscrita e a figura 85 uma pirâmide regular circunscrita a um cone.

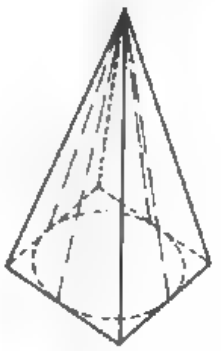


FIG. 85

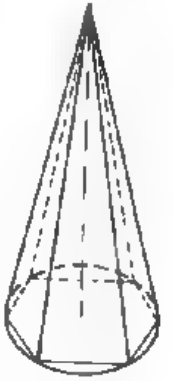


FIG. 86

É fácil de observar que o cone e a pirâmide inscrita ou circunscrita têm a mesma altura e que as arestas laterais da pirâmide regular inscrita são geratrizes do cone.

Se considerarmos uma pirâmide regular inscrita em um cone (fig. 86), vemos que, se o número de lados da base da pirâmide cresce indefinidamente, o seu número de faces laterais também cresce indefinidamente E, nesse caso, a base da pirâmide tende a se confundir com a do cone e a superfície lateral da pirâmide com a superfície lateral do cone.

Podemos, então, considerar o cone como o limite de uma pirâmide regular convexa, nele inscrita, cujo número de faces laterais aumenta indefinidamente.

E, assim, estendemos ao cone as propriedades das pirâmides regulares convexas.

4. Área lateral do cone.

De acordo com o n.º 3, e como a área lateral de uma pirâmide regular é: $S = p \cdot A$, então área lateral do cone de raio R e geratriz g será:

$$S_l = \pi R g$$

Semiperímetro da base pela geratriz.

5. Desenvolvimento da superfície lateral do cone. O desenvolvimento da superfície lateral do cone é um setor circular cujo arco tem um comprimento igual ao da circunferência da base do cone (fig. 87).

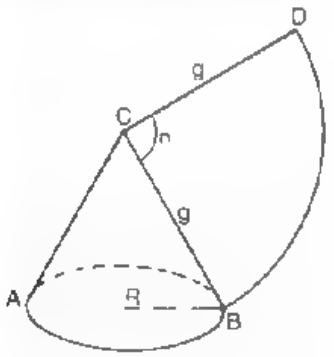


FIG. 87

O arco BD tem um comprimento igual a $2\pi R$. Chamando de n o número de graus desse setor circular, temos, da Geometria Elementar:

$$\frac{\pi g n}{180^\circ} = 2\pi R \quad \therefore \quad n = \frac{360\,\pi R}{\pi g} \quad \text{ou} \quad n = \frac{360\,R}{g}$$

6. Área total do cone.

$$S_t = S_l + S_B = \pi R g + \pi R^2 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{S_t = \pi R(g + R)}$$

7. Volume do cone. Como já vimos que o cone pode ser considerado como uma pirâmide regular de número infinito de faces laterais e como o volume de uma pirâmide é $V = \frac{S_b \times h}{3}$ então o volume do cone é:

$$\boxed{V = \frac{\pi R^2 h}{3}}$$

8. Cone equilátero. É o cone de revolução cuja secção meridiana é um triângulo equilátero (fig. 88).

Logo, em um cone equilátero, a geratriz é igual ao diâmeto da base.

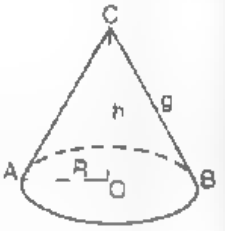


FIG. 88

$$g = 2R, \quad h = \frac{g\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad h = R\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{S_l = 2\pi R^2 \quad S_t = 3\pi R^2 \quad V = \frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}}$$

9. Tronco do cone. De um modo geral, chama-se tronco do cone a porção de cone que, em relação a um plano que corte todas suas geratrizes e não passe pelo seu vértice, pertence ao semiespaço, determinado pelo plano, que não contém o vértice do cone (fig. 89).

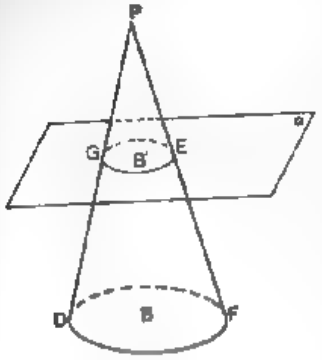


FIG. 89

A base B do cone P e a secção B' determinada no cone P pelo plano α denominam-se bases do tronco.

Se o cone P for de revolução, o tronco $DFEG$ é um *tronco de cone de revolução*.

Conforme as bases B e B' do tronco sejam paralelas ou não, o tronco diz-se *de bases paralelas* ou de bases não paralelas.

Estudaremos apenas o tronco de cone de revolução de bases paralelas.

10. Tronco de cone de revolução de bases paralelas. Pelo que acabamos de ver, o *tronco de cone de revolução de bases paralelas* é o tronco de cone obtido cortando-se um cone de revolução por um plano paralelo à sua base.

Pode ser definido, também, como o sólido gerado pela rotação completa de um trapézio retângulo em torno de seu lado perpendicular às bases (fig. 90).

As bases AB e CD do trapézio geram as bases do tronco e são os *raios* desses círculos das bases. O lado BC não perpendicular às bases gera a superfície lateral do tronco e chama-se *geratriz* do tronco. O lado AD, perpendicular às bases, é que é a distância entre as bases do tronco, denomina-se *altura* do tronco.

Chama-se secção meridiana de um tronco de cone de revolução ao trapézio isósceles determinado pela interseção de um tronco de cone de revolução com um plano meridiano (fig. 91).

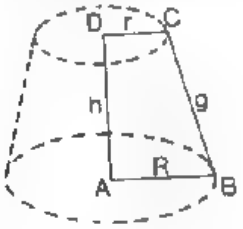


FIG. 90

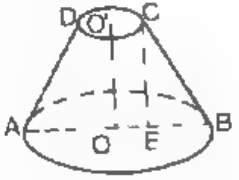


FIG. 91

Na figura 91 $ABCD$ é a secção meridiana. Traçando CE perpendicular a AB temos:

$$\overline{OB}=R,\ \overline{O'C}=r=O\dot{E},\ \overline{BC}=g,\ \overline{OO'}=h,\ \overline{EB}=R-r$$

Do triângulo retângulo CEB temos:

$$\overline{BC}^2=\overline{CE}^2+\overline{EB}^2 \quad \therefore\ g^2=h^2+(R-r)^2$$

Chamaremos daqui para diante de *tronco de cone* ao tronco de cone de revolução de bases paralelas.

11. Área lateral do tronco de cone (S_l). Um tronco de pirâmide regular diz-se inscrito ou circunscrito a um tronco de cone de revolução quando, tendo a mesma altura do tronco de cone, suas bases são inscritas ou circunscritas às bases do tronco de cone.

Um tronco de cone de revolução pode ser considerado como o limite para o qual tende um tronco de pirâmide regular quando o número de suas faces laterais cresce indefinidamente.

Mas, quando o número de faces laterais do tronco de pirâmide cresce indefinidamente, sua superfície lateral tem para limite a superfície lateral do cone e o seu apótema tem para limite a geratriz do tronco de cone.

Como a área lateral de um tronco de pirâmide é o produto de seu apótema pela soma dos semiperímetros de suas bases, então a área lateral do tronco será:

$$S_l=(\pi R+\pi r)g \quad \text{ou}$$

$$\boxed{S_l=\pi g(R+r)} \quad \text{ou ainda} \quad \boxed{S_l=2\pi R_m g}$$

sendo $R_m=\dfrac{R+r}{2}$ a base média do trapézio gerador do tronco de cone.

12. Desenvolvimento da superfície lateral do tronco de cone. O desenvolvimento é um segmento de coroa circular de largura igual a geratriz do tronco de cone, o qual é também chamado de trapézio circular (fig. 92).

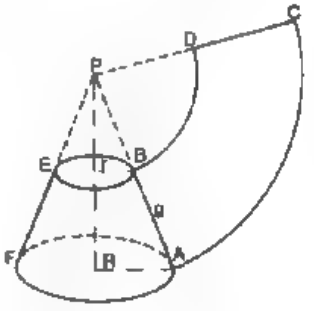


FIG. 92

O trapézio circular $ABCD$ é o desenvolvimento da superfície lateral do tronco de cone $ABEF$.

$$\overset{\frown}{BD}=2\pi r,\ \overset{\frown}{AC}=2\pi R \quad \overline{AB}=\overline{CD}=g$$

13. Área total do tronco de cone (S_t):

$$S_t=S_l+S_B+S_{B'}$$

$$\therefore\ S_t=\pi g(R+r)+\pi R^2+\pi r^2=2\pi Rg+\pi(R^2+r^2)$$

ou, ainda $$\boxed{S_t=\pi(2Rg+R^2+r^2)}$$

14. Volume do tronco de cone.

Temos: $V=\frac{h}{3}(\pi R^2+\pi r^2+\sqrt{\pi R^2\times\pi r^2})=\frac{h}{3}(\pi R^2+\pi r^2+\pi Rr)$

$$\boxed{V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)}$$

15. Exercícios resolvidos.

1) Qual a área lateral de um cone cujo raio da base mede 3m e a altura 4m?

$S_l=\pi Rg,\ R=3\text{m},\ h=4\text{m}$

Mas $g^2=R^2+h^2=25\ \therefore\ g=5\text{m}$

e $S_l=15\pi\text{m}^2$ ou $S_l=15\times3{,}14=47{,}10\text{m}^2$

2) Um cone tem 6m de raio e 8m de geratriz. Qual o ângulo do setor circular que se obtém desenvolvendo a superfície lateral desse cone?

De acordo com o n.º 5, temos: $n=\frac{360\,R}{g}=270°$

3) Qual a área total de um cone de 3m de altura, sabendo que o perímetro do quadrado inscrito em sua base é $16\sqrt{2}$ m?

Como o lado do quadrado é $R\sqrt{2}$, $4R\sqrt{2}=16\sqrt{2}\ \therefore\ R=4\text{m}$

$\therefore\ g^2=R^2+h^2=25\ \therefore\ g=5\text{m}$ e $S_t=4\pi(5+4)=113{,}04\text{m}^2$

4) Qual o volume de um cone cujo raio da base mede 4m e o perímetro de sua secção meridiana é 18m?

A secção meridiana de um cone é um triângulo isósceles.

Donde: $2g+2R=18$ mas, $R=4\ \therefore\ g=5$

Então: $h^2=g^2-R^2=25-16=9\ \therefore\ h=3\text{m}$ e $V=\frac{\pi\times16\times3}{3}=50{,}240\text{m}^3$

5) Qual a área lateral de um tronco de cone, cuja secção meridiana tem 24m de perímetro e um dos lados não paralelos é igual a 5m?

Como o lado não paralelo do trapézio é a geratriz g do tronco, então

$$2g+2R+2r=24\ \therefore\ 2R+2r=14\ \text{e}\ R+r=7$$

Logo, $S_l=5\pi\times7=35\pi=109{,}90\text{m}^2$

6) A diferença entre os raios das bases de um tronco de cone reto é 2cm e a altura 1dm. Calcular a área da superfície lateral e o volume desse tronco, sabendo que a razão entre as áreas das bases é $\frac{4}{9}$.

(Escola de Aeronáutica – 1945).

Como $g^2=h^2+(R-r)^2$, $R-r=2\text{cm}$ e $h=1\text{dm}=10\text{cm}$

então: $g^2=100+4=104\ \therefore\ g=2\sqrt{26}$

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{4}{9}\ \therefore\ \frac{R^2}{9}=\frac{r^2}{4}$$

Mas, $R=r+2\ \therefore\ \frac{r^2+4r+4}{9}=\frac{r^2}{4}\ \therefore\ 5r^2-16r-16=0$

Resolvendo essa equação, temos: $r_1=4$ e $r_2=-\frac{4}{5}$

Evidentemente a raiz negativa não satisfaz, logo $r=4\ \therefore\ R=4+2=6$

$$\therefore\ S_l=20\pi\sqrt{26}=319{,}65\text{cm}^2\ \text{e}\ V=\frac{760\pi}{3}=795{,}470\text{cm}^3$$

16. Exercícios para resolver.

1) Calcular a área lateral de um cone de 12m de altura e de 3m de raio da base.
2) Qual a área total do cone cujo raio da base mede 8m e a altura mede 12m?
3) Qual o volume de um cone cujo raio da base é 0,6m e cuja geratriz mede 2,5m?
4) Qual a área lateral de um cone equilátero cuja geratriz é igual a $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ m?
5) Qual a área total do cone equilátero de raio da base igual a 10m?
6) O diâmetro da base de um cone equilátero é $10\sqrt{3}$ metros. Achar seu volume.
7) O apótema de um hexágono regular inscrito na base de um cone equilátero mede $2{,}5\sqrt{3}$ metros. Qual a área lateral desse cone?
8) Qual a área total de um cone equilátero cuja base está circunscrita a um triângulo equilátero de apótema igual a $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ metros.
9) Achar o volume de um cone cujo perímetro de sua secção meridiana mede 18m e cujo perímetro do quadrado circunscrito à sua base mede 32m

10) A área lateral de um cone equilátero é 7,85m². Qual a sua altura?

11) Um cone tem 1256m² de área lateral e 40m de geratriz. Calcular o raio da base.

12) A área total de um cone de 1m de raio é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da secção meridiana desse cone. Qual a sua geratriz?

13) Desenvolvendo a superfície lateral de um cone de 8m de geratriz obtivemos um setor circular de 270°. Qual a área lateral desse cone?

14) Calcule o volume de um cone equilátero de altura igual a $8\sqrt{3}$ dm.
(U.E.G. – 1970).

15) O volume do cone equilátero cuja secção meridiana tem $9\sqrt{3}$ cm² de área, é igual a ... cm³. (F. Flum. Engenharia – 1967).

16) Um cone de revolução de 10m de geratriz e de 6m de raio da base deve ser cortado por um plano paralelo à sua base e tal que a área da secção seja igual à diferença entre a área lateral do cone e a área de sua base. Calcular a distância do plano ao vértice do cone.

17) O trapézio gerador de um tronco de cone tem para base média 5m e para lado não perpendicular às bases $2\sqrt{26}$ metros. Qual a área lateral do tronco?

18) Qual a área total de um tronco de cone de 13m de geratriz, cujos raios das bases medem respectivamente 8m e 3m?

19) Um tronco de cone de 12m de altura tem suas bases circunscritas a dois triângulos equiláteros de lados respectivamente iguais a $8\sqrt{3}$ metros e a $3\sqrt{3}$ metros. Achar seu volume.

20) Calcular a área total e o volume dos cones gerados pela rotação de um triângulo retângulo em torno dos catetos, sucessivamente, sabendo que os mesmos medem 3 e 4m, respectivamente.
(E. Aeronáutica – 1958).

21) Exprimir a área lateral de um cone equilátero em função da área de sua base.

22) Dar a expressão da área total de um cone equilátero em função da área de sua base.

23) Qual a relação entre a área lateral e a área total de um cone equilátero?

24) Calcular a área lateral de um cone equilátero em função de sua altura.

25) Qual a área total de um cone equilátero em função de sua altura?

26) Qual o volume de um cone equilátero em função de sua altura?

27) Que alteração sofre o volume de um cone, quando se duplica o raio?

28) Que alteração sofre o volume de um cone, quando se duplica a altura?

29) Qual a razão da área lateral de um cone para a de um cilindro de mesma base (πR^2) e de mesma altura (h)?

30) Qual a área lateral de um cone em função de sua altura e do raio de sua base?

31) Qual a razão entre os volumes de dois cones cujos raios da base são iguais e cujas alturas estão entre si na razão $\frac{1}{2}$?

32) A que distância do vértice de um cone de altura h devemos traçar um plano paralelo à sua base a fim de que a secção determinada seja a quarta parte da base do cone?

33) Calcule a que distância do vértice de um cone de altura 6m, deve ser feita uma secção paralela à base para que o cone fique dividido em dois sólidos equivalentes.
(Esc. Eng. U. F. Est. Rio – 1963)

34) Dois cones têm a mesma medida para suas geratrizes, as quais formam um ângulo de 30° com o plano de sua base e com o seu eixo, respectivamente. Qual a razão entre suas áreas laterais?

35) Um cilindro e um tronco de cone têm a mesma altura e uma base comum. Qual a razão entre os raios das bases do tronco a fim de que o seu volume seja a metade do volume do cilindro?

36) São dados um cone de revolução e um cilindro de revolução. Esses sólidos têm a mesma altura e são equivalentes. A área lateral do cilindro é igual à área total do cone. Exprimir o volume do cilindro em função de seu raio R.
(F. N. Arquitetura – 1960).

37) Calcule a razão entre o volume de um tetraedro regular e o volume do cone de revolução que lhe seja circunscrito.
(E. N. Engenharia – 1957).

38) Um cone circular de altura a e raio r é cortado por um plano paralelo à base. Calcular a altura do cone parcial assim determinado, de modo que a sua superfície lateral seja igual à superfície lateral do tronco.
(E. N. Engenharia – 1941).

39) A que distância do vértice devemos cortar um cone reto de revolução, por um plano paralelo à base, de modo que o volume do cone destacado seja $\frac{1}{8}$ do volume do primeiro cone?
(I. T. A. – 1957).

40) A área da base de um cone de revolução é 50,24dm². A área da secção desse cone com um plano distante 6m do vértice é de 28,26dm². Calcular o volume do cone. Faça $\pi = 3,14$.
(F. N. Arquitetura – 1956).

41) Calcular o volume de um cone de revolução, cujo raio da base mede 6m e cuja geratriz é igual à diagonal de um cubo tendo como aresta o lado de um triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio igual a $\frac{10}{3}$ do metro.
(E. N. Engenharia – 1946).

42) Dois troncos de cone têm uma base comum de raio igual a 1cm. As outras bases são círculos concêntricos, sendo o raio do maior deles igual a 2cm. O volume de um dos troncos é o dobro do volume do outro. Calcule o raio da outra base do tronco menor.
(EPUC – 1961).

43) Calcular o volume de um cone de revolução cujo raio da base mede 4m e o perímetro da secção meridiana 18m.
(U. F. Paraíba – 1956).

44) Calcular a área da superfície gerada por um triângulo equilátero de 12m de perímetro, girando em tôrno de um dos seus lados
(E. Aeronáutica – 1957)

45) Um cone tem uma área lateral de $200\pi m^2$ e está circunscrito a uma pirâmide quadrangular regular. Sabendo que a geratriz do cone mede 20m, determinar a diferença entre os volumes dos dois sólidos.
(E. Militar – Resende – 1949).

46) Na base de um cone cujo volume é igual a $144\pi\ m^3$, está inscrito um hexágono regular de área $54\sqrt{3}\ m^2$. Calcule a área total desse cone.
(ENE – 1964).

Respostas:

1) $116,431\ 2m^2$
2) $282,60m^3$
3) $0,914m^3$
4) $1m^3$
5) $942m^3$
6) $1\,177,500m^3$
7) $157m^2$
8) $12m^3$
9) $50,240m^3$
10) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ m
11) 10m
12) 2m
13) $150,72m^3$
14) $\frac{512\pi}{3}\ dm^3$
15) $9\pi\sqrt{3}$
16) $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ m
17) $319,65m^2$
18) $678,24m^2$
19) $1\,218,320m^3$
20) $24\pi m^3$, $12\pi m^3$, $36\pi m^2$, $16\pi m^2$
21) $S_l = 2S_b$
22) $S_l = 3S_b$
23) $\frac{2}{3}$
24) $S_l = \frac{2}{3}\pi h^2$
25) $S_l = \pi h^2$
26) $V = \frac{1}{9}\pi h^3$
27) Quadruplica
28) Duplica
29) $\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{2h}$
30) $S_l = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$
31) $\frac{1}{2}$.
32) $d = \frac{h}{2}$
33) $3\sqrt[3]{4}$ m
34) $\sqrt{3}$
35) $\sqrt{3}+1$
36) $12\pi R^2$
37) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
38) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
39) $\frac{h}{2}$
40) $138,978dm^3$
41) $96\pi m^3$
42) $\frac{1}{2}(\sqrt{11}-1)cm^3$
43) $16\pi m^3$
44) $16\pi\sqrt{3}\ m^2$
45) $350\sqrt{3}\ m^3$
46) $36\pi(1+\sqrt{5})m^3$

CAPÍTULO VIII

Esfera

1. Preliminares. Chama-se esfera ao sólido limitado por uma superfície esférica.

O centro da semicircunferência geradora da superfície esférica diz-se *centro* da esfera, o raio dessa semicircunferência é o *raio* da esfera e o seu diâmetro é o *diâmetro* da esfera.

Assim as denominações de *centro*, *raio* e *diâmetro* aplicam-se indiferentemente, quer às esferas, quer às superfícies esféricas que as limitam.

Os pontos da esfera, não pertencentes à superfície, que distam do centro de um comprimento menor do que o raio, chamam-se *interiores*. Os pontos cuja distância ao centro é maior do que o raio chamam-se *exteriores*.

A esfera pode também ser considerada como o sólido gerado pela rotação completa de um semi-círculo girando em torno do seu diâmetro.

2. Posições relativas de uma esfera e um plano. Consideremos uma esfera de centro O e raio R e seja d a distância do centro O a um plano π.

O plano π diz-se *exterior*, *tangente* ou *secante* à esfera (ou superfície esférica) de centro O, conforme se tenha, respectivamente:

$$d>R,\ d=R \text{ ou } d<R$$

Se o plano π é *exterior* à esfera O $(d>R)$, todos os pontos de π são exteriores à esfera.

Se o plano π é *tangente* à esfera O $(d=R)$, tem um único ponto P chamado ponto de tangência, em comum com a esfera. Esse ponto P pertence ao contorno da esfera e é fácil concluir que o plano tangente a uma esfera é perpendicular ao raio que une o centro O ao ponto de tangência P.

Se o plano π é *secante* à esfera O ($d<R$), intercepta essa esfera segundo uma secção plana que é sempre um *círculo*. Se o plano secante π tem $d=0$, o plano π diz-se *plano diametral* (fig. 93) e a secção plana determinada por esse plano com a esfera chama-se *círculo maior* ou *círculo máximo* da esfera.

Se o plano secante π não é um plano diametral, a secção plana é um *círculo* menor da esfera e tem seu raio menor do que o raio da esfera.

3. Posições relativas de uma esfera e de uma reta. Consideremos uma esfera de centro O e raio R e seja d a distância do centro O a uma reta r do espaço.

Uma reta r diz-se *exterior*, *tangente* ou *secante* a uma esfera (ou sua superfície esférica), conforme se tenha respectivamente:

$$d>R,\ d=R \text{ ou } d<R$$

Se a reta é *exterior* à esfera ($d>R$), todos os seus pontos são exteriores à esfera.

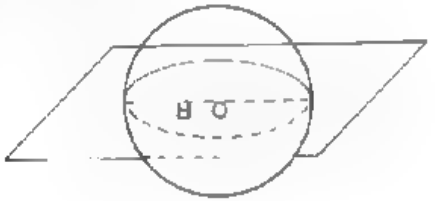


FIG. 93

Se a reta é *tangente* à esfera ($d=r$), tem um só ponto P em comum com a esfera. Esse ponto chama-se *ponto de tangência* e pertence ao contorno da esfera.

Toda reta r tangente a uma esfera é perpendicular ao raio do círculo, menor ou máximo, da esfera no ponto de tangência T o que é fácil de ver, bastando para isso que se considere o círculo da secção plana da esfera determinado por um plano secante π ao qual pertence a reta r (fig. 94).

Se a reta r é perpendicular ao círculo menor C no ponto de tangência T, então r é também perpendicular ao raio OT da esfera no ponto T. De fato, como OC é perpendicular a π

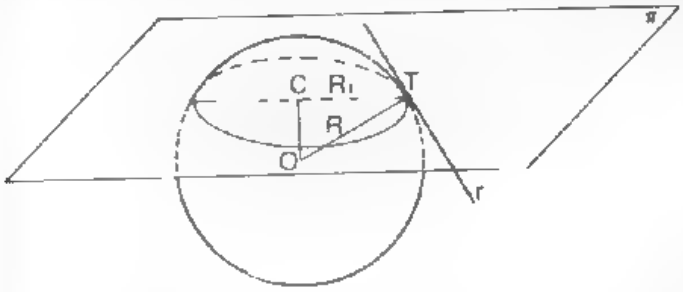


FIG. 94

C é o pé dessa perpendicular e como CT é perpendicular a r o raio OT da esfera é também perpendicular a r.

E concluimos: toda reta r tangente a uma esfera é perpendicular ao raio que une o centro da esfera ao ponto de tangência.

Se a reta é *secante* à esfera ($d<r$), tem dois pontos distintos em comum com o contorno da esfera.

4. Posições relativas de duas esferas. Sejam duas esferas de centros O e C e de raios R e r respectivamente. E sejam π, um plano diametral comum às duas esferas, e d, a distância OC entre os centros dessas esferas.

Podemos dizer:

1) as duas esferas são *exteriores*, se $d>R+r$;
2) a esfera menor é *interior* à maior, se $d<R-r$;
3) as duas esferas são tangentes exteriormente, se $d=R+r$;
4) as duas esferas são *tangentes interiormente*, se $d=R-r$;
5) as duas esferas são secantes, se $R-r<d<R+r$.

Essas conclusões podem ser verificadas facilmente tendo em conta que o plano diametral π determina, sobre as duas esferas, círculos máximos, cuja determinação de suas posições relativas é análoga à posição relativa das duas esferas.

A interseção de duas *esferas* (ou superfícies esféricas) *secantes* é um círculo (ou circunferência) cujo plano suporte é perpendicular à linha dos centros das esferas e cujo centro está sobre essa linha.

5. Cilindro circunscrito a uma esfera. Denomina-se *superfície cilíndrica circunscrita* a uma esfera o lugar geométrico das tangentes a essa esfera, paralelas a uma direção.

De fato, se considerarmos um semicírculo de centro O e diâmetro d, e uma reta r paralela ao suporte s de d, tangente ao semicírculo O, em um ponto T (fig. 95), vemos que, se fizermos o semiplano de origem s, ao qual pertence r, dar uma rotação completa em torno de s, o semicírculo O gerará uma esfera; a reta r, uma superfície cilíndrica tangente à esfera; e o ponto T uma circunferência máxima chamada *circunferência de tangência* ou de *contacto*. E, é fácil de ver que essa superfície cilíndrica é o lugar geométrico das tangentes à esfera paralela a s.

Chama-se *cilindro circunscrito a uma esfera* ao cilindro que se obtém cortando-se uma *superfície cilíndrica tangente a uma esfera* por dois planos paralelos que cortem todas as geratrizes da superfície cilíndrica e que sejam tangentes à esfera.

Quando esses dois planos são perpendiculares a s (fig. 96) o *cilindro circunscrito* formado é de *revolução*.

6. Cone circunscrito a uma esfera. Denomina-se *superfície cônica circunscrita a uma esfera* ao lugar geométrico das tangentes a uma esfera tiradas por um ponto do espaço exterior a essa esfera.

De fato, basta considerar um semicírculo de centro O e diâmetro d e uma tangente r a um ponto T do semicírculo e que passe por um ponto P pertencente ao suporte s de d.

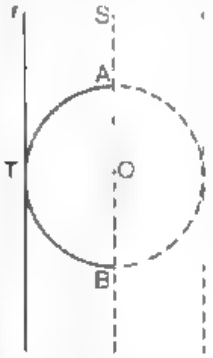


FIG. 95

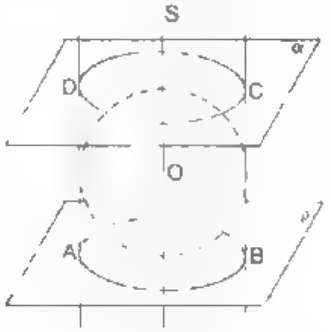


FIG. 96

Se fizermos girar o semiplano de origem s, e que contém r, de uma rotação completa em torno de s, vemos que o semicírculo O gera uma esfera; a reta r gera uma superfície cônica tangente à esfera, e o ponto T gera uma circunferência chamada circunferência de *contacto* ou de *tangência*.

Assim concluímos que a superfície cônica circunscrita à esfera é realmente o lugar geométrico das tangentes à esfera e passando por P.

Chama-se *cone circunscrito a uma esfera* ao cone que se obtém, cortando-se uma *superfície cônica de vértice* P *tangente a uma esfera*, por um plano π tangente à esfera de centro O que corte todas as geratrizes do cone e tal que o vértice P e o centro O pertençam ao mesmo semespaço por ele determinado.

Se o plano π é perpendicular ao diâmetro da esfera cujo suporte passe pelo vértice P do cone, o *cone circunscrito à esfera é de revolução* (fig. 97).

Nem sempre o cone circunscrito é equilátero.

A secção meridiana do cone circunscrito é (fig 97) um triângulo isósceles ou equilátero circunscrito a um círculo.

7. Principais porções da superfície esférica.

1) *Zona esférica.* Se cortarmos uma superfície por dois planos secantes distintos e paralelos, a porção de superfície esférica limitada por esses dois planos chama-se *zona esférica* (fig. 98).

Os dois *círculos da esfera* determinados por α e β e de raios r e R, respectivamente, chamam-se *bases da zona*.

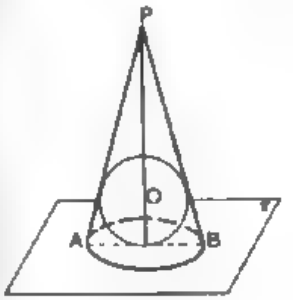


FIG. 97

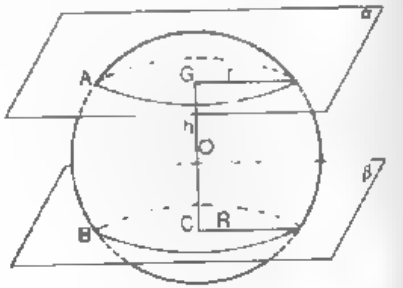


FIG. 98

5. Cilindro circunscrito a uma esfera. Denomina-se *superfície cilíndrica circunscrita* a uma esfera o lugar geométrico das tangentes a essa esfera, paralelas a uma direção.

De fato, se considerarmos um semicírculo de centro O e diâmetro d, e uma reta r paralela ao suporte s de d, tangente ao semicírculo O, em um ponto T (fig. 95), vemos que, se fizermos o semiplano de origem s, ao qual pertence r, dar uma rotação completa em torno de s, o semicírculo O gerará uma esfera; a reta r, uma superfície cilíndrica tangente à esfera; e o ponto T uma circunferência máxima chamada *circunferência de tangência* ou de *contacto*. E, é fácil de ver que essa superfície cilíndrica é o lugar geométrico das tangentes à esfera paralela a s.

Chama-se *cilindro circunscrito a uma esfera* ao cilindro que se obtém cortando-se uma *superfície cilíndrica tangente a uma esfera* por dois planos paralelos que cortem todas as geratrizes da superfície cilíndrica e que sejam tangentes à esfera.

Quando esses dois planos são perpendiculares a s (fig. 96) o *cilindro circunscrito* formado é de *revolução*.

6. Cone circunscrito a uma esfera. Denomina-se *superfície cônica circunscrita a uma esfera* ao lugar geométrico das tangentes a uma esfera tiradas por um ponto do espaço exterior a essa esfera.

De fato, basta considerar um semicírculo de centro O e diâmetro d e uma tangente r a um ponto T do semicírculo e que passe por um ponto P pertencente ao suporte s de d.

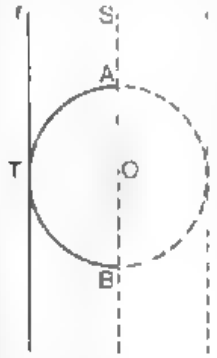


FIG. 95

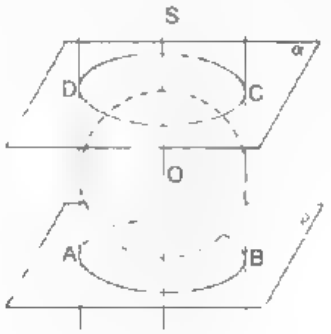


FIG. 96

Se fizermos girar o semiplano de origem s, e que contém r, de uma rotação completa em torno de s, vemos que o semicírculo O gera uma esfera; a reta r gera uma superfície cônica tangente à esfera, e o ponto T gera uma circunferência chamada circunferência de *contacto* ou de *tangência*.

Assim concluímos que a superfície cônica circunscrita à esfera é realmente o lugar geométrico das tangentes à esfera e passando por P.

Chama-se *cone circunscrito a uma esfera* ao cone que se obtém, cortando-se uma *superfície cônica de vértice* P *tangente a uma esfera*, por um plano π tangente à esfera de centro O que corte todas as geratrizes do cone e tal que o vértice P e o centro O pertençam ao mesmo semespaço por ele determinado.

Se o plano π é perpendicular ao diâmetro da esfera cujo suporte passe pelo vértice P do cone, o *cone circunscrito à esfera é de revolução* (fig. 97).

Nem sempre o cone circunscrito é equilátero.

A secção meridiana do cone circunscrito é (fig 97) um triângulo isósceles ou equilátero circunscrito a um círculo.

7. Principais porções da superfície esférica.

1) *Zona esférica.* Se cortarmos uma superfície por dois planos secantes distintos e paralelos, a porção de superfície esférica limitada por esses dois planos chama-se *zona esférica* (fig. 98).

Os dois *círculos da esfera* determinados por α e β e de raios r e R, respectivamente, chamam-se *bases da zona*.

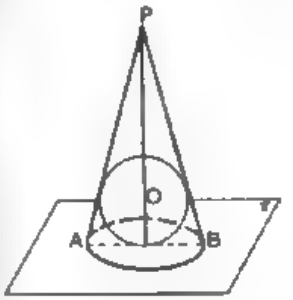


FIG 97

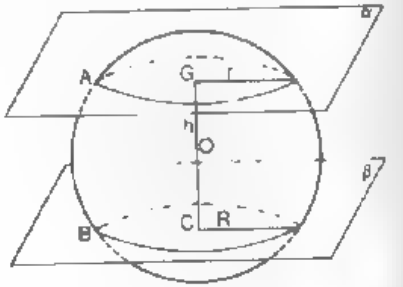


FIG 98

A distância, entre as bases ou os planos das bases da zona, denomina-se *altura da zona*.

A zona é também a superfície gerada pela rotação completa de um arco de círculo AB girando em torno do diâmetro.

2) *Calota esférica.* Se traçarmos dois planos um tangente e outro secante a uma superfície esférica, a porção de superfície esférica limitada por esses dois planos diz-se *calote* ou *calota esférica* (fig. 99)

Podemos dizer também que a *calota esférica* é uma qualquer das duas partes de uma superfície esférica que foi dividida por um plano secante que não passe pelo seu centro.

O círculo de raio $CA = r$ determinado pelo plano secante chama-se *base* da *calota*.

A distância entre a base e o plano tangente α chama-se *altura da calota*.

Uma calota tem uma só base e é denominada também de *zona esférica de uma só base*. É gerada pela rotação do arco de círculo TB girando em torno do diâmetro.

3) *Fuso esférico.* Se traçarmos dois semiplanos meridianos de uma superfície esférica cuja origem é o suporte do mesmo diâmetro dessa superfície, a porção de superfície esférica limitada por esses dois sem.planos chama-se *fuso esférico* (fig. 100).

O ângulo diedro formado por esses dois semiplanos meridianos chama-se *ângulo do fuso*.

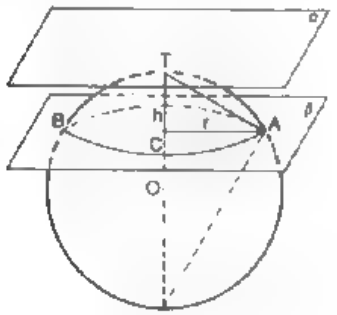


FIG. 99

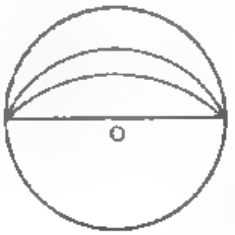


FIG. 100

8. Principais porções da esfera.

1) *Setor esférico.* É a porção de esfera gerada pela rotação completa de um setor circular em torno de um diâmetro que não o atravessa (fig. 101).

É o sólido limitado por uma zona ou uma calota esférica (gerada pelo arco m do setor circular) e por duas ou uma superfície cônica (gerada pelos raios do setor circular ou pelo raio que não se confunde com o eixo de rotação), cujos vértices ou vértice coincidem com o centro da esfera a que pertence o setor.

A altura da zona ou calota esférica é a *altura* do setor esférico.

A porção de superfície esférica gerada pelo arco m do setor circular diz-se base do setor esférico.

2) *Cunha esférica.* É a porção de esfera limitada por dois semiplanos meridianos de mesma origem (fig. 100).

Podemos dizer também que é o sólido limitado por um fuso esférico e por dois semicírculos máximos de mesmo diâmetro.

3) *Anel esférico.* É a porção de esfera gerada pela rotação completa de um segmento circular em torno de um diâmetro que não o atravessa (fig. 102).

O diâmetro em torno do qual gira o segmento circular é o eixo do anel.

4) *Segmento esférico de duas bases.* É a porção de esfera limitada por dois planos secantes distintos e paralelos (fig. 98).

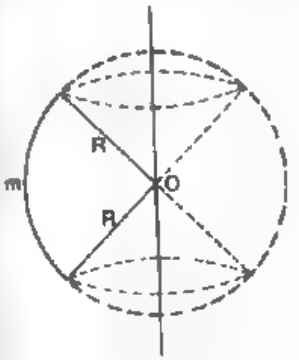


FIG. 101

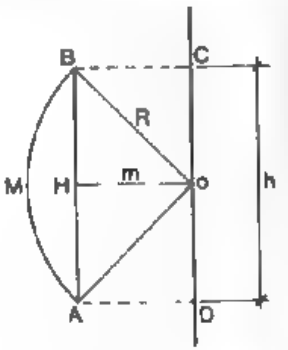


FIG. 102

Podemos dizer ainda que é o sólido limitado por dois círculos chamados *bases* e por uma zona esférica que é a sua superfície lateral.

As *bases* e a *altura* da zona são suas bases e sua altura.

5) *Segmento esférico de uma base.* É uma das duas porções em que fica dividida uma esfera por um plano secante que não passe pelo seu centro (fig. 99).

Se o plano passasse pelo centro teríamos uma *semiesfera*.

Podemos dizer também que é o sólido limitado por um círculo, chamado base, e por uma calota esférica que é a sua superfície lateral.

A altura da calota é a sua *altura*.

9. Área da superfície gerada por um segmento que gira em torno de um eixo.

> TEOREMA. A área da superfície gerada por um segmento ($\overline{AB}$) que dá uma rotação completa em torno de uma reta (r), pertencente ao seu plano, e que não lhe corta nem lhe é perpendicular, é igual ao produto da projeção (p) do segmento sobre a reta (r) pela circunferência cujo raio é o segmento (m) da mediatriz do segmento ($\overline{AB}$) compreendido entre ele ($\overline{AB}$) e a reta (r).

Temos 3 casos a considerar. Ou AB é paralelo a r, ou tem um ponto em comum com r (sem o atravessar) ou não tem ponto em comum com r e nem lhe é paralelo.

PRIMEIRO CASO: $\overline{AB}$ é paralelo a r (fig. 103). Então:

$$\overline{AD}=BC=m, \quad \overline{MA}=\overline{MB}$$

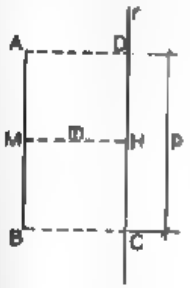


FIG. 103

A superfície gerada por AB é evidentemente a superfície lateral de um cilindro de raio m e altura p.

$$\therefore \quad \boxed{S_{\overline{AB}}=2\pi m \,.\, p}$$

SEGUNDO CASO: O ponto A de $\overline{AB}$ está sobre r (fig. 104).

A superfície gerada por $\overline{AB}$ é a superfície lateral de um cone de raio $\overline{BC}$ e geratriz $\overline{AB}$.

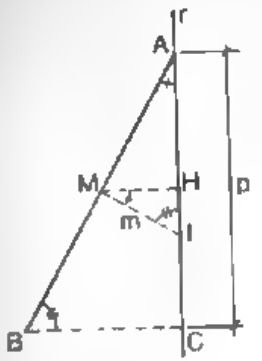


FIG. 104

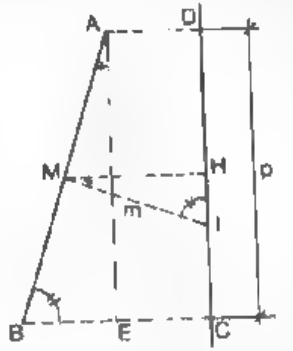


FIG. 105

Tracemos pelo ponto médio de $\overline{AB}$, M, a perpendicular $\overline{MH}$ à reta r, e a perpendicular MI ao segmento AB.

Sabemos que $\overline{MH}=\dfrac{\overline{BC}}{2}$ $\therefore$ $\overline{BC}=2\overline{MH}$

A superfície lateral do cone, gerada por AB, é $S_{\overline{AB}}=\pi\,\overline{BC}\times\overline{AB}$ ou $S_{\overline{AB}}=\pi\,2\overline{MH}\times\overline{AB}=2\pi\,(\overline{MH}\times\overline{AB})$ (1)

Mas, os triângulos retângulos ACB e MHI são semelhantes; logo, $\dfrac{\overline{AB}}{m}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{MH}}$ $\therefore$ $\overline{MH}\times\overline{AB}=m\times\overline{AC}=m.p$

Substituindo em (1) temos:

$$S_{\overline{AB}}=2\pi m \,.\, p$$

TERCEIRO CASO: $\overline{AB}$ não tem ponto em comum com r nem lhe é paralelo (fig. 105).

A superfície gerada por $\overline{AB}$ é a superfície lateral de um tronco de cone.

Tracemos pelo ponto médio de $\overline{AB}$, M, as perpendiculares $\overline{MH}$ e $\overline{MI}=m$, respectivamente a r e a $\overline{AB}$. E $\overline{AE}$ é paralelo a DC.

Como $S_1 = 2\pi R_m g$, temos que:

$$S_{\overline{AB}} = 2\pi \overline{MH} \times \overline{AB} \quad (1)$$

Mas os triângulos retângulos AEB e MHI são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{AB}}{m} \therefore \overline{MH} \times \overline{AB} = \overline{AE} \times m = mp$$

Substituindo em (1) temos: $S_{\overline{AB}} = 2\pi m \cdot p$

E, portanto, nos 3 casos, verificamos a nossa proposição.

10. Área da superfície gerada pela rotação de uma linha poligonal regular.

> TEOREMA. A área da superfície gerada por uma linha poligonal regular convexa, em uma rotação completa em torno de uma reta, pertencente ao seu plano, passando pelo seu centro e não a atravessando, é igual ao produto da projeção, dessa linha poligonal sobre a reta, pela circunferência cujo raio é o apótema da linha poligonal.

Com efeito, seja $ABCD$ uma linha poligonal regular convexa cujo centro é um ponto O pertencente a uma reta r que não atravessa a linha poligonal.

Fazendo a linha poligonal $ABCD$ girar em torno de r, a superfície gerada será a soma das áreas das superfícies geradas pelos segmentos AB, BC e CD.

De acordo com o número 9 temos:

$$\begin{aligned} S_{\overline{AB}} &= 2\pi m \cdot \overline{EF} \\ S_{\overline{BC}} &= 2\pi m \cdot \overline{FG} \\ S_{\overline{DC}} &= 2\pi m \cdot \overline{GH} \\ \hline \therefore S_{ABCD} &= 2\pi m (\overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH}) \\ \therefore S_{ABCD} &= 2\pi m \cdot p \end{aligned}$$

onde m é o apótema de $ABCD$, pois é o segmento que une O ao meio de cada segmento e é perpendicular a esse segmento.

11. Área da zona esférica. Consideremos, então, a zona gerada pelo arco BF (fig. 106) e inscrevamos no arco BF a linha poligonal regular $BCDEF$ de apótema m.

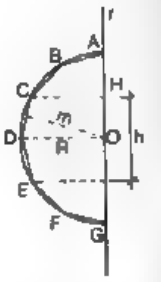


FIG. 106

Quando fazemos girar o semiplano de origem r, ao qual pertence BF, em torno de r, BF gerará uma zona esférica e a linha poligonal $BCFEG$ gerará uma superfície cuja área (n.º 10) é $2\pi m \cdot p$.

Se fizermos o número de lados da linha poligonal aumentar indefinidamente, o apótema m tende a se confundir com o raio R da esfera, e a superfície gerada pela poligonal tende a se confundir com a zona esférica. Podemos então dizer que a área da zona esférica é

$$\boxed{S = 2\pi Rp}$$

isto é, a área da zona é produto da circunferência cujo raio é o do arco gerador BF pela projeção desse arco sobre o eixo de rotação r.

Ou ainda, a área da zona é o produto de sua altura pela circunferência do círculo máximo da esfera à qual pertence.

OBSERVAÇÃO: Em uma mesma esfera, duas zonas de mesma altura têm áreas iguais e duas zonas quaisquer estão entre si como suas alturas.

12. Área da calote esférica. Seja uma calote esférica gerada pelo arco de círculo AC (fig. 106), por raciocínio análogo ao feito para determinação da zona, vemos que a área da calota é o limite para o qual tende a área da poligonal ABC quando o número de lados cresce indefinidamente.

Isto é, a área da calota será:

$$\boxed{S = 2\pi R \times AH} \quad (1)$$

ou seja, o produto de sua altura pela circunferência do círculo máximo da esfera à qual pertence.

Mas, de acordo com a figura 99, temos

$\overline{AT}^2 = 2Rh$ e a (1) ficará

$S = \pi \overline{AT}^2$

que é a área de um círculo de raio igual à corda do arco gerador da calota.

Ainda na figura 99, temos:

$$\overline{AT}^2 = r^2 + h^2 \text{ que nos dá}$$

$$S = \pi (r^2 + h^2)$$

expressão da área da calota em função de sua altura e do raio de sua base.

13. Área da superfície esférica (esfera). Como a superfície esférica é gerada por uma semicircunferência, consideremos a superfície esférica gerada pela semicircunferência AG em uma rotação completa em torno de r (fig. 106).

Mas acabamos de ver que (na fig. 106):

$S_{\widehat{AB}} = 2\pi R \cdot \overline{AH}$ (área da calota)

$S_{\widehat{BG}} = 2\pi R \cdot \overline{HG}$

Somando temos:

$$S_{\widehat{AG}} = S_{esfera} = 2\pi R\ (\overline{AH} + \overline{HG}) = 2\pi R \times 2R$$

$$\therefore \boxed{S_{esfera} = 4\pi R^2}$$

E podemos dizer que a área da esfera é o quádruplo da área de um dos seus círculos máximos.

14. Área do fuso. Se dividirmos uma superfície esférica em 360 fusos esféricos de um grau, como a área dessa superfície esférica é $4\pi R^2$, então a área de cada um desses fusos iguais é $\frac{4\pi R^2}{360}$. Mas, se a área de um fuso de um grau mede $\frac{4\pi R^2}{360}$, a área de um fuso de n graus medirá $\frac{4\pi R^2 n}{360}$, ou $S = \frac{\pi R^2 n}{90}$

15. Volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo.

> Teorema. O volume do sólido gerado por um triângulo (ABC) em uma rotação completa em torno de uma reta (r), pertencente ao seu plano, contendo um de seus vértices (A) e não o atravessando, é igual à terça parte do produto da altura traçada desse vértice (A) sobre o lado oposto (BC) não perpendicular a r, pela área da superfície gerada por esse lado (BC).

Temos 3 casos a considerar.

Primeiro caso: *O lado AB do triângulo pertence à reta r.*

Duas hipóteses podem ser feitas (fig. 107). Ou o pé da altura CD, relativa ao lado AB do triângulo ABC está interno a AB ou está sobre o seu prolongamento.

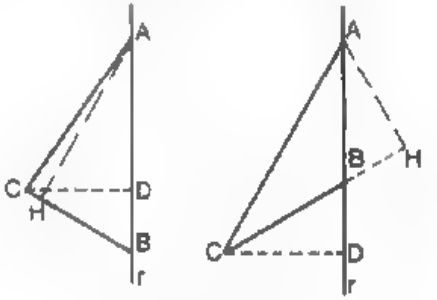


FIG. 107

Nas duas hipóteses temos, respectivamente:

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \times \overline{AD} + \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \times \overline{BD} = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2(\overline{AD} + \overline{DB}) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \times \overline{AB} \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \times \overline{AD} - \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \times \overline{BD} = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2(\overline{AD} - \overline{DB}) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\overline{DC}^2 \times \overline{AB} \quad (2)$$

Vemos que, em (1) e (2), o volume gerado pelo triângulo ABC é:

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \times \overline{AB} = \frac{1}{3}\pi\overline{CD} \times (\overline{CD} \times \overline{AB})$$

Se traçarmos a altura AH, é fácil de vêr que:

$\overline{CD} \times \overline{AB} = \overline{BC} \times \overline{AH}$ (dobro da área do triângulo ABC)

Logo podemos escrever: $V = \frac{1}{3}\pi\overline{CD} \times \overline{BC} \times \overline{AH}$

Mas $\pi \times \overline{CD} \times \overline{BC}$ é a área lateral do cone gerado pelo triângulo retângulo BDC e, portanto, a área da superfície gerada por $\overline{BC}$.

Então $\boxed{V = \frac{1}{3} S_{\overline{BC}} \times AH}$

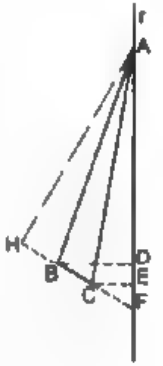


FIG. 108

Segundo caso: *O triângulo* **ABC** *tem apenas o vértice A pertencente à reta r e o lado* **BC**, *oposto a esse vértice, não é paralelo a r* (fig. 108).

Pelo que acabamos de ver (primeiro caso) temos:

$$V_{ABC} = V_{ABF} - V_{ACF} = \frac{1}{3} S_{\overline{BF}} \times \overline{AH} - \frac{1}{3} S_{\overline{CF}} \times \overline{AH} =$$

$$= \frac{1}{3}(S_{\overline{BF}} - S_{\overline{CF}})\overline{AH}$$

$$\therefore \boxed{V_{ABC} = \frac{1}{3} S_{\overline{BC}} \times \overline{AH}}$$

Terceiro caso: *O triângulo* **ABC** *tem apenas o vértice A pertencente a r e o lado* **BC**, *oposto a esse vértice, é paralelo a r* (fig. 109).

Temos duas hipóteses a considerar (fig. 109). Ou o pé da altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC, está interno a BC ou está sobre o seu prolongamento.

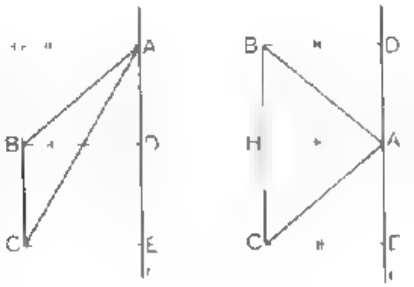


FIG. 109

Na primeira hipótese, temos:

$$V_{ABC} = V_{BCED} - (V_{ADB} + V_{ABC}) =$$

$$= \pi\overline{AH}^2 \times \overline{BC} - \left(\frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2 \cdot \overline{AE}\right)$$

Como $\overline{AH} = \overline{BD} = \overline{CE}$, vem:

$$V_{ABC} = \pi\overline{AH}^2 \times \overline{BC} - \frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2(\overline{AD} + \overline{AE})$$

Mas, $\overline{AD} + \overline{AE} = \overline{BC}$ $\therefore$ $V_{ABC} = \frac{2}{3}\pi\overline{AH}^2 \times \overline{BC}$

ou $$V_{ABC} = \frac{1}{3}(2\pi\overline{AH} \cdot \overline{BC}) \times \overline{AH} \quad (1)$$

Na segunda hipótese, figura 109 à esquerda:

$$V_{ABC} = V_{ADB} + V_{BCED} - V_{AEC} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times \overline{AD} + \pi\overline{BD}^2 \times \overline{DE} - \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2 \times \overline{AE}$$

Como $\overline{BD} = \overline{CE} = \overline{AH}$

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2(\overline{AD}+3\overline{DE}-\overline{AE})=\frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2(\overline{AD}+\overline{DE}+$$

$$+2\overline{DE}-\overline{AE})$$

Mas, $\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{AE}$ e $2\overline{DE}=2\overline{BC}$

$$\therefore V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2\times 2\overline{BC} \text{ ou } V_{ABC}=\frac{1}{3}(2\pi.\overline{AH}.\overline{BC})\times\overline{AH} \quad (2)$$

Temos nas duas hipóteses o mesmo resultado (1) e (2).

Observando que $2\pi AH.BC$ nada mais é do que a superfície gerada pelo segmento BC. Então podemos escrever:

$$\boxed{V_{ABC}=\frac{1}{3}S_{\overline{BC}}\times AH}$$

16. Volume do sólido gerado pela rotação de um setor poligonal regular.

> Teorema. O volume do sólido gerado por um setor poligonal regular convexo, $OABCD$ em uma rotação completa em torno de uma reta pertencente ao seu plano, passando pelo seu centro O e não o atravessando, é igual à terça parte do produto da área gerada pela linha poligonal regular que limita o setor pelo apótema m dessa linha poligonal.

Sejam os triângulos OAB, OBC e OCD obtidos unindo-se o centro aos vértices. A altura desses triângulos relativa aos lados opostos ao vértice O é o apótema m do setor poligonal.

Então, de acordo com o teorema anterior temos:

$$V_{OABCD}=V_{OAB}+V_{OBC}+V_{OCD}=\frac{1}{3}mS_{\overline{AB}}+\frac{1}{3}mS_{\overline{BC}}+\frac{1}{3}mS_{\overline{CD}}$$

$$\therefore V_{OABCD}=\frac{1}{3}m(S_{\overline{AB}}+S_{\overline{BC}}+S_{\overline{CD}})=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times m$$

17. Volume do setor esférico.

Consideremos um setor esférico gerado por um setor circular OBF (fig. 110), de centro O e raio R, girando em torno de uma reta r. E inscrevamos nesse setor circular um setor poligonal $OBCDEF$ de centro O e apótema m.

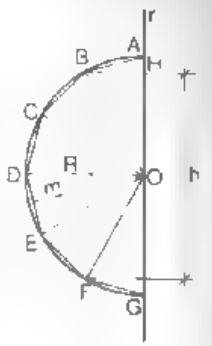


FIG. 110

Quando fazemos o semiplano de origem r, ao qual pertence o setor circular OBF, dar uma rotação completa em torno de r, o setor circular OBF gerará um setor esférico e o setor poligonal gerará um sólido cujo volume é:

$$V=\frac{1}{3}S_{BCDEF}\times m$$

Se fizermos o número de lados da linha poligonal do setor poligonal crescer indefinidamente, o apótema m tenderá para o raio R e o sólido gerado pelo setor poligonal tenderá a se confundir com o setor esférico.

Podemos então dizer que o volume do setor esférico é:

$$V=\frac{1}{3}S_{\widehat{BF}}\times R$$

Mas, $S_{\widehat{BF}}=2\pi R\times HI=2\pi Rh$

$$\boxed{V=\frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

18. Volume da esfera. Consideremos a esfera gerada pelo semicírculo $OADG$ girando em torno de $\overline{AG}=2R$ (fig. 110).

O volume da esfera será evidentemente igual à soma dos volumes gerados pelos setores circulares $O\widehat{AB}$ e $O\widehat{BG}$ (fig. 110).

Mas, de acordo com o número anterior, os volumes gerados por $O\widehat{AB}$ e $O\widehat{BG}$ são os volumes V_1 e V_2 de dois setores esféricos, cujas expressões são respectivamente:

$$V_1=\frac{2}{3}\pi R^2\times\overline{AH} \qquad V_2=\frac{2}{3}\pi R^2\times\overline{HG}$$

Somando, temos: $V = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}\pi R^2 (\overline{AH} + \overline{HG})$

Mas, $\overline{AH} + \overline{HG} = \overline{AG} = 2R$

$$\therefore \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Resultado estabelecido por Arquimedes que deu o seguinte enunciado:

"O volume da esfera é o quádruplo do volume do cone cuja base é um círculo máximo da esfera e cuja altura é um raio".

OBSERVAÇÃO: Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos de seus raios.

19. Volume da cunha esférica. Se dividirmos uma esfera em 360 cunhas esféricas de um grau, como o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$, então o volume de cada cunha esférica é

$$\frac{1}{360} \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

Mas, se o volume de uma cunha de um grau é $\frac{\pi R^3}{270}$, o volume de uma cunha esférica de n graus será:

$$\boxed{V = \frac{\pi R^3 n}{270}}$$

20. Volume do anel esférico.

O volume do anel esférico gerado pelo segmento circular AMB é igual à diferença entre o volume do setor esférico gerado pelo setor circular OAB e o volume do sólido gerado pelo triângulo OAB.

$$V_{AMB} = V = V_{\widehat{OAB}} - V_{OAB}^{\triangle}$$

mas, $V_{\widehat{OAB}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ e $V_{OAB}^{\triangle} = \frac{1}{3} S_{\widehat{AB}} \times m$

ou $V_{OAB}^{\triangle} = \frac{1}{3} \times (2\pi m \times h) \times m = \frac{2}{3}\pi m^2 h$

$$\therefore V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{2}{3}\pi m^2 h = \frac{2}{3}\pi h (R^2 - m^2)$$

Mas, é fácil ver (fig. 111) que: $R^2 - m^2 = BH^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4}$

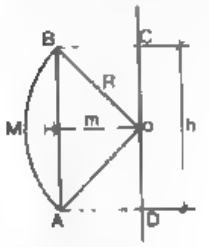


FIG. 111

$$\therefore V = \frac{2}{3}\pi h \times \frac{\overline{AB}^2}{4}$$

ou

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 h}$$

21. Volume do segmento esférico de duas bases. O segmento esférico de duas bases é gerado pela rotação completa de $AMBCD$ em torno de r (fig. 112).

O volume do segmento esférico V gerado por $AMBCD$ é a soma dos volumes do anel esférico, gerado pelo segmento circular AMB, e do tronco de cone, gerado pelo trapézio $ABCD$.

$$\therefore V = V_{AMB} + V_{ABCD}$$

Mas, $V_{AMB} = \frac{1}{6}\pi AB^2 h$

e $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\pi h (a^2 + b^2 + ab)$

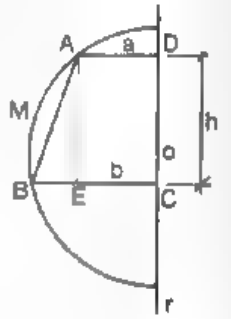


FIG. 112

Mas, do triângulo retângulo AEB, temos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = h^2 + (b-a)^2 = h^2 + b^2 + a^2 - 2ab$$

Substituindo esse valor de $\overline{AB}^2$ na expressão do V_{AMB} temos:

$$V_{AMB} = \frac{1}{6}\pi h (h^2 + b^2 + a^2 - 2ab)$$

Então

$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{6}\pi h\,(b^2+a^2-2ab)+\frac{1}{3}\pi h\,(b^2+a^2+ab)$$

ou efetuando:

$$\boxed{V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi h\,(b^2+a^2)}$$

22. Volume do segmento esférico de uma base. É um caso particular do número anterior.

A expressão do volume do segmento esférico de uma base é obtida fazendo $a = 0$ na última expressão. Temos então:

$$\boxed{V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi hb^2}$$

23. Exercícios resolvidos.

1) Sabendo que $OABCD$ é um semi-hexágono regular de $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ metros de lado.

Calcular a área da superfície gerada pela poligonal $ABCD$ (fig. 113), em uma rotação completa em torno de seu diâmetro.

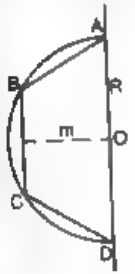


FIG. 113

$$S_{ABCD} = 2\pi m \times \overline{AD} \text{ (n.º 10)}$$

Mas, $\overline{AD} = 2R$, $m = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{AB} = R = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$

$$S_{ABCD} = 2\pi \times \frac{R\sqrt{3}}{2} \times 2R = 2\pi R^2\sqrt{3} = 346\text{m}^2$$

2) Calcular a área de uma zona esférica de 10m de altura sabendo que a área do círculo máximo da esfera à qual pertence é 314m².

$h = 10$m e como $\pi R^2 = 314$, $R^2 = \frac{314}{3{,}14} = 100$ ∴ $R = 10$

Então: $S = 2\times3{,}14\times10\times10 = 628\text{m}^2$

3) Calcular a área de uma esfera sabendo que o perímetro do hexágono regular inscrito em um de seus círculos máximos mede 30m.

O perímetro do hexágono é $6R = 30$ ∴ $R = 5$

∴ $S = 4\times3{,}14\times25 = 314\text{m}^2$

4) Calcular o volume gerado por um semi-hexágono regular de 2 metros de lado, em uma rotação completa em torno de seu diâmetro.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \times m$$

Mas, já vimos no exercício (1) que $S_{ABCD} = 2\pi R^2\sqrt{3}$, e, como $m = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$V = \frac{1}{3}\times2\pi R^2\sqrt{3}\times\frac{R\sqrt{3}}{2} = \pi R^3 = 25{,}120\text{m}^3$$

5) Calcular o volume do setor esférico sabendo-se que a altura da zona que o limita mede 4m e a área dessa zona é 40π metros quadrados.

Sabemos que o volume do setor é: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

$h = 4$, e como a área da zona é $2\pi Rh = 40\pi$, $R = 5$

∴ $V = \frac{2}{3}\times3{,}14\times25\times4 = \frac{2}{3}\times314 = 209{,}333\text{m}^3$

6) Calcular o volume de uma esfera circunscrita a um cone equilátero cuja altura mede 16dm.

A secção meridiana é um círculo circunscrito a um triângulo equilátero de 16m de altura.

Então: $h = \frac{3R}{2} = 16$ ∴ $R = \frac{32}{3}$

Então o volume da esfera será: $V = 4/3\,\pi R^3 = 1\,618{,}1\pi\text{m}^3$

7) Um cilindro circular reto tem a sua superfície total equivalente à superfície lateral de um prisma oblíquo cuja secção reta é um pentágono regular de lado igual a 3m e aresta lateral igual $\frac{4}{3}\pi$ metros. Sabe-se que a secção meridiana do cilindro é 14m. Achar o raio da esfera circunscritível ao cilindro. (E. Naval 1950).

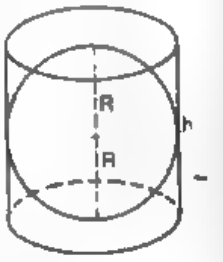


FIG. 114

Temos:

1) S_1 prisma $= 2p_{s.reta}\times a = 5\times3\times\frac{4\pi}{3} = 20\pi\text{ m}^2$

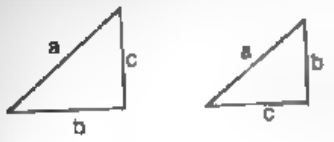
2) S_1 cilindro $= 2\pi R(h+R) = 20\pi$ ∴ $R(h+R) = 10$ (I)

3) $2p_{s.meridiana} = 4R + 2h = 14$: ∴ $2R + h = 7$ (II)

4) Resolvendo o sistema (I) e (II), temos uma só solução, que satisfaz $R = 2$m e $h = 3$m

mas, de acordo com a figura 114: $(2R_1)^2 = (2R)^2 + h^2$

$4R_1^2 = 16 + 9 = 25$ ∴ $R_1^2 = \frac{25}{4}$ ∴ $R_1 = 2{,}5\text{m}$



8) Se um triângulo retângulo gira sucessivamente sobre seus catetos e hipotenusa, demonstrar que existe a relação abaixo entre os volumes:

$$\frac{1}{V^2(a)} = \frac{1}{V^2(b)} + \frac{1}{V^2(c)} \qquad (1)$$

(E. N. Engenharia de Belo Horizonte – 1947).

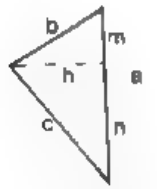


FIG. 115

Vemos nas três posições da figura 115 que os volumes gerados $V(c)$, $V(b)$ e $V(a)$, girando em torno de c, b e a, são respectivamente:

$$V(c) = \frac{\pi b^2 a}{3}, \quad V(b) = \frac{\pi c^2 b}{3}$$

e $$V(a) = \frac{\pi h^2 m}{3} + \frac{\pi h^2 n}{3} = \frac{\pi h^2 (m+n)}{3} = \frac{\pi h^2 a}{3}$$

Temos ainda:

$$V^2(c) = \frac{\pi^2 b^4 c^2}{9}, \quad V^2(b) = \frac{\pi^2 c^4 b^2}{9} \text{ e } V^2(a) = \frac{\pi^2 h^4 a^2}{9}$$

e $$\frac{1}{V^2(c)} = \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2}, \quad \frac{1}{V^2(b)} = \frac{9}{\pi^2 c^4 b^2} \text{ e } \frac{1}{V^2(a)} = \frac{9}{\pi^2 h^4 a^2}$$

Demonstrar que se tem a igualdade (1) é provar que:

$$\frac{9}{\pi^2 h^4 a^2} = \frac{9}{\pi^2 c^4 b^2} + \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} \qquad (2)$$

De fato, multiplicando ambos os membros de (2) por $\frac{\pi^2 b^2 c^2}{9}$, e recordando que $bc = ah$, temos:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \qquad (3)$$

Mas, $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{a^2 h^2} = \frac{1}{h^2}$

Então a (3) se verifica e, portanto, a (2) também.

Logo, está demonstrado que se verifica a igualdade (1).

24. Exercícios para resolver.

1) Calcular a área da superfície gerada por um segmento $\overline{AB}$ girando em torno de uma reta r, sabendo que a projeção de $\overline{AB}$ sobre r mede 5m e que o segmento $\overline{MP} = 2$m, que une o meio de $\overline{AB}$ a um ponto de r é perpendicular a $\overline{AB}$.

2) Achar a área de uma zona esférica de 4m de altura cuja área de uma de suas bases, que dista de 3m do centro da esfera, é igual a 16π metros quadrados.

3) Uma calota esférica de 6m de altura tem um quadrado de $32\sqrt{2}$m de perímetro inscrito em sua base. Qual a área da calota?

4) Um arco, que subtende uma corda de 10m, gera em uma rotação completa em torno de seu diâmetro, uma calota esférica. Qual a sua área?

5) Calcule a área de uma esfera inscrita em um cilindro de revolução cuja secção meridiana tem de área 36m². (E. N. Engenharia – 1957).

6) Qual a área de uma esfera cujo quadrado inscrito em seu círculo máximo tem 50m² de área? (Cap. da F. N. Filosofia – 1952).

7) Uma esfera tem para área de uma zona esférica de 5m de altura 60π m²; qual a área de um de seus fusos de 50°?

8) Qual a altura de uma zona cuja área é igual à do círculo máximo da esfera de 30m de diâmetro?

9) Qual o volume do sólido gerado pela rotação completa de um triângulo equilátero, de $\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ metros de lado, em torno de uma reta, passando por um de seus vértices e paralela ao lado oposto?

10) Qual o volume de um setor esférico cuja base é uma zona de 6m de altura, pertencente a uma esfera de 5m de raio?

11) Qual o volume da esfera cuja área é 314m²?

12) Qual o volume da esfera inscrita em um cubo de 216m³ de volume?

13) O volume de um cubo inscrito em uma esfera de volume 36πcm³ é igual a ... cm³. (E. Flum. Engenharia – 1957).

14) Achar o volume de uma esfera na qual um setor esférico de 45m³ de volume é limitado por uma zona de 27m² de área.

15) Achar o raio de uma esfera sabendo que o volume de um setor, limitado por uma zona de 54m² de área é igual a 18m³.

16) Qual o volume de uma cunha esférica de 30° tomada na esfera de 6m de diâmetro?

17) Achar o volume de um anel esférico cuja corda do segmento circular gerador mede 6m e cuja projeção dessa corda sobre o eixo do anel é 5m.

18) Um segmento esférico de duas bases tem 3m de altura e 10πm² para soma das áreas de suas bases. Qual o seu volume?

19) Qual o volume do segmento esférico de uma base, sabendo que a área dessa base é 16πm², e que sua altura mede 2m? ($\pi = 3{,}14$)?

20) O volume de um cilindro circunscrito a uma esfera mede 30πm³. Qual o volume dessa esfera?

21) Calcule o volume da esfera circunscrita a um cone de revolução de raio 6 cm e altura 12cm (Fac. Eng. UEG – 1963).

22) Seis esferas de mesmo raio 4cm, têm centros nos centros das faces de um cubo e são tangentes exteriormente cinco a cinco. Calcule o raio da esfera tangente, exteriormente, a essas seis esferas.
(ENE 1962

23) Se V é o volume de uma esfera e V' é o volume do cilindro circular reto circunscrito a esta mesma esfera, então:

a) $V = \frac{1}{2} V'$ b) $V = \frac{1}{3} V'$ c) $V = \frac{3}{4} V'$

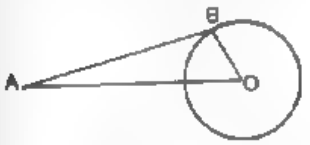
d) $V = \frac{\sqrt{3}}{3} V'$ e) $V = \frac{2}{3} V'$ (Economia – UFRJ – 1971).

24) Numa esfera, a área de um fuso de 60° é igual à diferença entre a área da esfera e a área de uma zona de 5cm de altura. Calcule o volume da esfera.
(UEG – 1980)

25) Um cone eqüilátero está inscrito em uma esfera de raio R. Calcular o excesso do volume da esfera sobre o volume do cone.
(E. Aeronáutica – 1952)

26) Um círculo circunscrito a um hexágono regular de raio igual a R gira em torno de um diâmetro que passa por dois vértices do hexágono. Estabelecer a relação entre os volumes gerados pelo círculo e pelo hexágono.
(Escola Naval – 1952).

27) Um ponto luminoso está situado a 2m de distância de uma esfera de raio igual a 4m. Qual o valor da área da porção iluminada da esfera?
(E. N. Química 2.ª época – 1946)



28) O segmento AO é igual a 10cm. Com centro em O traça-se uma circunferência de raio OB. AB é uma tangente à circunferência. Faz-se girar a figura em torno de AO. Pede-se o raio OB de modo que a superfície gerada por AB seja equivalente à superfície da esfera de raio OB.
(E. N. Engenharia – 1942)

29) O cone C de abertura $\alpha = 60°$ é tangente à esfera O de raio $r = 20$cm. Calcular o volume compreendido entre a superfície lateral do cone e a parte superior da superfície da esfera limitada pela curva de contacto.
(E. N. Engenharia – 1939).

30) Um quadrado, de lado a, gira em torno de um eixo que passa por um dos seus vértices, paralelo à diagonal do quadrado que não passa por esse vértice. Calcular o volume gerado.
F. N. Filosofia 1945

31) Que fração da área do globo terrestre pode ser vista por um observador situado a uma altura $e = 20$km? A terra é suposta esférica com raio $R = 6\,300$km.
(E. N. Engenharia – 1947)

32) Dadas duas esferas e sendo o raio R, da maior, igual ao dobro do raio r, da menor, sabendo-se ainda que o fuso de 60°, na maior tem a mesma área de uma zona de 1,5m de altura, na outra, calcular o raio R da maior esfera.
(F. N. Arquitetura – 1948).

33) Uma esfera está inscrita em um cubo. Calcular o volume da porção não ocupada pela esfera, sabendo que a aresta do cubo mede 10m ($\pi = 3{,}1416$).
(E. P. C. – Exército – 1942).

34) Achar o raio de uma esfera, cuja área é média proporcional entre as áreas laterais de um cilindro e de um cone que têm a mesma altura, igual a 2m e cujo raio da base comum é igual a 1m.
(Escola Militar – 1945).

35) Calcule a razão entre a área de um hemisfério e a área lateral do cone de revolução que tenha por base o círculo máximo do hemisfério e por vértice o polo desta círculo.
(Fac. Eng. UEG – 1964)

36) Calcular a área total e o volume do cone circular reto circunscrito à esfera do diâmetro 5cm sabendo-se que a sua altura é o quadruplo desse diâmetro.
(E. N. Engenharia – 1948).

37) A esfera circunscrita ao octaedro regular de aresta a tem o raio igual a ...
(CESCEM – 71 – S. P.).

38) O volume de um cubo inscrito em uma esfera é $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ m³. Qual o volume dessa esfera?

39) Qual a expressão que dá o volume V de uma esfera em função da aresta a de um cubo nela inscrito?

40) Deduzir a expressão que dá a diagonal d de um cubo inscrito em uma esfera de área igual a S.

41) Calcule o volume do cilindro eqüilátero circunscrito a uma esfera, sabendo que o cilindro equilátero inscrito nessa esfera tem 100m³ de volume.
(ENE – 1961).

42) Dado um tetraedro de aresta a, determinar em função desta aresta:

a) a fórmula clássica do raio da esfera inscrita;

b) a fórmula clássica do raio da esfera circunscrita.

(Escola Militar – 1937).

43) Qual a relação entre os volumes de dois tetraedros regulares, um inscrito e outro circunscrito a uma mesma esfera.
(E. N. Engenharia – 1948).

44) Estabelecer o valor da razão entre o volume de uma esfera de raio R e o de um cubo nela inscrito.
(E. Politécnica U. Cat. – Rio – 1952)

45) Determinar o raio da esfera na qual seja possível destacar uma calota de altura igual a 2m e cuja área seja igual ao triplo da superfície lateral do cone tendo para vértice o centro da esfera e por base a base da calota.
(E. N. Engenharia – 1953)

46) Um plano secante determina numa superfície esférica de raio R duas calotas cujas áreas estão entre si como um está para 2. Exprima em função de R, a distância do plano ao centro da esfera.
(Inst. Sup. Agronomia – Portugal – 1943)

47) Calcule o volume da esfera inscrita no cone de revolução cujo raio da base mede 6cm e cuja área lateral tem $60\pi cm$

P. Fluminense Engenharia 1957)

48) Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrito num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é 1, qual é o comprimento da aresta do octaedro?

(ITA – 73 – S. P.)

49) Um cubo de aresta a tem em cada vértice o centro de uma esfera de raio $\frac{a}{2}$. O volume da parte comum do cubo com as esferas é . . .

(MACK – 73 – S. P.)

RESPOSTAS:

1) $62,80m^2$
2) $125,60m^3$
3) $100\pi m^2$
4) $314m^2$
5) $36\pi m^3$
6) $314m^2$
7) $62,80m^3$
8) 7,5m
9) $1m^3$
10) $314m^3$
11) $523,333m^3$
12) $36\pi m^2$
13) $24\sqrt{3}$
14) $523,333m^3$
15) 1m
16) $3\pi m^2$
17) $30\pi m^3$
18) $19,5\pi m^2$
19) $54,426m^3$
20) $20\pi m^2$
21) $\frac{1125}{2}\pi\ cm^3$
22) $4(\sqrt{2} \pm 1)$ cm
23) e
24) $36\pi cm^3$
25) $\frac{23}{24}\pi R^3$
26) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
27) $33,493m^2$
28) 2,3cm
29) $4\,186,666m^3$
30) $\pi a^2\sqrt{2}$
31) $\frac{1}{632}$
32) 2,25m
33) $476,400m^3$
34) $\sqrt[3]{\frac{5}{16}}$
35) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
36) $S_1 = \frac{200\pi}{3}\ cm^2$ e $V = \frac{500\pi}{9}\ cm^3$
37) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
38) $8m^3$
39) $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$
40) $d = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$
41) $200\sqrt{2}\ m^3$
42) $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ e $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$
43) $\frac{1}{27}$
44) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$
45) $R = \frac{13}{9}$ m
46) $d = \frac{R}{3}$
47) $36\pi m^3$
48) $\frac{1}{6}$
49) $\frac{\pi a^3}{6}$

CAPÍTULO IX

Secções cônicas; definições e propriedades fundamentais.

1. Preliminares. Chama-se, de um modo geral, *secção cônica* ou simplesmente *cônica* ao lugar geométrico L dos pontos comuns a uma superfície cônica de revolução P e a um plano π.

Chamemos de α, o ângulo agudo constante que a geratriz de uma superfície cônica de revolução de vértice P, faz com o seu eixo e de β o ângulo agudo que um plano π faz com o eixo dessa superfície.

Podemos chegar aos seguintes resultados que resumiremos no seguinte quadro:

I) *Se o plano π passa pelo vértice P*	$\beta < \alpha$		L duas retas distintas
	$\beta = \alpha$		L duas retas coincidentes
	$\beta > \alpha$		L um ponto
II) *Se o plano π não passa pelo vértice P*	$\beta < \alpha$		L curva chamada *hipérbole*
	$\beta = \alpha$		L curva chamada *parábola*
	$\beta > \alpha$	$\beta \neq 90°$	L curva chamada *elipse*
		$\beta = 90°$	L circunferência

(I) constitui o caso limite do caso geral (II).

As curvas denominadas *elipse*, *hipérbole* e *parábola* constituem as *secções* cônicas, cujo estudo constitui o assunto desta unidade e o qual apresentaremos a seguir.

2. Definições gerais sobre as cônicas. Chama-se *arco* de uma *cônica* a porção da mesma limitada por dois pontos.

Denomina-se *corda* de uma *cônica* o segmento de reta que une os dois pontos quaisquer da cônica.

Diâmetro de uma *cônica* é o lugar geométrico dos meios das cordas paralelas a uma dada direção.

Eixo de uma *cônica* é todo o diâmetro da cônica perpendicular às cordas que ele divide ao meio.

Chamam-se *vértices* de uma cônica aos pontos comuns a um eixo e à própria cônica.

Chama-se *centro* de uma *cônica* a interseção de dois eixos perpendiculares.

Uma reta é *secante* a uma cônica, quando tiver dois pontos em comum com essa cônica. A *tangente* é a posição limite da secante, quando os pontos de interseção da secante se aproximam indefinidamente.

ELIPSE

3. Preliminares. Chama-se *elipse* a uma curva plana cuja soma das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos de seu plano é constante.

Podemos dizer, também, que *elipse* é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do mesmo plano é constante.

Esses pontos fixos chamam-se *focos* da elipse.

Denomina-se *distância focal* a distância entre os focos.

Raios vetores de um ponto da elipse são os segmentos de reta que unem esse ponto aos focos.

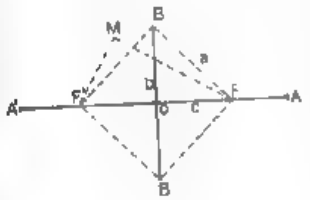


FIG. 117

Seja M um ponto qualquer de uma elipse (fig. 117), cujos focos sejam F e F', cuja constante da definição seja $2a$ e cuja distância focal seja $2c$.

$$\overline{OF'} = \overline{OF} = c \quad \text{e} \quad \overline{F'F} = 2c$$

então:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a \qquad (I)$$

Marquemos sobre a reta FF' dois pontos A' e A, tais que $\overline{OA} = \overline{OA'} = a$.

Esses pontos A' e A pertencem à curva pois satisfazem à relação (1).

Se traçarmos a mediatriz do segmento $\overline{F'F}$, como todos os seus pontos são eqüidistantes de F' e F, os pontos da elipse pertencentes a essa mediatriz têm raios vetores iguais a a, pois a soma dêsses raios vetores é, pela (1), igual a $2a$.

Sejam B e B' os dois pontos da elipse pertencentes à mediatriz de $\overline{F'F}$ e de raios vetores iguais a a, e façamos $\overline{BB'} = 2b$.

Pelo que acabamos de ver $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são cordas da elipse, e como é fácil de notar que cada uma dessas cordas corta ao meio a outra, e as cordas paralelas a essa outra, concluímos que $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são *diâmetros* da elipse e, mais ainda, como são perpendiculares, são os *eixos da elipse*.

$\overline{AA'} = 2a$ chama-se *eixo maior* da elipse.

$\overline{BB'} = 2b$ diz-se *eixo menor* da elipse.

Os pontos A, A', B e B' são os vértices da elipse (n.º 2) e o ponto O, interseção dos dois eixos perpendiculares da elipse, é o *centro da elipse*.

E temos, do triângulo retângulo BOF:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

4. Excentricidade da elipse. Denomina-se *excentricidade* da elipse a relação

$$e = \frac{c}{a}$$

Como vimos que $c < a$, então $e < 1$.

A excentricidade de uma elipse é menor do que um.

5. Traçado da elipse. De acordo com a definição da elipse podemos apresentar duas maneiras de efetuar o seu traçado:

1.º) Traçado *contínuo* da elipse.

2.º) Traçado da elipse *por pontos*.

1.º) Para se descrever uma elipse, por um traçado contínuo, fixam-se sobre os focos da elipse as duas pontas de um compasso de ponta seca, e em torno dessas pontas passa-se um fio, de extremidades ligadas e de comprimento igual a $2a + 2c$. Estendendo-se esse fio com uma ponta de lápis que se faz correr sobre o plano, descreve-se a elipse. Procede-se assim no papel.

No quadro-negro, as pontas do compasso podem ser substituídas por dois "percevejos" ou "taxas".

O traçado contínuo é obtido geralmente com *compassos de elipse*.

FIG. 118

2.º) Para se traçar uma elipse por pontos procede-se assim: marquemos os focos F e F' o centro O da elipse e os vértices A e A' extremos do eixo maior (fig. 118)

Seja $2a$ o eixo maior e $2'$ a distância focal. Tomemos a seguir um ponto P sobre AA'. Com centro em F e F' e raios AP e $A'P$ respectivamente, tracemos arcos de circunferência cujas intersecções são os pontos M e M', os quais pertencem à elipse, pois

$$\overline{MF'}+\overline{MF}=\overline{M'F'}+\overline{M'F}=\overline{A'P}+\overline{PA}=2a.$$

Com centro em F e F' porém com raios $A'P$ e AP respectivamente, se descrevermos arcos de circunferências eles se interceptam nos pontos N e N' que também são pontos da elipse.

Se tomarmos outros pontos P sobre o eixo maior, para cada um dos novos pontos marcados obteremos 4 outros pontos da elipse. (Os pontos P tomados devem estar entre F' e F, a fim de que as circunferências se interceptem).

Unindo os pontos da elipse obtidos descreveremos a elipse.

Observações: Do traçado da elipse concluímos que a elipse é uma curva convexa pois qualquer reta não a intercepta em mais de dois pontos, e é *fechada*.

Um ponto M do espaço é *interior*, *pertence* ou é *exterior* à elipse conforme se tem $\overline{MF}+\overline{MF'}$ menor, igual ou maior a $2a$.

Dois pontos M e M' dizem-se *simétricos em relação a um ponto* O, quando O é o ponto médio do segmento MM'.

É fácil de ver que todos os pontos da elipse são simétricos em relação ao seu centro, que é, assim, um centro de simetria.

Dois pontos M e M' dizem-se *simétricos em relação a uma reta* r quando r for a mediatriz do segmento MM'.

É fácil também observar que os pontos da elipse são, dois a dois, simétricos em relação aos seus eixos que são assim eixos de simetria da elipse.

6. Observação. Demonstra-se que "a tangente à elipse em um de seus pontos faz ângulos iguais com os raios vetores desse ponto de tangência".

7. Círculos diretores e círculo principal de uma elipse. Denominam-se *círculos diretores* de uma elipse os círculos que possuem como centro os focos da elipse e como raio $2a$.

São, obviamente, dois esses círculos diretores.

Chama-se *círculo principal* o círculo cujo centro é o centro da elipse e cujo raio é igual a a.

Só existe, é claro, um círculo principal.

HIPÉRBOLE

Definições e traçado; assíntotas; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente.

8. Preliminares. Chama-se *hipérbole* a uma curva plana cujo valor absoluto da diferença das distâncias de cada um dos seus pontos a dois pontos fixos de seu plano é constante.

Podemos dizer, também, que *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença dos valores absolutos das distâncias a dois pontos fixos do mesmo plano é constante.

Esses pontos fixos chamam-se *focos da hipérbole*.

Denomina-se *distância focal* a distância entre os focos.

Raios vetores de um ponto da hipérbole são os segmentos de reta que unem esse ponto aos focos.

Sejam F e F' os focos de uma hipérbole cuja constante da definição seja igual a $2a$ e cuja distância focal seja $2c$ (fig. 119).

E sejam os pontos M e M' da hipérbole, tais que:

$$(1)\quad \begin{cases} |\overline{M'F}-\overline{M'F'}|=2a \\ |\overline{MF}-\overline{MF'}|=2a \end{cases}$$

Esses dois pontos pertencem a dois *ramos da hipérbole*, os quais não têm ponto em comum.

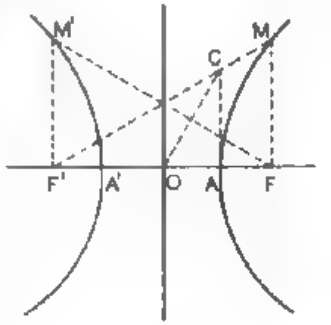


FIG. 119

Para que as relações (1) existam é necessário que, no triângulo $M'F'F$, se tenha

$$\overline{M'F} - \overline{M'F'} < \overline{F'F} \text{ ou } 2a < 2c \therefore a < c$$

Marquemos sobre a reta $F'F$ o ponto médio O de $\overline{F'F}$ e os pontos A' e A tais que $\overline{OA'} = \overline{OA}$.

Esses pontos A e A' pertencem à curva, pois satisfazem as relações (1).

Todos os pontos da hipérbole são, dois a dois, simétricos em relação à reta $A'A$ e portanto $A'A$ é um eixo de simetria da hipérbole e chamamos de *eixo transverso* da hipérbole ao segmento $\overline{AA'} = 2a$.

Os pontos A e A' pertencentes à cônica e ao seu eixo são os *vértices* da hipérbole.

Os pontos da hipérbole também são simétricos, dois a dois, em relação à mediatriz de $\overline{AA'}$, que é também um eixo de simetria da hipérbole e chamamos de *eixo não transverso* ou *imaginário* da hipérbole.

O ponto de intersecção dos eixos *transverso* e *não transverso* da hipérbole chama-se *centro* da hipérbole e é um centro de simetria dessa cônica.

9. Excentricidade da hipérbole. Denomina-se excentricidade da hipérbole a relação

$$e = \frac{c}{a}$$

Como vimos que $a < c$, $e > 1$.

A excentricidade da hipérbole é maior do que um.

Se na figura 119, com centro em O e raio OC, traçarmos um arco de circunferência que intercepte a perpendicular a $F'F$ levantada por A, em um ponto C, e fizermos $\overline{AC} = b$, temos no triângulo retângulo OAC:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{c^2 = a^2 + b^2} \qquad (2)$$

Se marcarmos sobre o eixo não transverso os pontos B' e B tais que $OB' = OB = b$, o segmento $B'B = 2b$ é, por analogia

com a elipse, chamado de comprimento do eixo não transverso da hipérbole, ou, apenas, de eixo não transverso.

Quando $b = a$, a hipérbole diz-se *equilátera*.

Nesse caso pela relação (2) temos:

$$c^2 = 2a^2 \therefore c = a\sqrt{2}$$

e a excentricidade da hipérbole equilátera será:

$$e = \frac{c}{a} \quad \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

10. Traçado da hipérbole. De acordo com a definição de hipérbole podemos apresentar duas maneiras de efetuar o seu traçado:

1.º) Traçado da hipérbole por *movimento contínuo*.

2.º) Traçado da hipérbole *por pontos*.

1.º) Por movimento contínuo: Dados os focos F' e F de uma hipérbole cujo comprimento do eixo transverso é $2a$, fixemos em um dos focos F' a extremidade de uma régua que possa girar em torno de F' e tomemos um fio, de comprimento igual ao da régua diminuído de $2a$.

Se fixarmos uma das extremidades do fio no foco F e a outra no extremo livre da régua, ao fazermos a régua girar em torno de F', mantendo-se, com uma ponta de lápis, o fio esticado de encontro à régua, a ponta do lápis descreverá um arco de um ramo da hipérbole.

O que é fácil de ver, pois um qualquer dos pontos P descritos pela ponta do lápis satisfaz a relação $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$.

Se invertemos a posição da régua, fixando uma das extremidades em F, e procedendo analogamente ao que já foi feito, obtemos o outro ramo da curva.

2.º) Por pontos: Marquemos os focos F' e F da hipérbole, seu centro O e seus vértices A' e A ($\overline{AA'} = 2a$) (fig. 120).

Tomemos a seguir sobre o eixo transverso dessa hipérbole um ponto P exterior ao segmento $\overline{F'F} = 2c$.

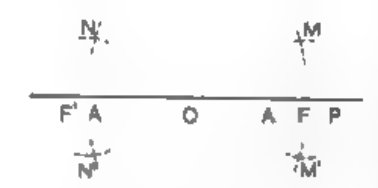


FIG. 120

Com centro em F' e F e com raios $A'P$ e AP respectivamente, tracemos arcos de circunferências, cujas intersecções são os pontos M e M', os quais pertencem à hipérbole, pois

$$|\overline{MF} - \overline{MF'}| = |\overline{M'F} - \overline{M'F'}| = |\overline{AP} - \overline{A'P}| = 2a$$

Com centro em F' e F porém com os raios AP e $A'P$ respectivamente, se descrevermos arcos de circunferências eles se interceptam nos pontos N e N', que também são pontos da hipérbole.

Se tomarmos sobre o eixo transverso da hipérbole outros pontos P, exteriores a $\overline{F'F}$, para cada um desses novos pontos marcados obteremos 4 outros pontos da hipérbole.

Unindo esses pontos da hipérbole obtidos descreveremos uma hipérbole.

Observações: Do traçado da hipérbole vemos que essa cônica é uma curva convexa, pois uma reta não a intercepta em mais de dois pontos.

Um ponto M do espaço é *interior*, *pertence* ou é *exterior* à hipérbole conforme o valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos seja maior, igual ou menor a $2a$.

11. Observação. Demonstra-se que "a tangente à hipérbole em um de seus pontos faz ângulos iguais com os raios vetores desse ponto".

12. Círculos diretores e círculo principal de uma hipérbole. Denominam-se círculos diretores de uma hipérbole os círculos que possuem como centro os focos da hipérbole e como raio $2a$.

São dois esses círculos diretores.

Chama-se círculo principal da hipérbole o círculo cujo centro é o centro da hipérbole e cujo raio é igual a a.

Existe um único círculo principal.

13. Assíntotas. Chama-se assíntota de uma hipérbole ao limite das posições de uma tangente cujo ponto de tangência tende para o infinito.

Diz-se, às vezes, de modo menos preciso, que é a tangente à hipérbole no infinito.

A hipérbole tem duas assíntotas que passam pelo centro da curva e são simétricas em relação aos seus eixos.

Os eixos da hipérbole são as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas.

14. Construção das assíntotas. Dada uma hipérbole de centro O, focos F' e F e vértices A' e A (fig. 121), tracemos com centro em O e raio $OF = c$ uma circunferência. Pelos vértices A' e A levantemos perpendiculares ao eixo transverso da hipérbole. Sejam M, N, P e Q os pontos de intersecção dessas perpendiculares com a circunferência de centro O e raio c.

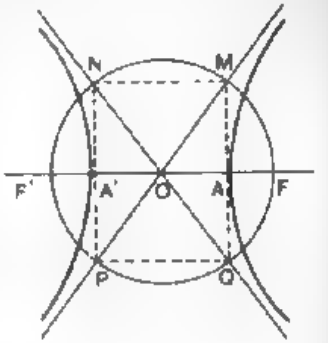


FIG. 121

Tracemos o retângulo $MNPQ$. As retas suportes das diagonais desse retângulo são as assíntotas da hipérbole.

Note-se que o retângulo $MNPQ$ tem para lados respectivamente $2a$ e $2b$ e suas diagonais medem $2c$. Quando a hipérbole é equilátera, vimos que $a = b$ e portanto o nosso retângulo $MNPQ$ se reduz a um quadrado e as assíntotas são evidentemente perpendiculares.

PARÁBOLA

Definição e traçado; diretriz; tangente

15. Preliminares. Chama-se *parábola* a uma curva plana cujos pontos distam igualmente de uma reta fixa e de um ponto fixo pertencentes a esse plano.

Podemos dizer, também, que a parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano eqüidistantes de uma reta fixa e de um ponto fixo pertencentes a esse mesmo plano.

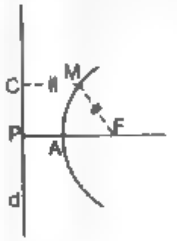


FIG. 122

O ponto fixo chama-se *foco* da parábola; a reta fixa diz-se *diretriz* da parábola.

Denomina-se *parâmetro* da parábola a distância do foco à diretriz.

Raio vetor de um ponto da parábola é o segmento de reta que une esse ponto ao foco.

Sejam o ponto F e a reta d, respectivamente o foco e a diretriz de uma parábola (fig. 122).

Tracemos por F uma perpendicular à reta d e seja P o ponto de intersecção dessa reta com d.

O ponto A, ponto médio de PF, pertence à curva, pois dista igualmente de F e d. Como todos os demais pontos da parábola são simétricos em relação à reta PF, então PF é um eixo de simetria da curva, denominado *eixo* da parábola, e o ponto A da curva que também pertence ao seu eixo é o *vértice* da parábola. A parábola não tem centro, pois admite um único eixo.

É fácil de concluir que os pontos da parábola pertencem ao semiplano de origem d, ao qual pertença F. E que o foco não pode pertencer à diretriz, pois nesse caso a parábola se reduziria a uma reta.

16. Traçado da parábola. De acordo com a definição de parábola podemos apresentar duas maneiras de efetuar o seu traçado.

1.º) Traçado da parábola por *movimento contínuo*.

2.º) Traçado da parábola por *pontos*.

1.º) Por movimento contínuo: Dadas a diretriz d e o foco F de uma parábola façamos coincidir a aresta de uma régua com d e deslisar sobre essa aresta da régua um cateto de um esquadro. Se tivermos fixado as extremidades de um fio, no vértice do esquadro, que não desliza sobre a régua e no foco F respectivamente, ao estendermos esse fio com uma ponta de lápis, temos que, à medida que o esquadro desliza sobre a régua, a ponta do lápis descreverá um arco de parábola.

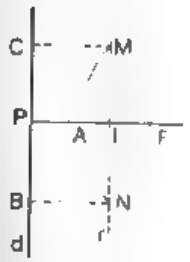


FIG. 123

2.º) Por pontos: Sejam dadas a diretriz d e o foco F de uma parábola (fig. 123).

Tracemos a perpendicular à reta d passando por F, e seja P a intersecção dessas retas. Tomemos uma reta r paralela a d e seja I a intersecção de r com PF. Com centro em F e raio igual a PI tracemos um arco de circunferência que intercepta r nos pontos M e N.

Os pontos M e N pertencem à parábola porque:

$\overline{MF} = \overline{NF} = \overline{PI}$ (raios de uma mesma circunferência).

$MC = \overline{BN} = \overline{PI}$ (paralelas compreendidas entre paralelas) e portanto, distam igualmente de F e d.

Repetindo-se o que foi feito para outras retas r paralelas à diretriz d, obteremos outros pares de pontos M e N pertencentes à parábola.

Unindo esses pontos obtidos descreveremos a parábola.

Para que se possam obter os pontos M e N é necessário que as paralelas traçadas interceptem pontos Q da reta PF à direita do ponto médio de PF, ou seja, à direita do vértice A.

Observações: A parábola é uma curva convexa.

Um ponto M do espaço é *interior*, *pertence* ou é *exterior* à parábola conforme sua distância ao foco seja menor, igual ou maior do que sua distância à diretriz.

17. Propriedades relativas à parábola. A parábola pode ser considerada como uma elipse em que um vértice e o foco mais próximo se conservam fixos e o outro foco tende para o infinito. Isto porque se considerarmos uma elipse de focos F' e F e vértices A' e A, e uma parábola cujo vértice coincide com A' e o foco com F', quando o foco F se afastar de F' se aproximando do infinito, o círculo diretor do foco F da elipse tende para a diretriz da parábola e o círculo principal da elipse tende para a tangente à parábola no seu vértice A'.

Dessa forma, podemos estender as conclusões relativas à elipse ao caso da parábola.

Assim poderemos enunciar os seguintes teoremas, que nada mais serão do que corolários de outros teoremas que são relativos à elipse.

Primeiro teorema. *A tangente à parábola em um ponto é a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor do ponto com a perpendicular traçada por esse ponto à diretriz.*

Segundo teorema. *O lugar geométrico dos pontos simétricos do foco da parábola em relação às tangentes dos pontos da parábola é a diretriz da parábola.*

Terceiro teorema. *O lugar geométrico das projeções do foco da parábola sobre as tangentes aos seus pontos, é a tangente à parábola no seu vértice.*

AS SECÇÕES DETERMINADAS POR UM PLANO NUMA SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO

18. Preliminares. Vimos, no quadro apresentado (n.º 1) no início do estudo dessa unidade, as diferentes espécies de secções determinadas por um plano sobre uma superfície cônica. Observamos também, que as várias secções se reduziam a três curvas chamadas elipse, hipérbole e parábola, as quais, logo a seguir, estudamos.

Enunciaremos agora o teorema que prova que essas três espécies de secções que acabamos de citar coincidem respectivamente com as três curvas estudadas.

19. Teorema de Dandelin. A secção determinada pela intersecção de uma superfície cônica de revolução com um plano é:

1.º) uma *elipse*, quando o plano intercepta todas as geratrizes da superfície cônica sobre uma mesma folha dessa superfície ($\beta > \alpha$);

2.º) uma *hipérbole*, quando o plano intercepta as duas folhas da superfície cônica ($\beta < \alpha$);

3.º) uma *parábola*, quando o plano é paralelo a uma geratriz da superfície cônica ($\beta = \alpha$).

20. Observação. A demonstração desse teorema deixa de ser apresentada, por ser laboriosa e por ser quase impossível de ser bem realizada, nas condições atuais, principalmente.

TRIGONOMETRIA

(Segundo Ano)

CAPÍTULO I

Noções sobre vetores

1. Grandezas escalares e vetoriais. As grandezas com as quais devemos lidar podem ser classificadas em: *escalares* e *vetoriais*.

Uma grandeza diz-se *escalar* quando pode ser definida independentemente da noção de direção. Exemplos:

Comprimento, volume, massa, densidade, temperatura . . .

Elas são definidas por um número relativo que indica a relação entre elas e as suas unidades de medida.

Uma grandeza diz-se *vetorial*, quando sua definição não pode prescindir do conceito de direção. Exemplos:

Velocidade, aceleração, força . . .

Para estudar as grandezas vetoriais, precisamos de um novo ente matemático que possibilite a representação dessas grandezas.

Esses novos elementos denominados vetores serão estudados adiante.

2. Reta orientada; eixo. Chama-se *reta orientada* a uma reta na qual se escolhe um sentido positivo de percurso para um móvel que nela se desloque.

O sentido de percurso contrário ao escolhido é o *sentido negativo*.

Indicamos geralmente o sentido positivo com uma reta. Assim, na figura 1, o sentido positivo é o sentido de percurso de A para B.

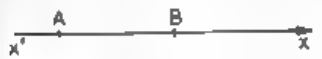


FIG. 1

FIG. 2

Se sobre a reta orientada $x'x$ (fig. 2), marcarmos um ponto arbitrário 0, chamado origem, e adotarmos uma unidade de comprimento u, diremos que temos um eixo.

Usualmente, dizemos que um eixo é uma reta orientada.

3. Segmento de reta orientado. Se tomarmos sobre um eixo $x'x$ dois pontos A e B (fig. 1) ficam formados dois segmentos de reta orientados: $\overline{AB}$ de origem A e extremidade B e $\overline{BA}$ de origem B e extremidade A.

Chama-se *sentido* de um segmento orientado $\overline{AB}$ ao sentido de percurso do móvel que se desloca da origem A para a extremidade B. O sentido de $\overline{AB}$ será *positivo* ou *negativo* conforme coincida ou não com o sentido do eixo $x'x$, suporte do segmento.

Denomina-se *módulo* ou valor absoluto de um segmento orientado $\overline{AB}$ a medida do segmento geométrico cujos extremos A e B coincidam com os extremos do segmento orientado.

Representamos assim: $|AB|$

Medida algébrica do segmento orientado $\overline{AB}$ é o número relativo de módulo igual ao do segmento $\overline{AB}$ e de sinal positivo ou negativo conforme o seja o sentido do segmento.

Representamos assim: (AB).

Assim, na figura 1 os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ têm sentidos contrários, o mesmo módulo $|AB|$ e medidas algébricas simétricas $(AB) = -(BA)$.

Dois segmentos orientados dizem-se *eqüipolentes*, quando um coincidir com o outro mediante um movimento de translação.

4. Vetores. Dizemos que todos os segmentos eqüipolentes a um certo segmento orientado $\overline{AB}$ correspondem a um determinado vetor, que pode ser representado arbitràriamente por um qualquer dêsses segmentos eqüipolentes entre si.

Um vetor AB de origem A e extremidade B é representado por $\vec{AB}$, $\vec{u}$ ou $B - A$. E, A e B nada mais são do que a origem e a extremidade de um dos segmentos orientados eqüipolentes, que podem representar o vetor.

Um vetor é caracterizado por 3 elementos: *direção*, *sentido* e *módulo*.

a) Direção — é a da reta suporte do segmento orientado que representa o vetor.

b) — Sentido — é o sentido desse segmento orientado.

c) Módulo — é o módulo desse mesmo segmento orientado.

5. Classificação dos vetores.

Tipos de vetores
- *Livres*
- *Localizados ou ligados*
  - a um ponto
  - a um eixo (deslizantes)

6. Vetores livres. Um vetor é *livre*, quando sua origem pode coincidir com um ponto qualquer do espaço, conservados, porém, seus atributos de módulo, sentido e direção do seu suporte.

Dois vetores livres dizem-se *eqüipolentes*, quando o forem os segmentos orientados que os representam.

Os vetores livres de mesma direção chamam-se *colineares*. Os seus suportes são paralelos ou coincidentes.

Três ou mais vetores livres dizem-se complanares, quando seus suportes são paralelos a um mesmo plano.

Dois vetores livres dizem-se simétricos ou opostos, quando têm a mesma direção, mesmo módulo, e sentidos contrários.

7. Vetores localizados. Um vetor cuja origem é um ponto fixo do espaço diz-se *vetor localizado* nesse ponto.

Um vetor diz-se *localizado em um eixo* ou *deslizante*, quando sua origem pode coincidir com um ponto qualquer do seu suporte.

Chama-se *valor algébrico* ou *medida algébrica* de um vetor deslizante ao número relativo que exprime o módulo do vetor precedido de sinal + ou −, conforme o sentido do vetor seja positivo ou negativo. Indicamos a medida algébrica ou valor algébrico de $\vec{AB}$ por $\overline{AB}$.

8. Vetor nulo; vetor unitário. Chama-se *vetor nulo* ao vetor cujo módulo é nulo e cujo suporte é indeterminado.

Denomina-se *vetor unitário* a todo vetor de módulo igual à unidade.

Chama-se *vetor unitário de um eixo* ao vetor unitário que tem por suporte esse eixo e cujo sentido é o sentido positivo do eixo.

Daqui em diante, salvo indicação em contrário, usaremos a palavra *vetor*, quando nos quizermos referir a um *vetor livre*.

9. Equipolências. Quando dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ forem eqüipolentes, indicaremos esse fato usando o sinal de igual. Assim: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Essas igualdades entre vetores denominam-se *eqüipolências*.

10. Resultante ou soma geométrica de dois vetores Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores (fig. 3). Tomemos um ponto 0 qualquer do espaço e tracemos por ele o vetor $\vec{u_1}$ eqüipolente a $\vec{u}$, e, pela extremidade M de u_1, tiremos o vetor $\vec{v_1}$ eqüipolente a $\vec{v}$. O vetor $\vec{S}$, de origem 0 igual à origem de $\vec{u_1}$, e de extremidade N igual à extremidade de $\vec{v_1}$, denomina-se *resultante* ou *soma* geométrica dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e escrevemos: $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$.

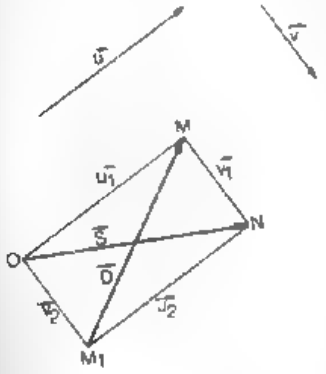


FIG. 3

É fácil de ver pela figura 3 que a resultante obtida independe da ordem em que se tomam os vetores eqüipolentes a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

De fato, se tomarmos primeiro o vetor $\overrightarrow{OM_1}$ eqüipolente a $\vec{v}$ e, pela extremidade M_1, tirarmos o vetor de origem M_1 eqüipolente a $\vec{u}$, sua extremidade, em virtude das propriedades dos paralelogramos, coincidirá com N.

O paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u_1}$, $\vec{v_1}$, $\vec{u_2}$ e $\vec{v_2}$ chama-se *paralelogramo da soma vetorial*. A resultante dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a diagonal do paralelogramo, e é fácil observar que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, que constitui a propriedade comutativa da adição de 2 vetores.

É fácil de ver também (fig. 3) que o módulo da resultante de dois vetores não colineares é menor do que a soma dos módulos desses vetores e maior do que a sua diferença.

11. Resultante de dois vetores colineares. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares a resultante $\vec{S}$ tem a mesma direção, o seu módulo será a soma ou a diferença dos módulos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme esses vetores tenham, respectivamente, mesmo sentido ou não, e o seu sentido será o do vetor de maior módulo.

Se os dois vetores colineares são opostos, sua resultante será um vetor nulo.

12. Resultante de mais de dois vetores. Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\vec{z}$ (fig. 4).

Tracemos por um ponto arbitrário do espaço 0 um vetor $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, depois pelo ponto A, tracemos $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, pelo ponto B um vetor $\overrightarrow{BC} = \vec{x}$ e assim sucessivamente. Ao vetor, que tem como origem 0, a do vetor eqüipolente ao primeiro vetor dado, e para extremidade D, a do vetor eqüipolente ao último vetor, chamamos de *resultante* dos vetores dados.

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{z}$$

O contorno poligonal $OABCD$ denomina-se *polígono dos vetores*.

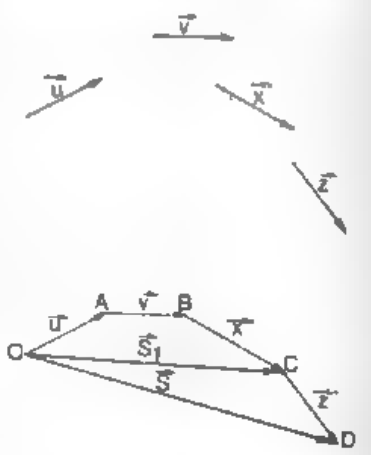


FIG. 4

Se a extremidade do vetor eqüipolente ao último vetor dado, coincidir com a origem do vetor, a resultante é nula.

E é fácil de concluir que o módulo da resultante de 3 ou mais vetores é menor ou igual à soma dos módulos desses vetores.

Será igual, se os vetores forem colineares e de mesmo sentido.

13. Teorema de Chasles(*). Dados três pontos A, B, C, sobre uma reta, temos sempre

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \qquad (I)$$

FIG. 5

Êsse teorema também é enunciado assim: *A soma de três vetores colineares, tais que a origem de cada um deles coincida com a extremidade do anterior, é nula.*

Quaisquer que sejam as posições desses pontos se verifica a (I).

Sejam ABC, (1.ª posição, fig. 5) nessa ordem. Temos:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Mas $\overline{AC} = -\overline{CA}$ $\therefore$ $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0$

ou $$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

A relação (I) ainda é verdadeira qualquer que seja a posição dos pontos.

Sejam A, C e B nessa ordem (2.ª posição, fig. 5). Temos:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \quad \therefore \quad \overline{AB} - \overline{AC} - \overline{CB} = 0$$

ou $$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

Esse *teorema de Chasles* pode ser generalizado para um número qualquer de pontos localizados em um eixo. E pode então ser enunciado assim: *Dados vários pontos* A, B, C, . . . , K, L *sobre uma reta, entre as medidas algébricas dos segmentos determinados por esses pontos existe sempre a relação*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0$$

enunciado que exprime o chamado *teorema de Moebius.*(**)

(*) M. Chasles, célebre geômetra e professor (1793-1880).

(**) A. F. Moebius, matemático, astrônomo e professor alemão (1790-1868)

CAPÍTULO II

Projeções

1. Projeção ortogonal de um ponto sobre um eixo. Chama-se *projeção ortogonal* de um ponto sobre um eixo o pé da perpendicular baixada do ponto sobre o eixo.

Assim, na figura 6 o ponto P é a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo $x'x$.

O segmento $\overline{MP}$ é a *projetante* do ponto M.

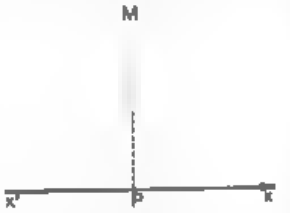


FIG. 6

2. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Denomina-se projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo a um vetor cuja origem e cuja extremidade são, respectivamente, as projeções ortogonais da origem e da extremidade do vetor dado sobre o eixo.

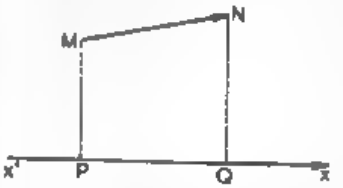


FIG. 7

Na figura 7 o vetor $\overrightarrow{PQ}$ localizado sobre o eixo $x'x$ é a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{MN}$ sobre o eixo $x'x$.

Se o vetor for perpendicular ao eixo, sua projeção é nula.

3. Projeções de vetores eqüipolentes.

a) As projeções de um mesmo vetor sobre eixos paralelos são vetores eqüipolentes.

b) A projeção de um vetor, paralelo a um eixo, sobre esse eixo é um vetor eqüipolente ao vetor dado.

c) As projeções de dois vetores eqüipolentes sobre um mesmo eixo são vetores eqüipolentes.

4. Teorema de Carnot(*).

> A medida algébrica da projeção da resultante de dois ou mais vetores sobre um eixo é igual à soma das medidas algébricas das projeções desses vetores sobre esse eixo.

Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$ e $\vec{w}$, por exemplo, e tracemos por um ponto O do espaço o vetor $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, pela extremidade B o vetor $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ e pela extremidade C o vetor $\overrightarrow{DE} = \vec{w}$. O vetor $\overrightarrow{AE}$ é a resultante desses vetores.

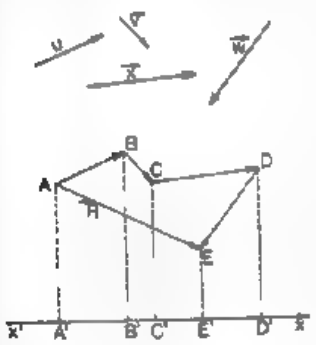


FIG. 8

Se projetarmos esse contorno poligonal de vetores sobre $x'x$ (fig. 8), as projeções serão os vetores $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{D'E'}$, $\overrightarrow{A'E'}$.

E, pelo *teorema de Chasles*, generalizado, temos:

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'E'} + \overrightarrow{E'A'} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'E'} = -\overrightarrow{E'A'} = \overrightarrow{A'E'}$$

E esta última expressão justifica o enunciado do *teorema de Carnot*.

5. Valor da projeção de um vetor sobre um eixo. A medida algébrica da projeção de um vetor localizado em um eixo sobre outro eixo é igual ao produto da medida algébrica desse vetor pela medida algébrica da projeção do vetor unitário do primeiro eixo sobre o segundo.

(*) N. L. S. Carnot, célebre físico francês (1796-1832).

Sejam dois eixos $x'x$ e $y'y$, complanares, e seja o vetor $\overrightarrow{PQ}$ localizado sobre $x'x$, cujo vetor unitário é $\overrightarrow{AB}$ (fig. 9).

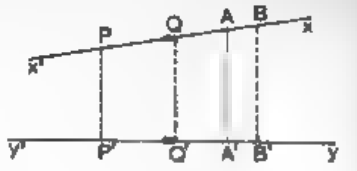


FIG. 9

Projetando $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{AB}$ sobre $y'y$, obtemos os vetores $\overrightarrow{P'Q'}$ e $\overrightarrow{A'B'}$.

Como um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais, temos:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{A'B'}}$$

Mas $AB = 1 \therefore \dfrac{\overline{PQ}}{1} = \dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{A'B'}}$

e $$\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \cdot \overline{A'B'}$$

o que confirma o que havíamos enunciado.

CAPÍTULO III

Relações Trigonométricas

1. Circunferência orientada. Uma circunferência diz-se orientada, quando escolhemos, convencionalmente, um sentido de percurso para um móvel que nela se desloque.

O sentido de percurso escolhido chama-se *sentido positivo* e o sentido contrário é o *sentido negativo*.

Em geral escolhe-se, como sentido positivo, o sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio.

Indica-se o sentido positivo por uma flexa curvilínea colocada na própria circunferência ou fora dela (fig. 10).

Chama-se *círculo orientado* ao círculo cuja circunferência é orientada.

2. Generalização da noção de arco. A noção de *arco* estudada na Geometria no Curso Ginasial, é aqui ampliada em dois aspectos.

1.º) *Os arcos passam a ser orientados.* Isto é, um arco $\overset{\frown}{AB}$ tem a sua medida dotada de sinal + ou −, conforme o sentido de percurso do móvel, indo de sua origem A para sua extremidade B seja, respectivamente, igual ou não ao sentido positivo da circunferência orientada, onde foi descrito. Assim, na figura 10, o arco $\overset{\frown}{AB}$ é positivo e o menor arco $\overset{\frown}{MN}$ é negativo.

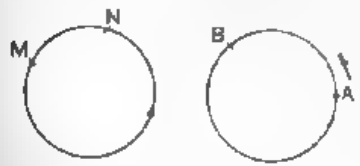


FIG. 10

2.º) *Passamos a considerar os arcos maiores do que* 360°. Isto é, passamos a considerar um arco qualquer $\overset{\frown}{AB}$ como sendo descrito por um móvel que, partindo de sua origem A, alcance sua extremidade B, percorrendo a circunferência, no mesmo sentido, uma ou mais vezes.

Concluímos dessa generalização que existe uma infinidade de arcos de origem A e extremidade B, mas de medidas diferentes. Dizemos então que um arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ admite uma infinidade de *determinações*.

3. Arcos côngruos. As várias *determinações de um* mesmo arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ são arcos *côngruos*.

Assim, chamamos de *arcos côngruos* aos arcos da mesma origem e mesma extremidade.

4. Expressão geral da medida algébrica de um arco. Chamamos de *medida algébrica* de um arco orientado a medida desse arco precedida de sinal + ou −.

Seja um móvel que descreve um arco orientado $\overset{\frown}{AB}$, no sentido positivo, e seja a radianos a medida algébrica do arco descrito pelo móvel, partindo de A, até encontrar, pela primeira vez, a extremidade B.

É a, pois, a menor determinação do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Continuando o móvel a percorrer a circunferência, sempre no mesmo sentido, as medidas algébricas dos arcos por ele descritos, cada vez que atingem novamente a extremidade B, são, respectivamente:

$$2\pi + a,\ 2 \times 2\pi + a,\ 3 \times 2\pi + a,\ \ldots$$

De um modo geral, sendo o arco geométrico $\overset{\frown}{AB} = a$, a expressão geral da medida algébrica do arco orientado AB será:

$$\boxed{2n\pi + a} \qquad \text{(II)}$$

onde o *número inteiro* n, positivo ou nulo, indica o número de voltas descritas pelo móvel.

Se o ponto móvel descreve o arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ no sentido negativo, partindo de A, ao encontrar pela primeira vez a extremidade B terá descrito um arco cuja medida algébrica é $-(2\pi - a) = -2\pi + a$.

Continuando o móvel a percorrer a circunferência, sempre no mesmo sentido, as medidas algébricas dos arcos por ele descritos, cada vez que atinge novamente a extremidade B, são, respectivamente:

$$-2\pi + (-2\pi + a) = -2 \times 2\pi + a, -3 \times 2\pi + a, \ldots$$

De um modo geral, a medida algébrica de um arco $\overset{\frown}{AB}$ descrita por um móvel que, deslocando-se no sentido negativo, dá n voltas, será:

$$-2(n+1)\pi + a \qquad \text{(III)}$$

As expressões (II) e (III) podem ser resumidas em uma expressão:

$$\boxed{2k\pi + a}$$

onde k é um número inteiro relativo, e que constitui a expressão geral de um arco orientado cuja menor determinação positiva é a.

5. Observação. Da expressão obtida no número anterior concluímos que dois *arcos côngruos* diferem de um número inteiro, positivo ou negativo, de circunferência.

E a expressão $2k\pi + a$ é a expressão geral dos arcos côngruos com a.

6. Generalização da noção de ângulo. Assim como generalizamos a noção de *arco* da Geometria, definindo-se arco orientado, podemos generalizar também a noção de *ângulo*.

Seja uma semi-reta Ox de origem O. Essa semi-reta pode girar no plano no sentido dos ponteiros de um relógio ou no sentido contrário.

Adotaremos como sentido positivo de percurso de Oz o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio; o outro sentido será o *sentido negativo* (fig. 11).

1.º) Quando a semi-reta Ox parte de uma posição Or, girando em torno de O até uma posição OS, terá descrito um ângulo de lados Or e Os. O lado Or denomina-se *origem* e o lado Os *extremidade*. (fig. 11).

Esse ângulo será *positivo* ou *negativo* conforme a semi-reta móvel tenha girado no sentido positivo ou negativo. O ângulo assim definido diz-se orientado.

E será de uma volta se partindo de Or, sempre no mesmo sentido, retornar a Or.

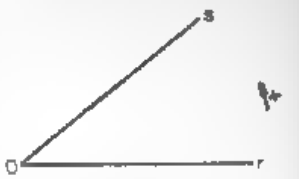


FIG. 11

2.º) Consideramos também os ângulos maiores do que 360°. Isto é, passamos a considerar um ângulo qualquer x como sendo o ângulo descrito por uma semi-reta móvel que, partindo da origem Or, alcance a extremidade Os (fig. 11), girando em torno de O, no mesmo sentido, de um ângulo orientado que, em valor absoluto, seja maior do que um ângulo de uma volta.

Concluímos dessa generalização que existe uma infinidade de ângulos de mesma origem e mesma extremidade, mas de medidas diferentes.

Dizemos, então, que um ângulo orientado x admite uma infinidade de *determinações*.

A medida algébrica de um ângulo orientado é a medida desse ângulo com sinal + ou −.

E ainda para a expressão geral da medida algébrica de um ângulo orientado, vale a relação do n.º 4,

$$x = 2k\pi + a$$

onde a é, em radianos, a menor determinação de x e k é um número inteiro relativo.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRETAS

7. Preliminares. A *Trigonometria* é a parte da Matemática cujo objetivo é a resolução dos triângulos por meio do cálculo. Isto é, seu objetivo é poder, pelo cálculo, já que os processos geométricos são falhos, determinar os elementos desconhecidos em função dos que são dados. Esse problema é de grande importância, pois é fundamental na navegação marítima ou aérea e, na Engenharia, na parte que se refere à Topografia, por exemplo.

A resolução dos triângulos pelo cálculo, muito mais rigorosa do que a solução gráfica, apresenta, todavia, dificuldades a vencer. A maior delas é relativa ao uso simultâneo dos lados, que são segmentos de reta, e dos ângulos, nas mesmas fórmulas.

Essa grande dificuldade desaparece com a substituição dos ângulos por *números* intimamente ligados a esses ângulos e denominados *funções trigonométricas*.

8. Círculo trigonométrico. Chama-se *círculo trigonométrico* ao círculo orientado de raio igual à unidade de comprimento.

Esclareçamos, para evitar futuras confusões por parte do aluno, que o raio pode ter qualquer valor, como, por exemplo, $R = 1$ cm ou $R = 2{,}45$ cm. Apenas esse valor do raio será considerado como unidade de comprimento para as medidas dos segmentos considerados no círculo trigonométrico.

Consideremos um círculo trigonométrico O e tracemos por O o eixo horizontal $x'x$ e o eixo vertical $y'y$ (fig. 12).

O ponto A intersecção do eixo $x'x$ com a circunferência O é o ponto a partir do qual serão marcados todos os arcos e chama-se *origem dos arcos*.

Esses dois eixos $x'x$ e $y'y$ dividem o círculo trigonométrico em 4 quadrantes que são designados por 1.º, 2.º, 3.º e 4.º, a partir da origem dos arcos e no sentido positivo de percurso, conforme indicamos na figura 12.

Um arco se diz do 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrantes, segundo sua extremidade pertença ao 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrantes, respectivamente.

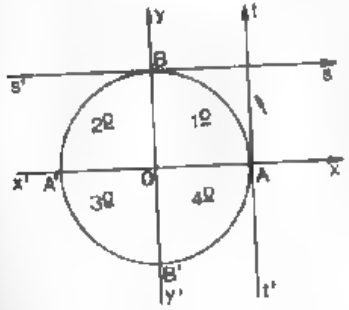


FIG. 12

Os pontos A, B, A' e B' pertencem simultaneamente a dois quadrantes consecutivos, isto é, cada um dos ângulos ou arcos de 0º, 90º, 180º e 270º são considerados como pertencendo a dois quadrantes consecutivos.

O ponto B extremidade do 1.º quadrante e origem do 2.º, denomina-se *origem dos complementos*.

Podemos considerar ainda em relação ao círculo trigonométrico os dois seguintes eixos (fig 12):

a) o eixo tt' tangente ao círculo trigonométrico na origem A dos arcos e cujo vetor unitário é eqüipolente a $\overrightarrow{OB}$;

b) o eixo $s's$ tangente ao círculo trigonométrico na origem B dos complementos e cujo vetor unitário é eqüipolente a $\overrightarrow{OA}$.

9. Funções circulares diretas. As *funções trigonométricas*, constituem, como já vimos, objeto fundamental da Trigonometria.

São em número de seis e são chamadas de: *seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante* e *co-secante*.

São representadas respectivamente, quando se referem a um mesmo arco x, por:

$$\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x,\ \sec x \text{ e } \operatorname{cosec} x$$

10. Seno de um arco.

Definição. Seno de um arco $\overset{\frown}{AM_1} = a$ (fig. 13) é a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{OQ}$ projeção do vetor $\overrightarrow{OM_1}$, cuja origem é o centro do círculo e cuja extremidade é a extremidade do arco, sobre o eixo $y'y$, denominado de *eixo dos senos*.

Pode-se considerar também como seno do arco $\overset{\frown}{AM_1} = a$ a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{PM_1}$ eqüipolente a $\overrightarrow{OQ}$.

Indica-se por sen a.

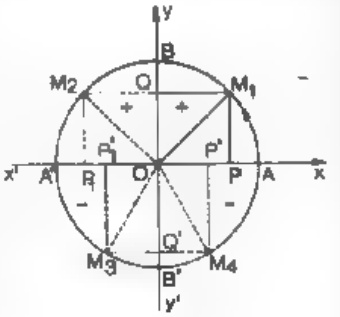


FIG. 13

É fácil de ver, observando a figura 13, que os senos dos arcos do 1.º e 2.º quadrantes são positivos e que os senos dos arcos do 3.º e 4.º quadrantes são negativos, pois as medidas algébricas das projeções sobre

o eixo dos senos é positiva nos dois primeiros quadrantes e negativa nos dois últimos.

Como a medida algébrica de um vetor é um número relativo, então o seno é um número relativo.

É fácil de ver, também, que dois arcos côngruos têm o mesmo seno.

VARIAÇÃO DO SENO. Fazendo um arco $\overset{\frown}{AM}$ crescer de 0° a 360°, isto é, fazendo um ponto móvel percorrer, partindo de A, toda a circunferência, vejamos como variará o seno desse arco $\overset{\frown}{AM}$ (fig. 13).

Quando o ponto M estiver em A, o seno é nulo; à medida que M se for deslocando de A para B, o seno vai crescendo até que, quando M estiver em B, o seno será $+1$, pois é a medida do vetor unitário $\overrightarrow{OB}$.

Quando o ponto M se deslocar sobre a circunferência, de B para A', isto é, de 90° a 180°, o ponto Q se deslocará sobre o eixo dos senos de B para 0; ou seja, quando o arco cresce de 90° a 180°, o seno decresce de 1 até zero.

Quando o ponto M se deslocar sobre a circunferência de A' até B', o ponto Q se deslocará de 0 até B', isto é, quando o arco cresce de 180° a 270°, o seno decresce de zero a -1 (medida algébrica de $\overrightarrow{OB'}$).

Quando, finalmente, o ponto M se deslocar sobre a circunferência de B' para A, o ponto Q se deslocará sobre o eixo dos senos de B até 0. Isto é, quando o arco crescer de 270° a 360°, o seno crescerá de -1 até zero.

Podemos resumir a variação do seno no seguinte quadro:

Variação arco . . .	0°↗90°↗180°↗270°↗360°			
Variação seno . . .	0↗+1↘0↘−1↗0			
Quadrantes . . .	1.°	2.°	3.°	4.°
Sinal do seno . . .	+	+	−	−

OBSERVAÇÃO. Pelo quadro acima, vemos que -1 e $+1$ são os valores mínimo e máximo, respectivamente, do seno.

O seno variando entre -1 e 1, não pode, pois, haver, em valor absoluto, seno maior do que a unidade.

11. Co-secante. O valor inverso do seno, $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ denomina-se *co-secante*, e representa-se por $\operatorname{cosec} x$. Logo $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

A função circular direta $y = \operatorname{cosec} x$ é pouco empregada, e pode sempre ser substituída por $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

12. Co-seno de um arco.

DEFINIÇÃO. Co-seno de um arco $\overset{\frown}{AM_1} = a$ (fig. 14) é a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{OP}$, projeção do vetor $\overrightarrow{OM_1}$, cuja origem é a do centro do círculo trigonométrico e cuja extremidade é a extremidade do arco, sobre o eixo $x'x$, denominado *eixo dos co-senos*.

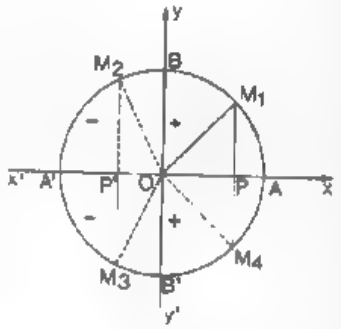


FIG. 14

Representa-se assim: $\cos a$.

É fácil de ver, observando a figura 14, que os co-senos dos arcos do 1.° e 4.° quadrantes são positivos e os do 2.° e 3.° quadrantes são negativos.

VARIAÇÃO DO CO-SENO. Procedendo de modo análogo ao que fizemos no estudo da variação do seno, podemos resumir o estudo da variação do co-seno, quando o arco AM crescer de 0° a 360°, no seguinte quadro:

Variação do arco .	0°↗90°↗180°↗270°↗360°			
Variação co-seno .	+1↘0↘−1↗0↗+1			
Quadrantes . : . . .	1.°	2.°	3.°	4.°
Sinal do co-seno .	+	−	−	+

OBSERVAÇÕES:

1.ª) O co-seno, sendo a medida algébrica de um vetor, é um número relativo.

2.ª) Dois arcos côngruos têm o mesmo co-seno.

3.ª) O co-seno, assim como o seno, varia de -1 a $+1$. O valor absoluto de um co-seno não pode ser maior do que a unidade.

13. Secante. O valor inverso do co-seno, $\frac{1}{\cos x}$ chama-se *secante* e representa-se por $\sec x$. Logo $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

A função $y = \sec x$ é pouco usada e pode sempre ser substituída por $\frac{1}{\cos x}$.

14. Tangente de um arco.

DEFINIÇÃO. Chama-se tangente de um arco $\overset{\frown}{AM_1} = a$ (fig. 15) a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{AT}$, localizado sobre o eixo $t't$, cuja origem é a origem A dos arcos e cuja extremidade é a intersecção do eixo $t't$ com o suporte do raio que passa pela extremidade do arco.

O eixo $t't$ chama-se *eixo das tangentes*.

É fácil de observar (fig. 15) que: as tangentes dos arcos do 1.º e 3.º quadrantes são positivos, pois, nesses casos, o vetor $\overrightarrow{AT}$ tem sua medida algébrica positiva; e as tangentes dos arcos do 2.º e 4.º quadrantes são negativas.

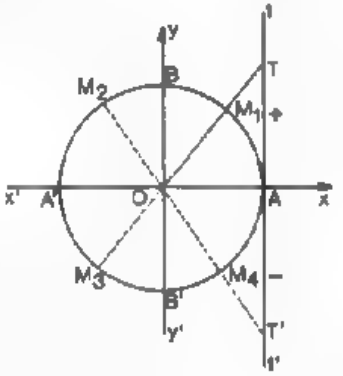


FIG. 15

VARIAÇÃO DA TANGENTE.

Fazendo um arco $\overset{\frown}{AM}$ crescer de 0° a 360°, vejamos como variará a tangente.

Quando o ponto M estiver na origem A, o ponto T também aí estará, e a medida algébrica de $\overrightarrow{AT}$ é nula, isto é, em 0° a tangente é nula. À medida que o ponto se deslocar sobre a circunferência de A para B, a tangente vai crescendo, pois o ponto T se irá deslocando sobre o eixo das tangentes, no sentido positivo desse eixo.

Ao aproximar-se M, sempre mais, de B a tangente cresce, sempre mais, indefinidamente.

Se chamarmos de p um arco variável que tende a zero e de $+\infty$ uma variável que cresce indefinidamente, podemos escrever:

$$\operatorname{tg}(90 - p) = +\infty$$

Quando o ponto M atingir B, a reta suporte de OM é paralela ao eixo $t't$, não o interceptando, portanto. Não haverá ponto T de intersecção; então, a tangente não existe para 90°.

Logo que o ponto M ultrapassa B, a tangente torna-se bruscamente negativa, porém ainda infinitamente grande em seu valor absoluto. E, podemos também escrever:

$$\operatorname{tg}(90° + p) = -\infty$$

À medida que o ponto M se deslocar sobre a circunferência no 2.º quadrante, a tangente vai crescendo até zero, o que se dará quando o ponto M atingir A'. Temos:

$$\operatorname{tg} 180° = 0$$

Quando o ponto M se deslocar sobre a circunferência, de A' até B', o ponto T percorrerá, sobre o eixo das tangentes, o mesmo percurso percorrido na variação do 1.º quadrante. Ou seja, a tangente assume em grandeza e sinal, e na mesma ordem, todos os valores do 1.º quadrante.

Quando, finalmente, o ponto M se deslocar sobre a circunferência de B' até A, a tangente assumirá em grandeza e sinal, e na mesma ordem, todos os valores do 2.º quadrante.

Indicaremos essa variação no quadro seguinte:

Variação do arco...	$0° \nearrow 90° - p$	$90° + p \nearrow 180° \nearrow 270° - p$	$270° + p \nearrow 360°$
Variação tangente	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$
Quadrantes	1.º	2.º 3.º	4.º
Sinal da tangente	+	− +	−

Observações.

1.ª) A tangente é sempre crescente com o arco, excluídos os arcos de 90° e 270°, onde os valores da tangente sofrem uma *descontinuidade*.

2.ª) A tangente sendo a medida algébrica de um vetor é um número relativo.

3.ª) Dois arcos côngruos têm a mesma tangente.

4.ª) A tangente varia de $-\infty$ a $+\infty$. Então qualquer número real relativo pode representar uma tangente.

15. Co-tangente de um arco.

DEFINIÇÃO. Chama-se *co-tangente* de um arco $\widehat{AM_1} = a$ (fig. 16) a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{BS}$, localizado sobre o eixo $s's$, cuja origem é a origem B dos complementos e cuja extremidade é a intersecção S do eixo $s's$ com o suporte do raio que passa pela extremidade do arco.

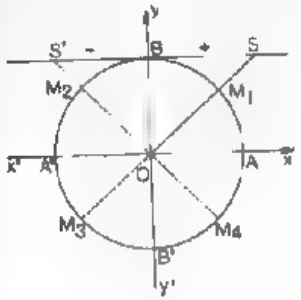


FIG. 16

O eixo $s's$ denomina-se *eixo das co-tangentes*. Indica-se por $\operatorname{cotg} x$ ou $\cot x$.

É fácil de observar, na figura 16, que: as co-tangentes dos arcos do 1.º e 3.º quadrantes são positivas, pois a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{BS}$, para esses quadrantes, é positiva; e as co-tangentes dos arcos do 2.º e 4.º quadrantes são negativas.

VARIAÇÃO DA CO-TANGENTE. Procedendo de modo análogo ao que fizemos no estudo da variação da tangente, podemos dizer que a função circular $y = \cot x$ não existe para 0° e 180° e podemos também escrever o seguinte quadro de variação:

Variação do arco ..	$+p \nearrow 90° \nearrow 180°-p$	$180°+p \nearrow 270° \nearrow 360°-p$
Variação co-tangente	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$
Quadrantes.....	1.º 2.º	3.º 4.º
Sinal co-tangente	+ −	+ −

Observações:

1.ª) A co-tangente decresce sempre com o arco, excluídos os valores de 0° e 180°, onde os valores da co-tangente sofrem uma *descontinuidade*.

2.ª) A co-tangente sendo a medida algébrica de um vetor é um número relativo.

3.ª) Dois arcos côngruos têm a mesma co-tangente.

4.ª) A co-tangente varia de $-\infty$ a $+\infty$. Portanto, qualquer número relativo pode representar uma co-tangente.

16. Resumo da variação e do sinal das funções circulares. Resumiremos no seguinte quadro:

FUNÇÕES	1.º QUADRANTE		2.º QUADRANTE	
	VARIAÇÃO	SINAL	VARIAÇÃO	SINAL
Seno..	$0 \nearrow +1$	+	$+1 \searrow 0$	+
Co-seno . ..	$+1 \searrow 0$	+	$0 \searrow -1$	−
Tangente.	$0 \nearrow +\infty$	+	$-\infty \nearrow 0$	−
Co-tangente	$+\infty \searrow 0$	+	$0 \searrow -\infty$	−
Secante.	$+1 \nearrow +\infty$	+	$-\infty \nearrow -1$	−
Co-secante ...	$+\infty \searrow +1$	+	$+1 \nearrow +\infty$	+

FUNÇÕES	3.º QUADRANTE		4.º QUADRANTE	
	VARIAÇÃO	SINAL	VARIAÇÃO	SINAL
Seno..	$0 \searrow -1$	−	$-1 \nearrow 0$	−
Co-seno	$-1 \nearrow 0$	−	$0 \nearrow +1$	+
Tangente..... .	$0 \nearrow +\infty$	+	$-\infty \nearrow 0$	−
Co-tangente.....	$+\infty \searrow 0$	+	$0 \searrow -\infty$	−
Secante...	$-1 \searrow -\infty$	−	$+\infty \searrow +1$	+
Co-secante.....	$-\infty \nearrow -1$	−	$-1 \searrow -\infty$	−

Observando este quadro, concluímos que:

1) o *seno* e o *co-seno* só existem para valores de -1 até 1; a *secante* e a *co-secante* só existem para valores exteriores ao intervalo -1 e $+1$; a *tangente* e a *co-tangente* podem ser representadas por qualquer número real;

2) a tangente é positiva nos quadrantes em que o seno e o co-seno têm o mesmo sinal;

3) as funções que constituem, duas a duas, os grupos

a) seno e co-secante
b) co-seno e secante
c) tangente e co-tangente

têm o mesmo sinal e cada função de um grupo cresce ou decresce, quando a outra função, do mesmo grupo, decresce ou cresce, respectivamente. E todas são periódicas.

RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM MESMO ARCO

17. Preliminares. Seja um círculo trigonométrico de centro O (fig. 17) e representemos as funções trigonométricas de um arco $\overset{\frown}{AM} = x$.

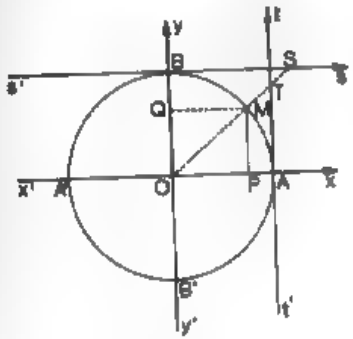


FIG. 17

Pelo estudo já feito, sobre as funções circulares, podemos escrever:

$$\operatorname{sen} x = \overline{PM} \qquad \operatorname{cosec} x = \overline{OS}$$
$$\cos x = \overline{OP} \qquad \sec x = \overline{OT}$$
$$\operatorname{tg} x = \overline{AT} \qquad \operatorname{cot} x = \overline{BS}$$

Entre as funções trigonométricas de um mesmo arco $\overset{\frown}{AM} = x$ existem relações básicas, úteis nas aplicações, e que possibilitam, conhecida uma das linhas trigonométricas, calcular o valor das demais.

Essas relações são em número de cinco e denominam-se *relações ou fórmulas fundamentais.*

Essas relações são distintas, isto é, entre as seis linhas trigonométricas de um mesmo arco existem cinco, e somente cinco, relações independentes.

Assim, qualquer uma dessas *relações* não se pode deduzir, empregando operações algébricas, das outras quatro; e, qualquer outra relação que apareça, além das cinco *fórmulas fundamentais*, é uma conseqüência delas e a chamamos *relação derivada.*

18. Relações fundamentais.

1.ª) Do triângulo retângulo OPM (fig. 17), temos:

$$\overline{OM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2$$

mas, $\overline{OM}$, raio do círculo trigonométrico, é igual a 1,

$$MP = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \overline{OP} = \cos x,$$

então

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

2.ª) Da semelhança dos triângulos OMP e OTA (fig. 71), temos:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}}$$

Mas, $\overline{OA} = 1$, $\overline{MP} = \operatorname{sen} x$, $\overline{OP} = \cos x$ e $\overline{AT} = \operatorname{tg} x$

$$\therefore \boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

Esta relação também se verifica em sinal, pois já vimos que a tangente de um arco é positiva ou não, conforme o seno e o co-seno desse arco sejam de mesmo sinal ou não, respectivamente.

3.ª) Da semelhança dos triângulos OQM e OBS (fig. 17), temos:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{OQ}}$$

Mas, $\overline{OB} = 1$, $\overline{QM} = \cos x$, $\overline{OQ} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{BS} = \operatorname{cot} x$

$$\therefore \operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ ou } \boxed{\operatorname{cot} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

Esta relação também se verifica em sinal, pois já vimos que a $\operatorname{cot} x$ tem o mesmo sinal da $\operatorname{tg} x$.

4.ª) Da semelhança dos triângulos OAT e OPM (fig. 17), temos:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

mas, $\overline{OM} = \overline{OA} = 1$, $\overline{OP} = \cos x$ e $\overline{OT} = \sec x$

$$\therefore \boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Esta relação também se verifica em sinal, pois já vimos que $\sec x$ e $\cos x$ têm o mesmo sinal.

5.º) Da semelhança dos triângulos OBS e OQM (fig. 22), temos:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{OQ}$$

mas, $\overline{OB} = \overline{OM} = 1$, $\overline{OQ} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{OS} = \operatorname{cosec} x$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

Esta relação também se verifica em sinal, pois já vimos que $\operatorname{cosec} x$ e $\operatorname{sen} x$ têm o mesmo sinal.

19. Relações derivadas. Das várias relações derivadas, duas são de grande importância no cálculo trigonométrico, inclusive para a determinação dos valores das linhas trigonométricas, em função de uma delas.

Vejamos essas duas relações:

Utilizando as relações fundamentais, temos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad \boxed{\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x} \qquad \text{(IV)}$$

e,

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x} \qquad \text{(V)}$$

20. Expressões das funções trigonométricas de um arco em função do seno desse arco. Da 1.ª relação fundamental temos:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \quad \therefore \quad \cos x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Substituindo o valor de $\cos x$ nas outras relações fundamentais, temos as expressões pedidas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} \qquad \operatorname{cot} x = \frac{\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

21. Observação. De modo análogo, usando as relações fundamentais e as derivadas, podemos facilmente deduzir as funções circulares diretas de um arco, em função de uma delas.

22. Exercícios resolvidos.

1) Sendo $\cos x = -\frac{3}{5}$, e x do 3.º quadrante, calcular as demais funções circulares do arco x.

Temos: $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad \operatorname{cot} x = \frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

2) Calcular o valor da expressão $y = \frac{\sec^2 x - \sec x \,.\, \operatorname{cosec} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$ para $\cos x = \frac{1}{4}$ e x um arco do 4.º quadrante.

Temos que:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 4 \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

mas, $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \therefore \quad \operatorname{cosec} x = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

e $$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{4} + \frac{-\sqrt{15}}{4} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Substituindo, temos finalmente $y = 16$.

3) Verificar a identidade

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \,.\, \operatorname{cosec} x$$

Desenvolvendo os dois membros, vem

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

E é fácil de ver que o primeiro membro

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\ \cos x}=\frac{1}{\operatorname{sen} x\ \cos x}$$

é idêntico ao segundo.

4) Transformar a relação

$$\operatorname{cosec} x-\frac{\cos x\ \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}+\operatorname{cotg} x\ \operatorname{sen} x$$

em uma outra, função do $\operatorname{sen} x$

Temos: $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{\cos x\ .\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\ .\ \operatorname{sen} x=$

$$=\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+\cos x=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

5) Verificar a identidade $\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ para x positivo.

(Escola Naval – 1938).

Procuremos desenvolver o 1.º membro a fim de transformá-lo no segundo.

Fazendo $\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}=y$ (α)

$$\operatorname{sen} y=\sqrt{\frac{x}{x+a}}\ \therefore\ \cos y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-\frac{x}{x+a}}=\sqrt{\frac{a}{x+a}}$$

E $\operatorname{tg} y=\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}\times\dfrac{x+a}{a}=\sqrt{\dfrac{x}{a}}\ \therefore\ y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ (β)

Substituindo (α) e (β) na igualdade dada, temos $y=y$. Está, pois, verificada a identidade.

6) Supondo que a é o ângulo do 2.º quadrante que satisfaz à igualdade $\operatorname{tg} a=-\sqrt{2}$, é possível calcular $\operatorname{cosec} a$?

(Esc. N. Química – 1945).

Sim, é possível. De fato,

$$\operatorname{cosec} a=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$$

Mas, a co-secante no 2.º quadrante é positiva, logo

$$\operatorname{cosec} a=+\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Como $\sqrt{3}>\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>1$ e, portanto, é possível calcular $\operatorname{cosec} a$.

23. Exercícios para resolver.

1) Sabendo que $\operatorname{sen} x=\dfrac{3}{5}$ e x é um arco do 2.º quadrante, calcule as demais linhas desse arco.

2) Sabendo que $\operatorname{tg} x=\dfrac{5}{12}$ e x é um arco do 3.º quadrante, calcule as outras linhas trigonométricas desse arco.

3) Calcular o valor da expressão:

$$25\operatorname{sen}^2 x-9\operatorname{tg}^2 x$$

sabendo que $\operatorname{cosec} x=\dfrac{5}{4}$ e x é do 1.º quadrante.

4) Calcular o valor da expressão:

$$\operatorname{sen}^4 x+2\cos^2 x-\cos^4 x+\operatorname{tg} x$$

para $\operatorname{cotg} x=-1$ e x um arco do 4.º quadrante.

5) Calcule $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,cos}\dfrac{1}{5}\right)$ sendo $\operatorname{arc\,cos}\dfrac{1}{5}$ do 4.º quadrante.

(E. N. E. – 1958).

6) Responda aos itens abaixo:

a) Cite um arco côngruo a $\dfrac{\pi}{10}$ módulo 2π.

b) Se $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, qual a variação da $\operatorname{cot} x$?

c) Se $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, qual a variação da $\sec x$?

d) Dê a expressão geral dos arcos que satisfazem à equação $\cos x=0$.

(Esc. Naval – 1952).

7) Calcule o valor de x que verifica, simultaneamente, as igualdades $\operatorname{sen} a=x+2$ e $\cos a=\sqrt{1-x^2}$

UEG – 72).

8) a) Quais os valores de x para os quais a função $y=\operatorname{tg} x$ é descontínua?

b) Sendo $\sec\dfrac{\pi}{3}=2$, calcular $\operatorname{sen} 30°$, partindo desse dado.

c) Dado $\log\cos a=\bar{1},870\,900$, calcular $\log\sec a$.

d) Verificar a identidade $\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x\ .\ \cos^2 x=1$.

(E. Aer. – 1955).

9) Calcule o valor de x que satisfaz, simultaneamente, às igualdades $\operatorname{sen} a = \frac{6x+2}{5}$ e $\operatorname{cossec} a = \frac{5}{3x+2}$

(Engenharia – 66 – GB e UFRJ – 70 – GB).

10) Verificar as identidades:

a) $\sec^2 x \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

b) $(1 + \operatorname{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$

c) $\sec x \operatorname{sen} x - \operatorname{cossec} x \cos x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

d) $(\sec x \operatorname{sen} x + \operatorname{cossec} x \cos x)(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x) = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x$

e) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

f) $\cos^4 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x = \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x$

g) $\frac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$

h) $\frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec}^2 x - 1} - \operatorname{sen} x \sec x = 0$

i) $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2 + (1 - \cos x)^2 - (\sec x - 1)^2 = 0$

j) $\frac{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x} = \operatorname{cotg}^3 x$

k) $\operatorname{arc\,sen} \frac{a-1}{a+1} = \operatorname{arc\,cos} \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$

11) Calcule a função trigonométrica equivalente a $\frac{\sec x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x + \cos x}$

(Engenharia – Gal. Roberto Lisboa – 1972 e E. N. Engenharia – 1957).

12) Calcular $\operatorname{sen}^2 a$ e $\cos^2 a$ sabendo-se que $\operatorname{tg} a = 1 + \sqrt{2}$

(Esc. N. Química – 1946).

13) Sabe-se que a secante de um arco do 2.º quadrante é -2. Calcular o seno e a tangente desse arco. (Esc. Aeronáutica – 1946).

14) Calcule os valores de m para os quais os ângulos da forma $m - \frac{3\pi}{2}$ têm tangente.

(E. N. Engenharia – 1958).

RESPOSTAS:

1) $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, etc. 2) $\operatorname{sen} x = -\frac{5}{13}$, $\cos x = -\frac{12}{13}$, etc.

3) zero 4) 0 5) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

6) a) $\frac{21\pi}{10}$ b) $+\infty$ e zero c) $-\infty$ e -1 d) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

7) -1

8) a) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0,120 100

9) $\sec x$ 10) b) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right)^2 = 2$ 11) $\operatorname{tg} x$

12) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ e $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ 13) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\sqrt{3}$ 14) $m \neq k\pi$

PROBLEMA GERAL DA REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

24. Preliminares. Antes de tratar propriamente do problema da redução ao 1.º quadrante, estudemos, primeiramente, as relações entre as linhas trigonométricas dos arcos *complementares, suplementares, simétricos* (replementares) e arcos que *diferem de uma semicircunferência.*

Bastará determinar as relações existentes entre o seno, co-seno e tangente desses arcos, pois, de acordo com o que já estudamos sobre as linhas trigonométricas, as igualdades entre os senos, co-senos e tangentes acarretam, respectivamente, as igualdades entre as co-secantes, secantes e co-tangentes.

25. Relações entre os dois arcos simétricos. Sejam dois arcos simétricos

$$\overset{\frown}{AM} = a \text{ e } \overset{\frown}{AM'} = -a \text{ (fig. 18)}$$

Como os pontos M e M' são simétricos em relação ao diâmetro $A'A$, então $\overline{MM'}$ é perpendicular a esse diâmetro e é por ele dividida em duas partes iguais: $\overline{MP} = \overline{M'P}$.

É fácil de ver então:

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$$
$$\cos(-a) = \cos a$$

E as tangentes também são simétricas, porque são as medidas algébricas dos vetores opostos $\vec{AT}$ e $\vec{AT'}$. Então

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$$

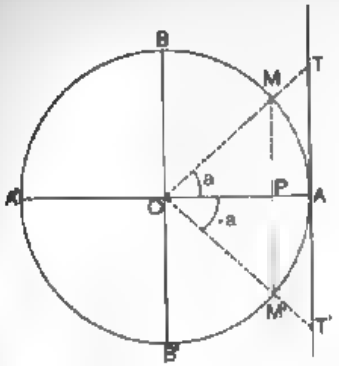


FIG. 18

Podemos então escrever, de acordo com o que vimos:

$$\text{sen}\,(-a) = -\text{sen}\,a$$
$$\cos(-a) = \cos a$$
$$\text{tg}\,(-a) = -\text{tg}\,a$$
$$\text{cosec}\,(-a) = -\text{cosec}\,a$$
$$\sec(-a) = \sec a$$
$$\text{cotg}\,(-a) = -\text{cotg}\,a$$

Notando que $2\pi - a$ e $-a$ são arcos côngruos podíamos escrever:

$$\text{sen}\,(2\pi - a) = -\text{sen}\,a \qquad \text{cosec}\,(2\pi - a) = -\text{cosec}\,a$$
$$\cos(2\pi - a) = \cos a \qquad \sec(2\pi - a) = \sec a$$
$$\text{tg}\,(2\pi - a) = -\text{tg}\,a \qquad \text{cotg}\,(2\pi - a) = -\text{cotg}\,a$$

26. Arcos suplementares. Sejam os arcos $\widehat{AM_1}$ e $\widehat{AM_2}$ suplementares (fig. 19).

Chamando de a a menor determinação de $\widehat{AM_1}$, $\pi - a$ será a menor determinação $\widehat{AM_2}$.

Se os dois arcos são suplementares suas extremidades M_1 e M_2 são tais que $\overline{M_1M_2}$ é paralelo ao diâmetro $A'A$.

Esses dois arcos têm o mesmo seno, medida algébrica do vetor $\widehat{OQ}$.

Como $\overline{P'P} = \overline{M_2M_1}$ e o diâmetro $B'B$ divide ao meio as cordas que lhe são perpendiculares, então $OP = -OP'$ e os co-senos dos dois arcos são simétricos. As tangentes AT e AT' também são simétricas, então:

$$\text{sen}\,(\pi - a) = \text{sen}\,a \qquad \text{cosec}\,(\pi - a) = \text{cosec}\,a$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos a \qquad \sec(\pi - a) = -\sec a$$
$$\text{tg}\,(\pi - a) = -\text{tg}\,a \qquad \text{cotg}\,(\pi - a) = -\text{cotg}\,a$$

27. Arcos que diferem de uma semicircunferência. Sejam dois arcos $\widehat{AM_1}$ e $\widehat{AM_2}$, que diferem de uma semicircunferência (fig. 20). Chamando de a a menor determinação de $\widehat{AM_1}$ temos que $\pi + a$ será a menor determinação de $\widehat{AM_2}$.

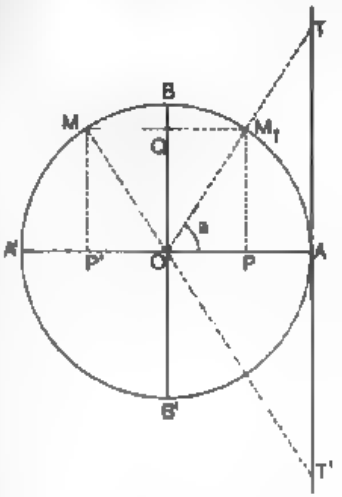


FIG. 19

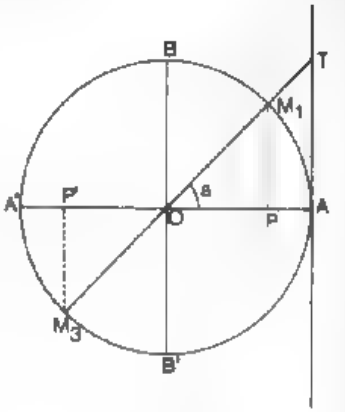


FIG. 20

Os triângulos retângulos OPM_1 e $OP'M_2$ são iguais, os senos e os co-senos desses arcos serão simétricos e a tangente $\overline{AT}$ é comum.

Logo, temos:

$$\text{sen}\,(\pi + a) = -\text{sen}\,a \qquad \text{cosec}\,(\pi + a) = -\text{cosec}\,a$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos a \qquad \sec(\pi + a) = -\sec a$$
$$\text{tg}\,(\pi + a) = \text{tg}\,a \qquad \text{cotg}\,(\pi + a) = \text{cotg}\,a$$

28. Arcos complementares. Sejam dois arcos complementares $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM'}$ (fig. 21).

Chamando de a a menor determinação de $\widehat{AM}$, $\frac{\pi}{2} - a$ será a menor determinação de $\widehat{AM'}$.

Os triângulos OPM e $\overline{OP'M'}$ são iguais por terem a hipotenusa e o ângulo agudo a igual.

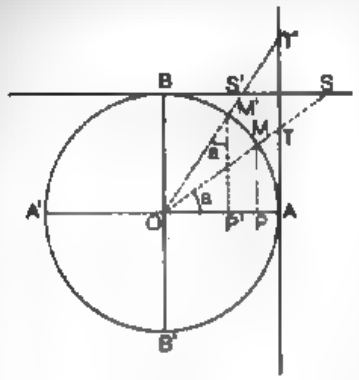


FIG. 21

Os triângulos OAT e OBS' são iguais, bem como os triângulos OAT' e OBS.

Como:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\overline{P'M'},\ \cos a=\overline{OP}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\overline{OP'},\ \operatorname{sen} a=\overline{PM}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\overline{AT},\ \operatorname{cotg} a=\overline{BS}$$

e os módulos de $\overline{P'M'}$, $\overline{OP'}$ e $\overline{AT'}$ são, respectivamente, iguais aos módulos de $\overline{OP}$, $\overline{PM}$ e $\overline{BS}$, então:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sec a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{sen} a \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{cosec} a$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{cotg} a \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{tg} a$$

29. Observação. Existe uma *regra prática* que permite determinar essas e outras relações entre as funções circulares de certos arcos. Podemos apresentá-la assim:

1.º) Se os arcos são da forma $k\pi \pm a$ (referência ao eixo horizontal) não muda a linha trigonométrica e o sinal da linha do arco a será o do quadrante onde estiver o arco da forma $k\pi \pm a$.

$\operatorname{sen}(\pi - a) = \operatorname{sen} a$ (positivo porque $\pi - a$ é do 2.º quadrante)

$\cos(2\pi - a) = \cos a$

$\operatorname{tg}(\pi + a) = \operatorname{tg} a \quad \operatorname{cotg}(\pi - a) = -\operatorname{cotg} a$

2.º) Se os arcos são da forma $k\pi + \frac{\pi}{2} \pm a$ (referência ao eixo vertical) muda a linha trigonométrica (de seno para coseno, tangente para co-tangente, etc.), e o sinal da linha trigonométrica do arco a será o do quadrante onde estiver o arco da forma $k\pi + \frac{\pi}{2} \pm a$. Exemplos:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \operatorname{sen} a \quad \left(\frac{\pi}{2}-a \text{ é do 1.º quadrante}\right)$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right) = \operatorname{cotg} . a$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right) = -\sec a$$

30. Redução ao primeiro quadrante. Reduzir um arco a ao 1.º quadrante é calcular um arco compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ rd, cujas linhas trigonométricas sejam, em *valor absoluto*, iguais às do arco a.

Se o arco a pertence ao 2.º quadrante, considera-se o seu suplemento $\pi - a$ e utilizam-se as fórmulas do n.º 26.

Se o arco a pertence ao 3.º quadrante, considera-se o arco $a - \pi$ que difere de a de uma semicircunferência, e utilizam-se as fórmulas do n.º 27.

Se o arco a pertence ao 4.º quadrante, considera-se o seu replemento $2\pi - a$ e utilizam-se as fórmulas do n.º 25.

Se, finalmente, o arco a é maior do que 2π, considera-se o arco côngruo de a menor do que 2π e recai-se em um dos casos anteriores.

31. Exemplos.

1.º) Reduzir ao 1.º quadrante o arco de $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

Considera-se o arco $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. E temos:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

As demais linhas são fáceis de calcular.

2.º) Reduzir ao 1.º quadrante o arco de 210°.

Considera-se o arco de $210° - 180° = 30°$. Temos:

$\operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° \quad \cos 210° = -\cos 30° \quad \operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30°$

3.º) Reduzir ao 1.º quadrante o arco de 320 grados.

Considera-se o arco de $400gr - 320gr = 80gr$. Temos:

$$\therefore \text{ sen } 320gr = -\text{sen } 80gr \quad \cos 320gr = \cos 80gr$$
$$\text{tg } 320gr = -\text{tg } 80gr$$

4.º) Reduzir ao 1.º quadrante o arco de 930°.

Toma-se o arco côngruo de 930° menor do que 360°, que é 210°, pois $930° = 2 \times 360° + 210°$

E procede-se como no 2.º exemplo:

$$\text{sen } 930° = \text{sen } 210° = -\text{sen } 30°$$
$$\cos 930° = \cos 210° = -\cos 30°$$
$$\text{tg } 930° = \text{tg } 210° = \text{tg } 30°$$

32. Exercícios resolvidos.

1) Calcular o valor numérico da expressão

$$y = \cos 4x + \text{sen } 2x + \text{tg } 2x - \sec 8x \quad \text{para } x = \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \; y = \cos 2\pi + \text{sen } \pi + \text{tg } \pi - \sec 4\pi = 1 + 0 + 0 - 1 = 0$$

2) Reduza ao 1.º quadrante cosec 480°. (Escola Naval - 1953).

Dividindo 480° por 360° obtemos quociente 1 e resto 120°. Então
$480° = 1 \times 360 + 120°$

$$\therefore \text{ cosec } 480° = \text{cosec } 120° = +\text{cosec } (180° - 120°) = \text{cosec } 60°$$

3) Simplificar a expressão

$$y = \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(-x)}{\text{cotg } (\pi + x) \text{sen } \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

Temos: $y = \dfrac{(-\text{cotg } x)(-\text{sen } x)(\cos x)}{(\text{cotg } x)(-\cos x)} = -\text{sen } x$

33. Exercícios para resolver.

1) Calcular o valor numérico das expressões:

a) $\cos 2x + \text{tg } 4x - 8 \text{ sen } 9x$

b) $\dfrac{\text{sen } 2x + \sec 4x - \text{cosec } 8x}{\text{tg } 6x + \text{cotg } 5x + \text{sen } x}$ para $x = \dfrac{\pi}{2}$

2) Verifique a igualdade efetuando as simplificações:

$$\text{tg } y + \text{tg } (-x) - \text{tg } (180° - x) = \text{tg } y$$

(E. Aeronáutica - 1958).

Reduzir ao 1.º quadrante os arcos de:

3) 320° 7) 140gr 11) $\frac{3\pi}{4}$ 13) $\frac{5\pi}{3}$

4) 120° 8) 250gr

5) 215° 9) 310gr 12) $\frac{5\pi}{4}$ 14) $\frac{33\pi}{4}$

6) 1 782° 10) 1 320gr

15) Sendo $\text{tg } a = \sqrt{2}$, calcule cosec $(90° - a)$.

(EPUC - 1961).

16) Os arcos $2\pi + \frac{5\pi}{4}$ e $12\pi + \frac{9\pi}{4}$ têm a mesma co-tangente porque ...

(E. N. Engenharia - 1957).

Simplificar as expressões:

17) $\text{sen } \frac{21\pi}{2} + \text{tg } (\pi - a) \cdot \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$

18) $\text{sen } (3\pi - a) \cos\left(\frac{9\pi}{2} - a\right) + \sec 10\pi =$

19) $\dfrac{2 \text{ sen } a \text{ tg } (\pi + a)}{\text{tg } a \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}$ 20) $\dfrac{\text{tg } (\pi - a) \cos (\pi + a)}{\text{sen } \frac{11\pi}{2} \text{sen } \left(\frac{5\pi}{2} - a\right)}$

21) Calcule o valor numérico da expressão

$$\frac{\text{tg } (\pi - x) + \text{sen } (\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{cot}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

para quaisquer valores de x. (E. Fluminense Engenharia - 1959).

Respostas:

1) -9 e 2

2) $\text{sen } 320° = -\text{sen } 40°$, $\cos 320° = \cos 40°$, $\text{tg } 320° = -\text{tg } 40°$

3) $\text{sen } 120° = \text{sen } 60°$, $\cos 120° = -\cos 60°$, $\text{tg } 120° = -\text{tg } 60°$

4) $\text{sen } 215° = -\text{sen } 35°$, $\cos 215° = -\cos 35°$, $\text{tg } 215° = \text{tg } 35°$

5) $\text{sen } 1\,782° = -\text{sen } 18°$, $\cos 1\,782° = \cos 18°$, $\text{tg } 1\,782° = -\text{tg } 18°$

6) $\text{sen } 140gr = \text{sen } 50gr$, $\cos 140gr = -\cos 50gr$, $\text{tg } 140gr = -\text{tg } 50gr$

7) $\text{sen } 250gr = -\text{sen } 50gr$, $\cos 250gr = -\cos 50gr$, $\text{tg } 250gr = \text{tg } 50gr$

8) $\text{sen } 310gr = -\text{sen } 90gr$, $\cos 310gr = \cos 90gr$, $\text{tg } 310gr = -\text{tg } 90gr$

9) $\text{sen } 1\,320gr = \text{sen } 80gr$, $\cos 1\,320gr = -\cos 80gr$, $\text{tg } 1\,320gr = -\text{tg } 80$.

10) $\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}$, $\text{tg } \frac{3\pi}{4} = -\text{tg } \frac{\pi}{4}$

11) $\text{sen } \frac{5\pi}{4} = -\text{sen } \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}$, $\text{tg } \frac{5\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4}$

13) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

14) $\operatorname{sen}\frac{33\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{33\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{33\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$

15) $\sqrt{3}$ 16) diferem de meia circunferência

17) 2 18) $\cos^2 a$ 19) 2 20) $-\operatorname{tg} a$ 21) -1

34. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação $\frac{\pi}{n}$

Teorema. O seno de um arco positivo, menor do que $\frac{\pi}{2}$ radianos, é igual à metade da corda que subtende o arco duplo.

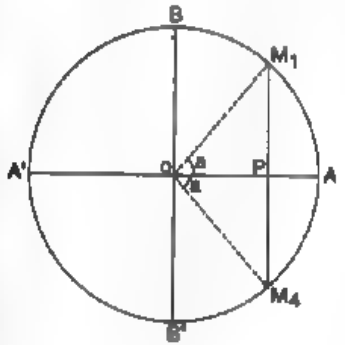


FIG. 22

Seja um círculo trigonométrico de centro 0 (fig. 22) e seja $\overset{\frown}{AM_1} = a$ um arco desse círculo. Tracemos a corda $\overline{M_1M_4}$ perpendicular ao diâmetro $A'A$.

Como todo diâmetro perpendicular a uma corda divide esta corda ao meio, então $\overline{M_1P} = \overline{M_4P}$.

$$\operatorname{sen}\overset{\frown}{AM_1} = \operatorname{sen} a = \overline{M_1P} = \frac{\overline{M_1M_4}}{2}$$

e como $\overline{M_1M_4}$ é a corda que subtende o arco duplo $2a$, então, está demonstrado o teorema.

Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos $\frac{\pi}{n}$. Para calcular as linhas trigonométricas de um arco $\frac{\pi}{n}$ basta calcular o seno desse arco de acordo com o teorema anterior.

Temos que o $\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ é a metade da corda do arco duplo $\frac{2\pi}{n}$, mas, a corda do arco duplo $\frac{2\pi}{n}$ é o lado do polígono regular de n lados inscrito no círculo.

Então, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{l_n}{2}$

conhecendo o seno é fácil obter as demais funções.

Aplicações.

1.ª) Funções trigonométricas do arco de 30°.

$$\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{l_6}{2} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 30° = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.ª) Funções trigonométricas do arco de 45°.

$$\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{l_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 45° = 1$$

3.ª) Funções trigonométricas do arco de 60°.

$$\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{l_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos 60° = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

35. Exercícios resolvidos.

1) Calcular a fração de denominador racional que é igual à co-secante do arco $\frac{\pi}{12}$, sabendo-se que o lado do dodecágono regular inscrito no círculo trigonométrico é $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{l_{12}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{mas,} \quad \operatorname{cosec}\frac{\pi}{12} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\frac{\pi}{12} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

2) Calcular o sen 690°.

Reduzindo ao 1.º quadrante

$$\text{sen } 690° = \text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

3) Calcular: $y = 4\sqrt{3} \cdot \text{tg } 150° + 3\,\text{sen } 90° \,\text{tg } 225° - 5\,\text{sen } 330° + \cos 270°$

$y = 4\sqrt{3} \times (-\text{tg } 30°) + 3 \times 1 \times (\text{tg } 45°) - 5\,(-\text{sen } 30°) + 0 = 2$

36. Exercícios para resolver.

1) Sabendo que o lado do decágono regular inscrito numa circunferência é $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ determine $\text{sen } \frac{\pi}{10}$.

(Escola Naval – 1952).

2) Complete:

a) O $\cos \frac{29}{4}\pi$ (radianos) tem para valor...

(E. Politécnica U. Cat. – Rio – 1957 e U.E.G. – 1972)

b) A razão entre o seno de um arco e a corda correspondente do arco duplo é igual a ... (COMSART – 73).

3) Calcule: $\text{tg } 60° \cdot \text{cosec } 120° \cdot \text{sen } 120° \cdot \text{cotg } 60°$.

(Escola Aeronáutica – 1952).

4) Sendo $\text{sen } \frac{\pi}{6} = 0{,}5$ calcular $\cos 60°$.

(Escola Aeronáutica – 1952).

5) Calcule o valor de $\text{tg } 150°$.

(Esc. Aeronáutica – 1952).

6) Calcule o valor de $\cos 240°$.

(Esc. Aeronáutica – 1952).

7) Calcule o valor do seno de $\frac{13\pi}{3}$ rd.

(Esc. Aeronáutica – 1952).

8) A característica do logaritmo da tangente de um ângulo maior que 45°, pode ser negativa?

(Esc. Aeronáutica – 1952).

9) Achar o valor numérico da expressão

$$\frac{\text{sen } (30° + x) + \cos^3 3x}{\text{tg } (x - 15°)} + \text{tg}\left(\frac{x - 60°}{2}\right) \text{ para } x = 60°$$

(F. N. Arquitetura – 1949).

10) Sendo $\text{tg } x = -1$, qual a determinação de x no 4.º quadrante.

Escola Naval – 1952 e U.E.G. – 1972

11) Exprimir somente em função do co-seno, a expressão

$$y = \frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\text{tg}^2 x} - \frac{1}{\text{cotg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\text{cosec}^2 x}$$

e a seguir calcular o valor de y para $x = \frac{\pi}{6}$

12) Provar que $3\,\text{tg}^1 \frac{13\pi}{4} - 2\,\text{sen } \frac{\pi}{4}\,\text{cosec } \frac{3\pi}{4} = 1$

13) Dar o valor de y para $x = \frac{\pi}{6}$

$$y = \frac{\text{sen } x + \cos 2x}{\text{cotg } 5x - \text{tg } 7x}$$

(Psicologia UFRJ – 1959).

14) Determinar o valor numérico da expressão

$$y = \frac{\cos 2x + \text{sen } x}{\text{cotg } 3x - \text{tg } \frac{3x}{2}}, \text{ para } x = \frac{\pi}{6}$$

(E. P. C. Aeronáutica – 1950).

15) Simplificando-se a expressão

$$\text{sen } \frac{11\pi}{2} - \frac{\cos(a + 9\pi)\,\text{tg}\left(a + \frac{7\pi}{2}\right)}{\text{sen } (5\pi - a)} \text{ obtém-se ...}$$

(CESCEA – 73 – S. P.).

Respostas:

1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

2) a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $1/2$

3) 1

4) $\frac{1}{2}$

5) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

6) $-\frac{1}{2}$

7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) Não. (Se $x > 45°$, $\text{tg } x > 1$ e $\log \text{tg } x > 0$)

9) 2

10) 315°

11) $\frac{\cos^2 x - 2}{\cos^2 x}$ e -7

13) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

14) -1

15) $-\text{cosec}^2\, a$

CAPÍTULO IV

Transformações trigonométricas em geral

ADIÇÃO DE ARCOS

1. Preliminares. O problema da adição de arcos consiste em, dados dois arcos a e b, dos quais sejam conhecidas as suas linhas trigonométricas, determinar as linhas trigonométricas do arco soma de a e b.

2. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. A medida algébrica da projeção ortogonal sobre um eixo, de um vetor localizado em outro eixo, é igual à medida algébrica do vetor multiplicado pelo co-seno do ângulo dos dois eixos.

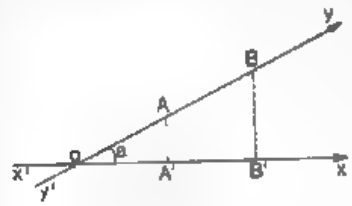


FIG. 23

Sejam os eixos $x'x$ e $y'y$ formando um ângulo a (fig. 23).

Seja $\overrightarrow{AB}$ um vetor localizado em $y'y$ e $\overrightarrow{OA}$ o vetor unitário deste eixo.

A medida algébrica projeção do vetor $\overrightarrow{AB}$ sôbre o eixo $x'x$ é:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \overline{OA'}$$

mas, é fácil de verificar pela figura, que $\overline{OA'} = \cos a$

$$\therefore \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos a$$

3. Expressões das linhas trigonométricas da soma de dois arcos. Seja um círculo trigonométrico de centro 0 (fig. 24) e consideremos nesse círculo os arcos $\widehat{AM} = a$ e $\widehat{MN} = b$.

O arco $\widehat{AN} = \widehat{AM} + \widehat{MN} = a + b$.

Temos:

$\overline{PN} = \text{sen } (a + b)$; $\overline{QN} = \text{sen } b$

$\overline{OP} = \cos (a + b)$; $\overline{OQ} = \cos b$

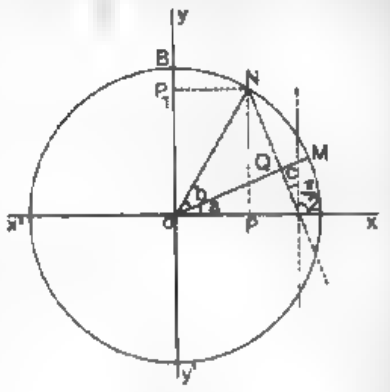


FIG. 24

Consideremos a eqüipolência:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} \quad \text{(I)}$$

e a projetemos sobre o eixo $x'x$.

De acordo com o *teorema de Carnot*, e tendo em vista o n.º 2, temos:

$$(\text{proj} \cdot \overrightarrow{ON}) = (\text{proj } \overrightarrow{OQ}) + (\text{proj } \overrightarrow{QN}) \quad \text{(II)}$$

Mas, $(\text{proj} \cdot \overrightarrow{ON}) = \overline{OP} = \cos (a + b)$

$$(\text{proj} \cdot \overrightarrow{OQ}) = \overline{OQ} \cdot \cos a = \cos b \cdot \cos a$$

e como o ângulo formado por $\overrightarrow{QN}$ com $\overrightarrow{OA}$ é $\frac{\pi}{2} + a$, o que pode ser observado na figura, pois o ângulo c é igual a a, por terem lados perpendiculares, então:

$$(\text{proj} \cdot \overrightarrow{QN}) = \overline{QN} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \text{sen } b \cdot (-\text{sen } a) = -\text{sen } a \text{ sen } b$$

Podemos então concluir, substituindo esses valores em (II), que:

$$\boxed{\cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b} \quad \text{(III)}$$

De modo análogo, se projetarmos a eqüipolência (I) sobre o eixo $y'y$ temos a (II). Mas, agora temos:

$$(\text{proj} \cdot \overrightarrow{ON}) = \overline{OP_1} = \overline{PN} = \text{sen } (a + b)$$

$$(\text{proj} \cdot \overrightarrow{OQ}) = \overline{OQ} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos b \cdot \text{sen } a$$

e como neste caso o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{QN}$ e $\overrightarrow{OB}$ é o ângulo $c = a$, então

$$(\text{proj} . \overrightarrow{QN}) = \overline{QN} . \cos a = \operatorname{sen} b \cos a$$

Substituindo esses valores em (II), temos:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a} \qquad \text{(IV)}$$

As fórmulas (III) e (IV) resolvem o problema proposto no n.º 1, pois conhecendo sen $(a+b)$ e cos $(a+b)$ temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

e dividindo ambos os termos da fração por cos a cos b, obtemos:

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}} \qquad \text{(V)}$$

4. Observação. Conhecidas ou calculadas as expressões (III), (IV) e (V) torna-se fácil achar cotg $(a+b)$, sec $(a+b)$ e cosec $(a+b)$ que são respectivamente os inversos do seno, co-seno e tangente de $a+b$.

5. Expressões das linhas trigonométricas da soma de três arcos. Consideremos a soma dos arcos $a+b+c$ como a soma dos arcos $a+b$ e c. Podemos escrever:

$$\operatorname{sen}(a+b+c) = \operatorname{sen}[(a+b)+c] = \operatorname{sen}(a+b)\cos c + \operatorname{sen} c \cos(a+b)$$

Substituindo sen $(a+b)$ e cos $(a+b)$ por seus valores (III) e (IV), temos:

$$\operatorname{sen}(a+b+c) = \operatorname{sen} a \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \cos a \cos c + \operatorname{sen} c \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \qquad \text{(VI)}$$

De modo análogo, obtemos:

$$\cos(a+b+c) = \cos[(a+b)+c] = \cos(a+b)\cos c - \operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen} c$$

$$\therefore \cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos b \qquad \text{(VII)}$$

Temos então: $\operatorname{tg}(a+b+c) = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b+c)}{\cos(a+b+c)}$

substituindo sen $(a+b+c)$ e cos $(a+b+c)$ por seus valores (VI) e (VII) e dividindo, a seguir, ambos os termos da fração obtida por cos a cos b cos c, obtemos:

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c} \qquad \text{(VIII)}$$

6. Expressões do seno e do co-seno da soma de n arcos. Procedendo de modo análogo ao que foi feito para $a+b+c$, podemos generalizar para o caso de n arcos.

E demonstra-se que, sendo $a_1, a_2, \ldots a_n$ os n arcos considerados, temos:

$$\operatorname{sen}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S_1 - S_3 + S_5 - \qquad \text{(IX)}$$

$$\cos(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S_0 - S_2 + S_4 \qquad \text{(X)}$$

onde S_i representa a soma dos produtos dos senos de i dos n arcos considerados pelos co-senos dos $n-i$ arcos restantes, tomados de todos os modos possíveis.

7. Exemplos.

1) Determinar o sen $(a+b+c)$ com o auxílio de (IX)

$$\operatorname{sen}(a+b+c) = S_1 - S_3$$

Mas, $S_1 = \operatorname{sen} a \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \cos a \cos c + \operatorname{sen} c \cos a \cos b$

$$S_3 = \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} c$$

e substituindo obtemos a (VI).

2) Achar o

$$\cos(a+b+c) = S_0 - S_2$$

Mas, $S_0 = \cos a \cos b \cos c$.

$S_2 = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos a$

e substituindo obtemos a (VII).

SUBTRAÇÃO DE ARCOS

8. Preliminares. O problema da subtração de arcos é semelhante ao da adição. Consiste em determinar as linhas trigonométricas do arco $a-b$, quando são conhecidas as linhas trigonométricas dos arcos a e b.

9. Expressões das linhas trigonométricas da diferença de dois arcos. Observando que a soma dos arcos a e $-b$ corresponde à diferença dos arcos a e b, podemos, substituindo b por $-b$ nas fórmulas (III), (IV) e (V), obter as seguintes fórmulas:

1.ª) $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}[a+(-b)] = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a} \qquad \text{(XI)}$$

2.ª) $\cos(a-b) = \cos[a+(-b)] = \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b)$

$$\therefore \boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \qquad \text{(XII)}$$

3.ª) $\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}[a+(-b)] = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)}$

$$\therefore \boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}} \qquad \text{(XIII)}$$

10. Exercícios resolvidos.

1) Calcular, empregando as fórmulas da adição de arcos, o seno, o co-seno e a tangente de 75°.

Empregando as fórmulas (III), (IV), temos:

$$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 30° \cos 45°$$

$$\therefore \operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°$$

$$\therefore \cos 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

e $$\operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{6 - 2} = 2 + \sqrt{3}$$

2) Calcular tg 15°, sabendo que $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

Pela fórmula (XIII) obtemos:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(75° - 60°) = \frac{\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 60°}{1 + \operatorname{tg} 75° \operatorname{tg} 60°} = 2 - \sqrt{3}$$

3) Demonstrar que se A, B, C são ângulos de um triângulo não retângulo então

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

É verdadeira essa fórmula no caso de um triângulo retângulo? Justifique a resposta. (I. T. A. – 1968)

De fato, $A + B + C = 180° \therefore A + B = 180° - C$

$$\therefore \operatorname{tg}(A + B) = \operatorname{tg}(180° - C)$$

$$\therefore \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = -\operatorname{tg} C$$

ou $$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

Não é verdadeira para $A = 90°$, pois não existe tg 90°.

4) Calcule cos 15° usando uma fórmula de co-seno de diferença de arcos. (Escola Naval – 1959).

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

11. Exercícios para resolver.

1) Calcule o seno do ângulo A do triângulo ABC, sabendo que os outros dois ângulos medem 45° e $\frac{\pi}{6}$ radianos. (EPUC – 1961).

2) Calcule o menor valor positivo de a que satisfaça à igualdade $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} 75° = \dfrac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} - 1}$ (Engenharia – 1966 – GB).

3) Calcular $\operatorname{sen}(a - b)$ dados $\cos a = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} b = \frac{5}{13}$

4) Sendo a e b arcos do 3.º e 4.º quadrantes, respectivamente, e $\operatorname{sen} a = -\frac{3}{5}$ e $\cos b = \frac{12}{13}$, qual o seno de $(a - b)$? (UFRJ – 71).

5) O valor numérico de $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}(\pi + 2x)$ é (UEG – 70)

6) Sabendo que $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$ e que $x - y = 60°$. Achar $\operatorname{tg} y$.

7) Dados:

$$x = \cos u, \quad y = \operatorname{sen} u \cos v, \quad z = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.$$

calcular $\operatorname{sen}(a+b)$, sabendo que

$$\operatorname{sen} a = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{e} \quad \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sendo a e b arcos do 1.º quadrante.

8) Calcule o valor da expressão

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)}{\cos(-a)}$$

(ENE – 1961).

9) Sabendo que $\cos(x+60°)+\cos(x-60°) = -0{,}5$ e que $x > 180°$, calcular o valor de x.

10) Sabendo que $\dfrac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} = 1$ e que $a > 90°$, calcular o ângulo a.

11) Determinar o ângulo C de um triângulo sabendo que os outros dois ângulos A e B estão relacionados por

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \operatorname{sen}^2 C$$
$$\cos A \cdot \cos B = \operatorname{sen} C$$

(Esc. Eng. Mackenzie – 1963).

12) Prove que se $a+b+c = 90°$, temos:

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = 1$$

13) Verificar as identidades:

a) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

b) $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$

c) $\operatorname{sen} b \cos(a-b) + \cos b \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a$

d) $(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2 + (1-\cos x)^2 = (\sec x - 1)^2$

(ENE – 1964)

e) $\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)} = \operatorname{tg} b$

f) $\dfrac{\cos^2(a+b)+\cos^2 b - 2\cos(a+b)\cos a \cos b}{\operatorname{sen}^2(a+b)+\operatorname{sen}^2 b - 2\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen} b \cos a} = 1$

14) Sendo $a - b = 60°$, o valor de $(\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2$ é . .

Economia – UFRJ 1971).

15) Provar que:

$$1 + \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(a+45°)}{\cos a}$$

(I. T. A. – 1957).

16) Torne logarítmica a expressão:

$$\cos(x+z)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-y\right) - \operatorname{sen}(x+z)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-y\right)$$

(E. Flum. Engenharia – 1959).

RESPOSTAS:

1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) 60°

3) $\dfrac{16}{65}$

4) $-\dfrac{56}{65}$

5) 0

6) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

7) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8) 2

9) 240°

10) 225°

11) 90°

14) 3

16) $\operatorname{sen}(y-z)$

MULTIPLICAÇÃO DE ARCOS

12. Preliminares. O problema da multiplicação de arcos consiste em, dadas as linhas trigonométricas de um arco a, determinar as linhas trigonométricas do arco ma.

13. Expressões das linhas trigonométricas de um arco $2a$. Fazendo nas fórmulas (III), (IV) e (V), $b = a$ temos:

$$\operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a$$
$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{tg}(a+a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} 2a &= 2\operatorname{sen} a \cos a \qquad (XIV)\\ \cos 2a &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \qquad (XV)\\ \operatorname{tg} 2a &= \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} \qquad (XVI) \end{aligned}}$$

14. Observações. A expressão (XV) pode ser escrita assim:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\therefore \cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \qquad \text{(XVII)}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \text{(XVIII)}$$

15. Expressões das linhas trigonométricas de um arco 3a. Se considerarmos o arco $3a$ como sendo a soma de 3 arcos a, temos, empregando as fórmulas (VI), (VII) e (VIII):

1.º) $\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen}(a + a + a) = \operatorname{sen} a \cos^2 a + \operatorname{sen} a \cos^2 a + \operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a$

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a \qquad \text{(XIX)}$$

2.º) $\cos 3a = \cos(a+a+a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \cos a - \operatorname{sen}^2 a \cos a - \operatorname{sen}^2 a \cos a$

$$\therefore \cos 3a = \cos^3 a - 3 \operatorname{sen}^2 a \cos a \qquad \text{(XX)}$$

3.º) $$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(a+a+a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\therefore \operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a} \qquad \text{(XXI)}$$

16. Linhas trigonométricas de um arco *ma* (m>3). Para se calcular as linhas trigonométricas de um arco $4a$, $5a$, etc., basta que se substitua $4a$ por $3a + a$, e assim sucessivamente.

Pode-se também obter as linhas trigonométricas desses arcos ma, fazendo nas fórmulas (IX) e (X), $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$.

BISSEÇÃO DE ARCOS

17. Preliminares. O problema da bissecção de arcos consiste em, dadas as linhas trigonométricas de um arco a, calcular as linhas trigonométricas do arco metade $\frac{a}{2}$.

18. Expressões das linhas trigonométricas do arco $\frac{a}{2}$ em função do cos a. Sejam as fórmulas já conhecidas

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos 2a$$

Subtraindo e somando, membro a membro, essas relações, temos, respectivamente:

$$2\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos 2a \quad \text{e} \quad 2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$

Tirando o valor de sen a e cos a, obtemos:

$$\operatorname{sen} a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}} \quad \text{e} \quad \cos a = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

Substituindo a por $\frac{a}{2}$, temos, finalmente:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}} \qquad \text{(XXII)}$$

$$\boxed{\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}} \qquad \text{(XXIII)}$$

E fàcilmente determinamos também a $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2} \times \frac{2}{1 + \cos a}}$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}} \qquad \text{(XXIV)}$$

19. Observações. Essas fórmulas (XXII), (XXIII) determinam o ângulo $\frac{a}{2}$ a menos de um sinal.

Os valores das linhas trigonométricas de $\frac{a}{2}$ são sempre reais, pois $1 \pm \cos a \geq 0$.

E o arco metade tem para forma geral

$$k\pi \pm \frac{\alpha}{2}$$

20. Linhas trigonométricas de um arco em função da tg $\frac{a}{2}$. Substituindo nas fórmulas (XIV), (XV) e (XVI) a por $\frac{a}{2}$, temos:

$$\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Esta última expressão já é uma das expressões procuradas.

Para se obter sen a e cos a em função da tg $\frac{a}{2}$ basta escrever as duas primeiras expressões assim:

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}} \quad \text{e} \quad \cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}}$$

Dividindo ambos os termos das frações por $\cos^2 \frac{a}{2}$ obtemos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \quad \text{e} \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

As expressões procuradas são, pois:

$$\text{(XXV)} \begin{cases} \operatorname{sen} a = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \cos a = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \\ \text{e} \operatorname{tg} a = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \end{cases}$$

21. Exercícios resolvidos.

1) Determinar $\cos \frac{A}{2}$ sabendo que A é um arco do 4.º quadrante e que $\cos A = \frac{3}{5}$.

(Escola Naval – 1933).

De acordo com a fórmula (XXIII), e tendo em conta que $\frac{A}{2}$ é do 2.º quadrante, pois A é do 4.º, temos:

$$\cos \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2) Sabendo que $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ determinar tg 15°, deduzindo a fórmula de passagem e as demais linhas desse arco em função da tangente.

(Escola Militar – 1935).

Sabemos que $\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$; chamando $\operatorname{tg} 2a = k$ e $\operatorname{tg} a = x$,

$$k = \frac{2x}{1 - x^2} \quad \therefore \quad kx^2 + 2x - k = 0$$

Resolvendo, temos: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + k^2}}{k}$

A fórmula de passagem será:

$$\operatorname{tg} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2a}}{\operatorname{tg} 2a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \quad \cos 15° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \quad \sec 15° = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 15° = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \operatorname{cot} 15° = 2 + \sqrt{3}$$

3) Verificar a identidade

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Desenvolvendo o segundo membro, temos:

$$\frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

Está, pois, verificada a identidade.

22. Exercícios para resolver.

1) Calcular $\operatorname{tg} 2\alpha$, sendo $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e suposto o arco no 2.º quadrante.
(I. T. A. – 1956).

2) Sendo $\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, calcular $\cos 30°$.

3) Sen $18° = \ldots$. (E. Flum. Engenharia – 1957).

4) Sabendo que $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcular $\operatorname{tg} 22° 30'$.

5) Sendo $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, calcular sen 2α sabendo que α é do 2.º quadrante.

6) Sabendo que α é do 3.º quadrante e que $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$, calcular $\cos \frac{\alpha}{2}$.

7) Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ e α é do 1.º quadrante, calcule $\operatorname{tg} 3\alpha$.

8) Calcular $\cos \alpha$ sendo α do 1.º quadrante e $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

9) Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1$ e α do 1.º quadrante, ache $\operatorname{tg} 2\alpha$.

10) Sendo x um arco do 4.º quadrante e sendo $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$, o valor de sen $4x$ é ....
(FGV – 73 – S. P.)

11) Se sen $\frac{a}{2}$ é igual a $\frac{1}{5}$, então o valor de cos a é
(COMSART – 73 GB)

12) A tangente da metade de um arco do 2.º quadrante é igual a $\frac{3}{2}$. Qual o valor do seno do arco?
(CICE – 1970)

13) Exprima $\frac{(\cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha}$ em função de sen 2α.

14) Determinar o valor da expressão

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{14\pi}{3}$$

E. Flum. Engenharia – 1958).

15) Exprimir $y = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x$ em função de $\operatorname{tg} x$.
(Fac. Eng. Ind. U. Cat. de S. Paulo – 1951)

16) Verificar as identidades:

a) $(\operatorname{sen} a + \cos a)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2a$

b) $(\operatorname{sen} a + \cos a)^2 - (\operatorname{sen} a - \cos a)^2 = 2 \operatorname{sen} 2a$

c) $(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a - b}{2}$

d) $\operatorname{cot} x + \operatorname{tg} x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$ (E. N. Agronomia – 1952).

e) $\frac{1}{2} + \cos 2a = \frac{\operatorname{sen}^3 a}{2 \operatorname{sen} a}$ (Esc. Eng. São Carlos – 1958)

f) $\frac{\cos 2a}{1 + \operatorname{sen} 2a} = \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}$

g) $\operatorname{sen} 3a \operatorname{cosec} a - \cos 3a \sec a = 2$

h) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} (45 - x)(1 + \operatorname{tg} x)}{\sec x}$ (E. N. Engenharia – 1958).

i) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{sen} a}{\cos a}$ (Escola Militar – 1958).

j) $\cos^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x \cos x = 2 - \cos 2x + 4 \operatorname{sen} 2x$

17) Sabe-se que $\operatorname{tg} 2x = \frac{2}{3}$. Calcular $y = \cos^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x \cos x$.
(Fac. Nacional de Filosofia – 1947).

RESPOSTAS:

1) $\sqrt{3}$
2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$
4) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
5) $\frac{-24}{25}$
6) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
7) $\frac{2}{11}$
8) $\frac{5}{13}$
9) 1
10) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
11) $\frac{23}{25}$
12) $\frac{12}{13}$
13) $\frac{2(1 - \operatorname{sen}^2 2\alpha)}{2 - \operatorname{sen}^2 2\alpha}$
14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
15) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
17) $\frac{26 \pm 5\sqrt{13}}{13}$

TRANSFORMAÇÃO DE SOMAS DE LINHAS TRIGONOMÉTRICAS EM PRODUTO

23. Preliminares. No cálculo dos logaritmos devemos trabalhar com produtos em vez de somas. Procuremos então estabelecer entre as linhas trigonométricas fórmulas que sejam as mais úteis possíveis para o cálculo dos logaritmos.

24. Transformação de somas e diferenças de senos e co-senos. Já conhecemos as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\
\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo, membro a membro, as duas primeiras igualdades e depois procedendo de modo análogo com as duas últimas, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} a \cos b \\
\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} b \cos a \\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b \\
\cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned} \qquad \text{(XXVI)}$$

Fazendo $a+b=p$ e $a-b=q$, vem:

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Substituindo esses valores em (XXVI) obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q &= 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q &= 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\
\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}
\end{aligned} \qquad \text{(XXVII)}$$

As fórmulas (XXVII) permitem transformar em produto as expressões da forma: $\operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} b$ e $\cos a \pm \cos b$.

Se, em lugar de uma soma ou diferença, de senos ou co-senos, tivermos uma soma ou diferença, de um co-seno com um seno, ou vice-versa, substitui-se o seno ou o co-seno pelo co-seno ou seno, respectivamente, do arco complementar.

25. Exemplos.

1) $\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{60^\circ+30^\circ}{2} \cos \frac{60^\circ-30^\circ}{2} =$

$$= 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 15^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

2) $\cos a + \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \operatorname{sen} b =$

$$= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right)$$

3) $\cos 3a + \cos a = 2 \cos \frac{3a+a}{2} \cos \frac{3a-a}{2} = 2 \cos 2a \cos a$

26. Transformação de $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b$ em produto. Temos:

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}$$

ou

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b} \qquad \text{(XXVIII)}$$

27. Transformação de uma soma algébrica de mais de duas linhas trigonométricas. Procede-se em geral transformando em produto a soma de dois têrmos convenientemente escolhidos, condusindo-se então a uma soma algébrica tendo um têrmo a menos que a soma proposta. Continuando assim, acharemos uma expressão monômia igual à expressão dada.

28. Exemplos.

1) $x = \operatorname{sen} a + 2 \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 3a$. Temos:

$$x = 2 \operatorname{sen} 2a + (\operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} a) = 2 \operatorname{sen} 2a + 2 \operatorname{sen} 2a \cos a =$$
$$= 2 \operatorname{sen} 2a (1 + \cos a).$$

Mas $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ (n.º 18)

$$\therefore x = 2 \operatorname{sen} 2a \times 2 \cos^2 \frac{a}{2} = 4 \operatorname{sen} 2a \cos^2 \frac{a}{2}$$

2) $x = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} 9a - \operatorname{sen} 5a$

$$\therefore x = (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a) + (\operatorname{sen} 9a - \operatorname{sen} 5a)$$
$$\therefore x = 2 \operatorname{sen} 2a \cos a + 2 \operatorname{sen} 2a \cos 7a =$$
$$= 2 \operatorname{sen} 2a (\cos a + \cos 7a) = 2 \operatorname{sen} 2a \,.\, 2 \cos 4a \,.\, \cos 3a$$

ou $x = 4 \operatorname{sen} 2a \cos 3a \cos 4a$

3) $x = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} (a + b + c)$. Temos:

$$x = (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) + [\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} (a + b + c)] =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{-(a+b)}{2} \cos \frac{a+b+2c}{2} =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b+2c}{2} \right) =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \times \left[-2 \operatorname{sen} \frac{a-b+a+b+2c}{4} \operatorname{sen} \frac{a-b-a-b-2c}{4} \right] =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \times \left[-2 \operatorname{sen} \frac{a+c}{2} \operatorname{sen} \frac{-(b+c)}{2} \right] =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \times 2 \operatorname{sen} \frac{a+c}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c}{2}$$
$$\therefore x = 4 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+c}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c}{2}$$

29. Transformações de $1 \pm \operatorname{sen} a$ e $1 \pm \cos a$ em produto. É fácil de ver (n.º 18) que:

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad 1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

Para as expressões $1 \pm \operatorname{sen} a$ basta substituir 1 por $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$. Temos:

$$1 + \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$$

Mas, como $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$

temos: $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$

$$\therefore 1 + \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$$

Analogamente, obtemos:

$$1 - \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) =$$
$$= 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$$

30. Exercícios resolvidos.

1) Transformar a expressão

$$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}$$

2) Sendo A, B e C os ângulos internos de um triângulo, prove que:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Se $A + B + C = 180°$

$$\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}, \quad \frac{A+C}{2} = 90° - \frac{B}{2} \quad \text{e} \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

Substituindo no valor encontrado no 3.º exemplo do n.º 28, obtemos:

$$x = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(A+B+C) =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A+C}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

8) Transformar $1 \pm \operatorname{tg} a$ em produto.

De acordo com a fórmula (XXVIII) e substituindo 1 por $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ vem:

$$1 \pm \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \pm \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos a} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos a}$$

4) Adaptar ao cálculo logarítmico a expressão

$$y = \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

sendo A, B, C os ângulos de um triângulo.

(Esc. N. Engenharia – 1948).

Podemos escrever, já que $\cos \pi = -1$:

$$y = \cos A + \cos B + \cos C + \cos \pi = (\cos A + \cos B) + (\cos C + \cos \pi) =$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{\pi+C}{2} \cos \frac{\pi-C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{\pi+C}{2} \cos \frac{A+B+C-C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{\pi+C}{2} \cos \frac{A+B}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{\pi+C}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot 2 \cos \frac{A-B+\pi+C}{4} \cos \frac{A-B-\pi-C}{4}$$

Substituindo π por $A+B+C$, temos:

$$y = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{B+C}{2}$$

Está, pois, a expressão y transformada em produto.

31. Exercícios para resolver.

1) Escreva a expressão que torna logarítmica a soma $\cos \alpha + \cos \beta$.

(Esc. Aeronáutica – 1952).

2) Torne logarítmica a expressão $\cos x + 1$.

(Esc. Aeronáutica – 1953)

3) Transforme em produto $1 - \cos x$

(U.E.G. – 1970).

4) Tornar calculável por logaritmos a expressão:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

(Esc. Técnica do Exército – 1945).

Transformar em produto as expressões:

5) $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a - \cos b}$ 6) $\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b}$ 7) $\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a - \cos b}$

8) $\dfrac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b}$ 9) $\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$ 10) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}$

Demonstrar que sendo $A + B + C = 180°$

11) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$

12) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0$

13) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$

Tornar calculáveis por logaritmos:

14) $\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20°$ 17) $\cos 40° - \cos 20°$

15) $\operatorname{sen} 50° - \operatorname{sen} 30°$ 18) $\operatorname{sen} 60° + \cos 50°$ 20) $1 - \operatorname{sen} 30°$

16) $\cos 50° + \cos 10°$ 19) $\operatorname{sen} 60° + 1$

21) Transforme em expressão logarítmica $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{cot} x$

(E. N. Engenharia – 1958).

Transformar em produto as expressões:

22) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 7a$ (U.E.G. – 1972).

23) $\operatorname{sen} 5a + \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 9a - \operatorname{sen} 3a$

24) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} 7a + \operatorname{sen} 9a$

25) $\cos a + \cos 4a - \cos 8a - \cos 11a$

26) $\operatorname{sen} 8a - \operatorname{sen} 6a - \cos 8a \operatorname{sen} 2a$ [sugestão: $\cos 8a = \cos\,(7a+a)$]

27) $\operatorname{sen}^2 7a - \operatorname{sen}^2 3a$

28) $\operatorname{sen}(a+b-c) + \operatorname{sen}(a+c-b) + \operatorname{sen}(b+c-a) - \operatorname{sen}(a+b+c)$

29) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$

30) $2 + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + 2 \cos a \cos b$

Simplificar:

31) $\dfrac{\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 50° + \operatorname{sen} 72° + \operatorname{sen} 82°}{\cos 40° - \cos 50° + \cos 72° - \cos 82°}$

(E. Flum. Engenharia – 1957).

Verificar as identidades:

32) $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 3a}{\cos a + \cos 2a + \cos 3a} = \operatorname{tg} 2a$ (E. Aeronáutica – 1958).

33) $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$ F. Flum. d'Engenharia – 1956.

RESPOSTAS:

1) $2 \cos \dfrac{a+\beta}{2} \cos \dfrac{a-\beta}{2}$

2) $2 \cos^2 \dfrac{x}{2}$

3) $-2 \operatorname{sen} x$

4) $\operatorname{tg} \dfrac{a+\beta}{2}$

5) $-\operatorname{cotg} \dfrac{a-b}{2}$

6) $\operatorname{tg} \dfrac{a-b}{2}$

7) $-\operatorname{cotg} \dfrac{a+b}{2}$

8) $-\cot \dfrac{a+b}{2} \cot \dfrac{a-b}{2}$

9) $\operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}$

10) $\operatorname{tg}(45° - a)$

14) $2 \operatorname{sen} 30° \cos 10°$

15) $2 \operatorname{sen} 10° \cos 40°$

16) $2 \cos 20° \cos 10°$

17) $-2 \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 10°$

18) $2 \operatorname{sen} 50° \cos 10°$

19) $2 \operatorname{sen} 75° \cos 15°$

20) $2 \operatorname{sen} 30° \cos 60°$

21) $2 \operatorname{cosec} 2x$ e $-2 \cot 2x$

22) $2 \operatorname{sen} 4a \cos 3a$

23) $4 \operatorname{sen} 3a \cos 2a \cos 4a$

24) $4 \operatorname{sen} 5a \cos 3a \cos a$

25) $4 \operatorname{sen} 5a \operatorname{sen} \dfrac{7a}{2} \cos \dfrac{3a}{2}$

26) $2 \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen} 8a$

27) $\operatorname{sen} 10a \operatorname{sen} 4a$

28) $4 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$

29) $4 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{b+c}{2} \cos \dfrac{a+c}{2}$

30) $4 \cos^2 \dfrac{a-b}{2}$

31) $\cot 5°$

DISPOSIÇÃO E USO DE TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS NATURAIS E LOGARÍTMICAS

32. Preliminares. Já estudamos o uso das tábuas de logaritmos dos números naturais no capítulo sobre logaritmos, estudaremos agora o uso das tábuas de logaritmos das linhas trigonométricas: as tábuas trigonométricas.

Existem dois tipos de tábuas trigonométricas: as *naturais*, que dão os valores das linhas trigonométricas e as *logarítmicas* que dão os logaritmos desses valores.

33. Disposição das tábuas trigonométricas logarítmicas. Apresentaremos a seguir uma página (27°) da tábua adotada.

	SEN.	DIF.	TANG.	DIF. COM.	COTG.	COS.	DIF.	′
0	$\bar{1},657\,0458$	2478	$\bar{1},707\,1659$	2122	0,292 8341	$\bar{1},949\,8809$	644	60
1	2946	2477	4781	3121	5219	8165	644	59
2	5423	2475	$\bar{1},707\,9702$	3120	0,292 2098	7521	645	58
3	$\bar{1},657\,7898$	2473	$\bar{1},708\,1022$	3119	0,291 8978	6876	646	57
4	$\bar{1},658\,0371$	2471	4141	3117	5859	6230	645	56
5	2842	2470	$\bar{1},708\,7258$	3116	$\bar{1},291\,2742$	5585	647	55
6	5312	2468	$\bar{1},709\,0374$	3114	0,290 9626	4938	646	54
7	$\bar{1},658\,7780$	2466	3488	3113	6512	4292	647	53
8	$\bar{1},659\,0246$	2464	6601	3112	3399	3645	648	52
9	2710	2463	$\bar{1},709\,9713$	3111	0 290 0287	2997	646	51
10	5178	2460	$\bar{1},710\,2824$	3109	0,289 7176	2349	649	50
11	$\bar{1},659\,7633$	2460	5933	3108	4067	1700	649	49
12	$\bar{1},660\,0093$	2457	$\bar{1},710\,9041$	3107	0,289 0950	1051	649	48
13	2550	2455	$\bar{1},711\,2148$	3106	0,288 7852	$\bar{1},949\,0402$	650	47
14	5005	2454	5254	3104	4746	$\bar{1},948\,9752$	651	46
15	7459	2452	$\bar{1},711\,8358$	3103	0,288 1642	0101	651	45
16	$\bar{1},660\,0911$	2450	$\bar{1}$ 712 1461	310.	0,287 8539	8450	651	44
17	$\bar{1},661\,2361$	2449	4562	3100	5438	7799	652	43
18	4810	2447	$\bar{1},712\,7662$	3099	0,287 2338	7141	652	42
19	7257	2445	$\bar{1},713\,0761$	3098	0,286 9239	6495	653	41
20	$\bar{1},661\,9702$	2443	3859	3097	6141	5842	653	40
21	$\bar{1},662\,2145$	2441	$\bar{1}$ 713 6958	3095	0,286 3044	5189	654	39
22	4586	2440	$\bar{1}$ 714 0051	3094	0,285 9949	4535	654	38
23	7026	2438	3145	3092	0855	2881	654	37
24	$\bar{1},662\,9464$	2436	6237	3092	3763	3227	655	36
25	$\bar{1},663\,1900$	2435	$\bar{1},714\,9329$	3090	0,285 0671	2572	656	35
26	4335	2423	$\bar{1},715\,2419$	3089	0,284 7581	1916	656	34
27	6768	2431	5508	3087	4492	1260	656	33
28	$\bar{1},663\,9190$	2429	$\bar{1},715\,8595$	3087	0,284 1405	$\bar{1},948\,0604$	658	32
29	$\bar{1},664\,1628$	2428	$\bar{1}$ 716 1682	3085	0,283 8318	$\bar{1}$. 9479947	658	31
30	$\bar{1},664\,4056$	—	$\bar{1},716\,4767$	—	0,283 5233	$\bar{1},947\,9289$	—	30
′	COS.	DIF.	COTG.	DIF. COM.	TANG.	SEN.	DIF.	′

As *tábuas trigonométricas logarítmicas* são as mais usadas no cálculo trigonométrico, pois permitem muito maior precisão do que as *naturais*.

Convém notar que as tábuas só contém os ângulos até 90°. Se o ângulo é maior do que 90° fazemos sua redução ao 1.° quadrante. Convém também chamar atenção de que os logaritmos dos arcos maiores do que 45° existentes na tábua são os mesmos dos arcos menores do que 45°, o que se justifica pelo fato de os ângulos serem complementares.

Adotaremos para os cálculos de nossas expressões e exercícios, e para as nossas explicações as Novas Tábuas de Logaritmos por uma Reunião de Professores (conhecidas também como de F.T.D.). Esta tábua contém, a partir de certa página, os logaritmos dos senos, co-senos, tangentes e co-tangentes dos arcos de 0° a 90°, com 7 decimais e de minuto a minuto.

Contém, também, numa das últimas páginas os valores *naturais* das linhas trigonométricas.

Cada página da tábua, assim como vemos pela que acabamos de apresentar, contém no alto ou no pé, e no meio, o número de graus de ângulo. Os ângulos menores do que 45° são indicados no alto da página e os seus minutos na coluna estreita da esquerda. Os ângulos maiores do que 45° são indicados ao pé da página e os seus minutos na última coluna à direita.

Nas quatro colunas designadas pelas abreviaturas das funções trigonométricas, estão os logaritmos dos valores dessas funções. Essas devem ser lidas no alto ou no pé da página, conforme o ângulo seja menor ou maior do que 45°, respectivamente.

As colunas à direita das colunas dos logaritmos dos senos e co-senos dão as diferenças tabulares dos logaritmos dessas linhas.

A coluna central dá a *diferença tabular comum* dos logaritmos das tangentes e co-tangentes.

34. Uso das tábuas. Existem dois problemas para cuja resolução necessitamos usar as tábuas trigonométricas:

1.°) Dado um ângulo, achar o logaritmo de uma de suas linhas trigonométricas.

2.°) Dado o logaritmo de uma linha trigonométrica de um ângulo compreendido entre 0° e 90°, achar esse ângulo.

35. Primeiro problema. Dado o arco, calcular o logaritmo.

1.° Caso: *Se o ângulo contém apenas graus e minutos, a tábua dá diretamente o logaritmo.*

Neste caso a leitura é imediata. Exemplos:

1) Achar o log sen 27° 12'.

Encontra-se a página que contém 27° (página apresentada) o que deve ser procurado no alto, pois $27° < 45°$.

Verifica-se, a seguir, na coluna da esquerda e de cima para baixo o número de minutos. À direita de 12' achamos $\bar{1},6000093$ que é o logaritmo pedido.

$$\log \text{sen } 27° 12' = \bar{1},6000093$$

Se fosse log sen 27° 13', teríamos que o logaritmo seria $\bar{1},6602550$ (de modo análogo ao dos logaritmos dos números naturais).

2) Achar log tg 62° 44'.

Verificando ao pé das páginas aquela que contém 62° acharíamos a página apresentada.

Procurando-se de baixo para cima, na última coluna à direita 44' e vendo na coluna da tangente (lida em baixo pois $62° > 45°$), achamos que

$$\log \text{tg } 62° 44' = 0,2878539$$

2.° Caso: *Se o ângulo contém graus, minutos e segundos ou graus e segundos.*

Neste caso, procuramos o logaritmo da função do arco imediatamente inferior ao dado. Verificamos a diferença tabular, calculamos por uma regra de três simples, o valor correspondente aos segundos e, a seguir somamos ao logaritmo encontrado, ou subtraímos conforme se tenha, respectivamente, seno e tangente (crescem com o arco) ou co-seno e co-tangente (decrescem com o arco). Poderemos usar a disposição prática dos exemplos a seguir.

Exemplos:

1) Achar o log sen 27° 12' 40".

É evidente que $27° 12' < 27° 12' 40'' < 27° 13'$.

Consideramos então o logaritmo do seno do arco imediatamente inferior ao dado, contido na tábua, obtemos:

$$\log \text{sen } 27^\circ\,12' = \bar{1},6600093.$$

A diferença tabular entre este logaritmo e o seguinte, que é o log sen 27° 13', é 2457.

Como sabemos que o seno cresce com o arco no 1.° quadrante e, admitindo a proporcionalidade entre os acréscimos do ângulo e os do logaritmo do seno, temos:

$$\begin{array}{l} 1' = 60'' - 2457 \\ \qquad 40'' - \quad x \end{array} \qquad \therefore\ x = \frac{2457 \times 40}{60} = 1638$$

Então
$$\begin{array}{rl} \log \text{sen } 27^\circ\,12' = & \bar{1},6600093 \\ \text{acréscimo para } 40'' = & +\ 1638 \\ \log \text{sen } 27^\circ\,12'\,40'' = & \bar{1},6601731 \end{array}$$

2) Achar o log cotg 27° 20' 12".

$$\log \text{cotg } 27^\circ\,20' = 0,2866141 \qquad \begin{array}{l} 60'' - 3097 \\ 12'' - \quad x \end{array}$$

$$\log \text{cotg } 27^\circ\,20'\,12'' = \begin{array}{r} -\ 619 \\ \hline 0,2865522 \end{array} \qquad x = \frac{3097 \times 12}{60} = 619,4$$

36. Segundo problema. Cálculo do ângulo conhecido o logaritmo da função trigonométrica.

1.° Caso: *Se o logaritmo está na tábua, acha-se o ângulo diretamente.* Exemplos:

1) $\log \cos x = \bar{1},6636768.$

$$x = 62^\circ\,33'$$

2) $\log \text{cotg } x = 0,2903399.$

$$x = 27^\circ\,8'$$

2.° Caso: *Se o logaritmo não está na tábua, procura-se nela o ângulo correspondente ao logaritmo imediatamente inferior ao dado,* ou o ângulo imediatamente superior ao dado, conforme se tenha, respectivamente, seno e tangente ou co-seno e co-tangente. Exemplos:

1) Dado $\log \text{tg } x = \bar{1},7093512$, achar x.

$$\begin{array}{rll} \log \text{tg } x = & \bar{1},7093512 & \\ \log \text{tg } 27^\circ\,7' & \underline{\quad 3488} & d = 3113 - 60'' \\ & 24 & 24 - s \\ x = 27^\circ\,7'\,0'',4 & & \end{array} \qquad s = \frac{24 \times 60}{3113} = 0,4$$

ou $x = 27^\circ\,7'$

2) $\log \cos x = \bar{1},6604210$, achar x.

Dispõe-se o cálculo assim:

$$\begin{array}{rll} \log \cos 62^\circ\,46' = & \bar{1},6605005 & 2455 - 60'' \\ \log \cos x = & \underline{\bar{1},6604210} & 795 - m \\ & 795 & \end{array}$$

$$m = \frac{795 \times 60}{2455} = 19,4$$

$x = 62^\circ\,46'\,19'',4$

37. Tábuas trigonométricas naturais.

Problema: *Dado um ângulo, achar o valor natural de suas linhas trigonométricas.*

a) Se o ângulo é dado em graus, procura-se na página da Tábua de Logaritmos adotada, o valor correspondente, com 4 decimais. Exemplos:

1) sen 30° = 0,5000
2) tg 45° = 1,0000
3) cos 40° = 0,7660
4) cotg 72° = 0,3249

b) Se o ângulo é dado em graus e minutos ou em graus, minutos e segundos, procura-se na página dos valores naturais o valor correspondente ao ângulo imediatamente inferior e a seguir calcula-se, admitindo-se a proporcionalidade entre os ângulos e os valores de suas linhas trigonométricas, o acréscimo do ângulo a ser feito. Exemplos:

1) Calcular o valor do sen 30° 20'.

sen 30° = 0,5000 e sen 31° = 0,5150

Como o seno cresce com o arco, no 1.º quadrante, temos:

$60' - 150$ (diferença entre os senos de 30° e 31°)

$$20' - m \quad \therefore \quad m = \frac{20 \times 150}{60} = 50$$

$\therefore \operatorname{sen} 30° 20' = 0{,}5050$

2) Calcular o valor da $\operatorname{tg} 20° 40'$.

Temos: $\operatorname{tg} 20° = 0{,}3640$ e $\operatorname{tg} 21° = 0{,}3839$

$$60' - 199$$
$$40' - m \quad m = \frac{40 \times 199}{60}$$

logo,

$$\operatorname{tg} 20° = 0{,}3640$$
$$+ \ 133$$
$$\operatorname{tg} 20° 40' = 0{,}3773$$

38. Exercícios para resolver.

1) Calcule $\log 2 \operatorname{sen} a \cos b$ para $a = 32° 20'$ e $b = 61° 15'$
2) Calcule $\log \operatorname{tg} a \operatorname{cot} b$ para $a = 72° 18'$ e $b = 40° 37'$

Determine:

3) $\log \operatorname{sen} 35° 40' 20''$
4) $\log \operatorname{tg} 78° 27' 42''$
5) $\log \cos 25° 48' 50''$
6) $\log \operatorname{cot} 40° 12' 17''$

Calcule, com o auxílio da tábua que dá os valores naturais das linhas trigonométricas, os valores de:

7) $2 \operatorname{sen} 40°$
8) $\cos 22° \operatorname{sen} 30°$
9) $\operatorname{tg} 45° \operatorname{cot} 69°$
10) $\operatorname{sen} 1° 9' 11''$

Ache os ângulos correspondentes aos logaritmos das linhas trigonométricas:

11) $\log \operatorname{sen} x = \bar{1}{,}5475218$
12) $\log \operatorname{sen} x = \bar{1}{,}9618463$
13) $\log \operatorname{tg} x = 0{,}3384008$
14) $\log \cos x = \bar{1}{,}9305979$
15) $\log \operatorname{cotg} x = \bar{1}{,}9593500$
16) $\log \operatorname{cotg} x = \bar{1}{,}9518326$

Respostas:

1) $\bar{1}{,}7118920$
2) $0{,}5627288$
3) $\bar{1}{,}7657784$
4) $0{,}6900526$
5) $\bar{1}{,}9543454$
6) $0{,}0730370$
7) $1{,}2856$
8) $0{,}4636$
9) $0{,}3839$
10) $0{,}020123$
11) $20° 39' 30''$
12) $65° 20'$
13) $65° 21' 20''$
14) $31° 32' 10''$
15) $47° 40' 39''$
16) $48° 10' 15''$

CAPÍTULO V

Equações Trigonométricas

1. Preliminares. Uma igualdade entre duas expressões, que contém as funções trigonométricas de um ângulo x, chama-se *equação trigonométrica*, quando se verifica apenas para certos valores desse ângulo x. Os valores do ângulo x que verificam a igualdade se denominam *soluções* da equação trigonométrica.

Uma equação trigonométrica pode conter linhas trigonométricas de um ou mais ângulos. Exemplos:

1) $\operatorname{sen} x = 1$
2) $\operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 4 = 0$
3) $\operatorname{sen} x + \cos y = 1{,}5$

Estudaremos, apenas, as equações trigonométricas que contenham apenas as funções trigonométricas de um só ângulo.

Como a cada valor atribuído a uma função trigonométrica corresponde uma infinidade de ângulos, então, uma equação trigonométrica possui uma infinidade de soluções, as quais formam grupos em número limitado, de arcos côngruos.

2. Resolução de uma equação trigonométrica. Resolver uma equação trigonométrica é, pois, achar os grupos limitados, dos infinitos arcos côngruos que a verificam.

Na resolução de uma equação trigonométrica de um só arco incógnito podemos usar um dos dois processos gerais seguintes:

I º) exprimimos todas funções trigonométricas em função em uma só, que consideramos como incógnita auxiliar, resolvemos a equação algébrica obtida e, tendo os valores

da função trigonométrica do arco incógnito, podemos, com auxílio das tábuas trigonométricas, ou não, determinar o grupo, ou os grupos, de soluções côngruas da equação;

2.º) podemos também resolver a equação exprimindo todas as funções trigonométricas nela contidas, em função da tangente do arco metade e, a seguir, tomando essa tangente para incógnita auxiliar, proceder como no primeiro processo.

O primeiro processo tem, muitas vezes, o inconveniente de a equação tornar-se irracional.

Esse inconveniente, todavia, desaparece quando usamos o segundo processo, que pode ser sempre usado desde que a solução da equação seja diferente de $(2k+1)\pi$.

Os processos gerais não são sempre aconselhados pois, em vários casos, existem processos especiais para resolver determinados tipos de equações, que tornam a resolução muito mais simples e mais rápida.

3. Equações trigonométricas simples. A resolução de uma equação trigonométrica pode, como já vimos sucintamente no n.º 2, ser conduzida à resolução de uma *equação simples*, de um dos seis tipos seguintes:

$$\operatorname{sen} x = a \qquad \cos x = b \qquad \operatorname{tg} x = c$$
$$\operatorname{cotg} x = m \qquad \sec x = n \qquad \operatorname{cosec} x = p$$

Vemos, assim, que resolver uma *equação simples* é determinar os valores dos ângulos que possuem a mesma função trigonométrica considerada.

Resolvamos a seguir as três primeiras dessas equações:

4. Resolução da equação $\operatorname{sen} x = a$. Exemplo:

Resolver: $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

As soluções não côngruas são, como é fácil de ver,

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

As soluções gerais (dois grupos de soluções côngruas) são:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ e } x_2 = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}$$

ou

$$x = 2k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$$

5. Resolução da equação $\cos x = b$. Para que exista a equação, devemos ter:

$$-1 \leqq b \leqq 1$$

Exemplo — Resolver: $\cos x = 0{,}6428$.

A menor solução é 50° (Tábua dos valores naturais),

As soluções gerais são:

$$x = 360^\circ k \pm 50^\circ \text{ ou } x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{18}$$

6. Resolução da equação $\operatorname{tg} x = c$. Como a tangente é definida em todo o campo real, a equação dada admite sempre solução.

Se a é a menor solução da equação, a sua solução geral será: $x = k\pi + a$

Exemplo: Resolver $\operatorname{tg} x = 0$.

O menor arco que satisfaz à equação é 0°.

A solução geral é $x = k\pi$.

7. Observação. Para resolver as três equações trigonométricas simples: $\operatorname{cotg} x = m$, $\sec x = n$ e $\operatorname{cosec} x = p$, podemos fazer recair essas equações em uma das três equações acabadas de estudar.

8. Tipos clássicos de equações trigonométricas.

Exemplo I. Resolver: $1 + \operatorname{sen}^2 x = 3\cos^2 x$.

Utilizando o processo geral de exprimir todas as linhas trigonométricas em função de uma delas, temos, escolhendo $\operatorname{sen} x$ para incógnita auxiliar:

$$1 + \operatorname{sen}^2 x = 3(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$
$$\therefore\ 1 + \operatorname{sen}^2 x = 3 - 3\operatorname{sen}^2 x\ \therefore\ 4\operatorname{sen}^2 x = 2$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (1)} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (2)}$$

A (1) tem para soluções não côngruas: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

e para soluções gerais: $x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

ou $$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$$

E a (2) tem para soluções não côngruas: $\pi + \frac{\pi}{4}$ e $2\pi - \frac{\pi}{4}$

As soluções gerais são:

$$x_1 = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \text{ e } x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

ou $$x = k\pi + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4}$$

Podemos dizer então que $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ representa as soluções côngruas do sistema.

Exemplo II. Resolver: $\operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 3$.

Adota-se ainda o primeiro processo geral, e escolhe-se $\cos x = y$ como incógnita auxiliar.

Temos: $1 - \cos^2 x + 3 \cos x = 3$

$\therefore \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$ ou $y^2 - 3y + 2 = 0$

Resolvendo a equação, achamos as raízes: 2 e 1.

Substituindo em $\cos x = y$, obtemos:

$$\cos x = 2 \quad \text{e} \quad \cos x = 1$$

A primeira equação é impossível.

E, $\cos x = 1$ ou $x = \text{arc cos } 1$

e temos a solução geral: $x = 2k\pi$.

Exemplo III. Resolver: $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x$.

Empregando o segundo processo geral, procuremos exprimir as funções trigonométricas da equação dada, em função da $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

De acordo com as fórmulas (XXV) da pág. 529, fazendo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ incógnita auxiliar, a equação dada ficará:

$$\frac{2y}{1-y^2} = \frac{1-y^2}{2y} + \frac{1+y^2}{2y}; \text{ para } y \neq 0 \text{ e } y \neq \pm 1,$$

temos: $4y^2 = 1 - 2y^2 + y^4 + 1 - y^4 \therefore 6y^2 = 2$ ou $y^2 = \frac{1}{3}$

e $$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A menor determinação de $\frac{x}{2}$ é $\pm \frac{\pi}{6}$, e temos, de um modo geral:

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{x}{2} = 2k\pi + \pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

Exemplo IV. Resolver: $\operatorname{sen} 2x = \cos x$.

Usamos aqui de um pequeno artifício. Podemos escrever a equação assim:

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x$$

$\therefore 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0 \therefore \cos x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$

e teremos:

$$\cos x = 0 \text{ e } 2 \operatorname{sen} x = 1 \therefore \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Suas soluções gerais são, respectivamente:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ e } x_2 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

e, $x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ e $x_2 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$

Ou, melhor: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

ou $$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

Exemplo V. Resolver: $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Resolvendo por artifício, temos:

$$(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{5}{8}$$

$\therefore\ 1 - 2\ \text{sen}^2 x\ \cos^2 x = \frac{5}{8}\quad \therefore\ 16\ \text{sen}^2 x\ \cos^2 x = 3$

$\therefore\ 4\ \text{sen}\ x\ \cos x = \pm\sqrt{3}\quad$ ou $\quad 2\ \text{sen}\ 2x = \pm\sqrt{3}$

e $$\text{sen}\ 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

As soluções gerais são:

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$$

Exemplo VI. Resolver: $\text{sen}\ x + \sqrt{3}\ \cos x = 2$
(Escola Naval - 1952)

Façamos logo $\text{tg}\ \varphi = \sqrt{3}$ e substituamos na equação dada.

Vem: $\text{sen}\ x + \text{tg}\ \varphi\ \cos x = 2$

$\therefore \text{sen}\ x\ \cos\varphi + \text{sen}\ \varphi\ \cos x = 2\ \cos\varphi\ .\ '\ .\ \text{sen}(x+\varphi) = 2\ \cos\varphi$

De $\text{tg}\ \varphi = \sqrt{3}$, achamos $\varphi = \text{arc tg}\ \sqrt{3} = 60°$ e $\cos\varphi = \frac{1}{2}$.

Então, $\text{sen}\ (x + 60°) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

a menor solução desta última equação é

$$x + 60° = 90°$$

e a solução geral é: $x + 60° = 360°\ k + 90°$

$$\therefore\ x = 360°\ k + 30°\quad \text{ou}\quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

7. Exercícios para resolver.

Resolver as equações trigonométricas.

1) $\text{sen}\ x = 0$ (U.E.G - 1972) 2) $\cos x = 1$ 3) $\text{tg}\ x = -1$

4) A expressão geral dos arcos cuja tangente é gual à co-tangente é . .
(COMSART - 73 - GB).

5) Os arcos positivos, menores do que 540° cuja tangente é $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
(E. Politécnica U. Cat. - Rio - 1957).

6) $2\ \text{tg}\ x - \frac{1}{\text{cotg}\ x} = 0{,}649\ 4$

7) $\text{tg}\ (x + 10°) = \text{tg}\ (2x - 5°)$

8) $\cos 7x = \cos 3x$ (FNF — 1965).

9) $2\ \text{sen}^2 x + 3 = 5\ \text{sen}\ x$

10) $\text{sen}\ x\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$
(Escola Naval - 1952).

11) $\cos x + \sqrt{3}\ \text{sen}\ x = 1$
(Escola Militar - 1938).

12) Resolver a equação $3\ \text{sen}\ x + 4\ \cos x = 5$, tomando para incógnita $\text{tg}\ \frac{x}{2}$.
(Escola Militar - 1940).

13) Resolver a equação trigonométrica $2\ \text{sen}^2 x - 3\ \text{sen}\ x\ \cos x + 4\ \cos^2 x = 3$.
(Esc. Aeronáutica - 1942).

14) Resolver a equação $\text{sen}\ 3x - 2\ \text{sen}\ 2x + \text{sen}\ x = 0$.
(Esc. Aeronáutica - 1952).

Resolver as equações:

15) $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ 18) $3\ \text{tg}\ x - 2\ \cos x = 0$ (ENE - 1961).

16) $\text{sen}\ 2x + \text{sen}\ x = 0$ 19) $2\ \cos 2x - \text{sen}\ 3x = 2$

17) $\sqrt{3}\ \text{sen}\ x + \cos x = \sqrt{2}$ 20) $\cos^3 x - 2\ \cos^2 x\ \text{sen}\ x = 3\ \text{sen}^2 x\ \cos x$

21) Dê a solução geral da equação
$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0$
(Esc. Fluminense Eng. - 1962)

22) Calcule os valores positivos de x menores que 2π tais que $\text{sen}\ x = \text{sen}\ 2x$
(PUC - 1963)

23) Dar a expressão geral dos arcos x para os quais
$2\ (\cos x + \sec x) = 5$

24) Resolver: $\text{cosec}^2 x - \sec^2 x - \text{cotg}^2 x - \text{tg}^2 x = -2$.
(UEG - 1969).

Resolver:

25) $\text{sen}\ x = -\cos x$ (E. N. Engenharia - 1957 e U.E.G. - 1972).

26) $4\ \text{sen}^2 x = \text{tg}\ x$ (E. P. C. Aeronáutica - 1959).

27 $\text{tg}\ 3x = \text{tg}\ x$ (U.E.G. - 1970)

28) $\text{tg}\ (30° + x) = 3\ \text{tg}\ x$ (E. Química U. Recife - 1955)

29) $\sec x\ \text{tg}^2 x\ (1 - 2\ \cos x) = 0$ (E. N. Engenharia - 1957).

30) $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ (E. P. C. Aeronáutica - 1959).

31) $\text{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\ \text{sen}\ x\ \cos x + 3\ \cos^2 x = 0$
(E. Aeronáutica - 1958).

32) $\text{sen}^2 x - 2\ \text{sen}\ x\ \cos x + \cos^2 x = 0$ (E. Politécnica U. Cat. - Rio - 1957).

33) $\text{sen}\ x = \sec x - \cos x$ (E. Flum. Engenharia - 1957)

34) $2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x \cos x - 4\cos^2 x = 1$ (E. N. Engenharia – 1957).

35) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \cos x = \dfrac{1}{\sec^2 x} - \operatorname{sen}^2 x \,.\, \cos x$ (E. N. Engenharia – 1956).

36) $\cos^2 x - \operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x = 1$ (F. N. Filosofia – 1950).

37) $2(\operatorname{sen} x + \cos x) = \sec x$ (E. N. Eng. – 1959).

RESPOSTAS:

1) $x = k\pi$

2) $x = 2k\pi$

3) $k\pi - \dfrac{\pi}{4}$

4) $k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$

5) 150°, 330° e 510°

6) $x = 180° k + 38°$

7) $x = -180° k + 15°$

8) $x = \dfrac{k\pi}{2}$ e $x = \dfrac{k\pi}{5}$

9) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

10) $x = 180° k + 22° 30'$ e $x = 180° k + 67° 30'$

11) $x = 2k\pi$ e $x = (2k+1)\pi - \dfrac{\pi}{3}$

12) $x = 360° k + 36° 52' 10''$

13) $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ e $x = 180° k + (-1)^k \times 18° 26' 5''$

14) $x = k\pi$ e $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

15) $x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$

16) $x = k\pi$ e $x = (2k+1)\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

17) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6}$ e $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

18) $x = k\pi + (-1)^k \dfrac{\pi}{6}$

19) $x = 2k\pi$ e $x = k\pi - (-1)^k \dfrac{\pi}{6}$

20) $x = k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ e $x = 180° k + 18° 26' 5''$

21) $2k\pi + (-1)^k \dfrac{\pi}{4}$

22) 60°, 180° e 300°

23) $2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

24) $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ e $x = k\pi - (-1)^k \dfrac{\pi}{6}$

25) $k\pi + \dfrac{3\pi}{4}$

26) $k\pi + \dfrac{\pi}{12}$ e $k\pi + \dfrac{5\pi}{12}$

27) $\dfrac{k\pi}{2}$

28) $k\pi + \dfrac{\pi}{6}$

29) $k\pi$ e $2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

30) $k\pi/3 + (-1)^k \pi/3$

31) $k\pi + \pi/3$

32) $k\pi + \pi/4$

33) $k\pi$ e $k\pi + \pi/4$

34) $180° k + 45°$ e $180° k - 78° 41' 24''$

35) $k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$

36) $k\pi \pm \pi k + \operatorname{arc\,sen} 4/5$

37) $x = k\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$

CAPÍTULO VI

Resolução Trigonométrica dos Triângulos

1. Preliminares. Já vimos, no início da unidade IV, que o objetivo da Trigonometria é a *resolução dos triângulos* pelo cálculo.

Chama-se *resolver um triângulo* calcular certos elementos do triângulo, conhecidos outros.

Em geral, dizemos que um triângulo tem seis *elementos principais*: três lados e três ângulos internos. E, dizemos, também, que resolver um triângulo é achar, conhecidos 3 desses elementos, sendo um deles, pelo menos, linear, os outros três elementos principais.

Quando o triângulo é retângulo, um dos três elementos dados é o ângulo reto.

Convencionaremos chamar, no estudo desta unidade, os ângulos de A, B e C, e os lados de a, b e c. No triângulo retângulo representaremos o ângulo reto por A e a hipotenusa será, pois, a.

2. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo.

1.ª) *Em um triângulo retângulo, qualquer cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo co-seno do ângulo adjacente.*

Seja um triângulo retângulo ABC (fig. 25), cujos lados $CB = a$ e $CA = b$ estejam situados, respectivamente, sobre dois eixos orientados CB e CA.

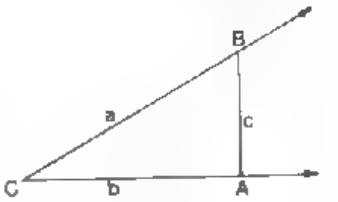


FIG. 25

Projetando o vetor $\vec{a}$ sobre o eixo CA, temos:

$$\overline{CA} = \overline{CB}\cos C \therefore \boxed{b = a\cos C} \quad (1)$$

Projetando, analogamente, $\vec{a}$ sobre o eixo suporte de c, temos:

$$\overline{BA} = \overline{CB}\cos B \therefore \boxed{c = a\cos B} \quad (2)$$

Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, podemos escrever as igualdades (1) e (2) assim:

$$b = a\cos(90^\circ - B) = a\operatorname{sen} B \quad (3)$$

e

$$c = a\cos(90^\circ - C) = a\operatorname{sen} C \quad (4)$$

As igualdades (1), (2), (3) e (4) justificam a 1.ª relação.

2.ª) *Em todo triângulo retângulo, qualquer cateto é igual ao produto do outro pela tangente do ângulo oposto ou pela co-tangente do ângulo adjacente.*

Para comprovarmos esta relação, basta dividirmos membro a membro, (3) por (2) e (4) por (1), obtemos:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B \therefore \boxed{b = c\operatorname{tg} B} \quad (5)$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C \therefore \boxed{c = b\operatorname{tg} C} \quad (6)$$

E, como B e C são complementares, obtemos:

$$b = c\operatorname{tg}(90^\circ - C) = c\operatorname{cotg} C \quad (7)$$

e

$$c = b\operatorname{tg}(90^\circ - B) = b\operatorname{cotg} B \quad (8)$$

3.ª) *Em virtude de serem os ângulos agudos do triângulo retângulo complementares, temos:*

$$B + C = 90^\circ$$

4.ª) *De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

5.ª) *A área de um triângulo retângulo é o semiproduto dos catetos.*

$$S = \frac{bc}{2}$$

3. Resolução dos triângulos retângulos. É realizada com auxílio das relações anteriores. E, para que seja possível, é necessário que sejam dados um dos lados e um ângulo ou dois quaisquer de seus lados, a fim de que se possam determinar os outros três.

Esses casos denominam-se *clássicos* e são quatro, a saber:

1.º) são dados a hipotenusa e um ângulo agudo;
2.º) são dados um cateto e um ângulo agudo;
3.º) são dados dois catetos;
4.º) são dados a hipotenusa e um cateto.

Devemos determinar, sempre que possível, as fórmulas de resolução permitindo achar os elementos desconhecidos apenas em função dos elementos dados.

Assim poderemos determinar um elemento qualquer, sem ter necessidade de achar outros e trabalharemos sempre com elementos exatos.

CASOS CLÁSSICOS

4. Primeiro caso.

Dados $\begin{cases} a \\ B \end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases} C,\ b,\ c \\ S \end{cases}$

Fórmulas: $\begin{cases} C = 90^\circ - B \\ b = a\operatorname{sen} B \\ c = a\cos B \end{cases}$ $S = \dfrac{bc}{2} = \dfrac{1}{2}a^2\operatorname{sen} B\cos B$

Donde: $\begin{cases} \log b = \log a + \log\operatorname{sen} B \\ \log c = \log a + \log\cos B \\ \log S = 2\log a + \log\operatorname{sen} B + \log\cos B + \operatorname{colog} 2 \end{cases}$

Exemplo: Resolver o triângulo, dados:

$$A = 90^\circ \quad a = 358{,}25\text{m} \quad B = 35^\circ\,40'\,12''$$

Cálculos auxiliares

$\log 358{,}2$	$= 2{,}5541256$	$\log 2$	$= 0{,}3010300$
$0{,}5$	606		
$\log a$	$= 2{,}5541862$		
$\log \operatorname{sen} 35^\circ\,40'$	$= \bar{1}{,}7657197$	$\log \cos 35^\circ\,40'$	$= \bar{1}{,}9097821$
$12''$	352	$12''$	181
$\log \operatorname{sen} B$	$= \bar{1}{,}7657549$	$\log \cos B$	$= \bar{1}{,}9097640$

Cálculos definitivos

Cálculo de C: $C = 90^\circ - 35^\circ\ 40'\ 12'' = 54^\circ\ 19'\ 48''$

Cálculo de b		Cálculo de c	
$\log a$	$= 2{,}5541862$	$\log a$	$= 2{,}5541862$
$\log \operatorname{sen} B$	$= \bar{1}{,}7657549$	$\log \cos B$	$= \bar{1}{,}9097640$
$\log b$	$= 2{,}3199411$	$\log c$	$= 2{,}4639502$
20890	9384	2910	8930
	27		572
$\therefore\ b = 208{,}90\text{m}$		$\therefore\ c = 291{,}03\text{m}$	

Cálculo de S

$$\begin{array}{rr} 2\log a = & 5{,}1083724 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}7657549 \\ \log \cos B = & \bar{1}{,}9097640 \\ \operatorname{colog} 2 = & \bar{1}{,}6989700 \\ \log S = & 4{,}4828613 \\ 3039 & 7307 \\ & 1306 \end{array} \qquad d = 1429$$

$$\therefore\ S = 30399{,}13\text{m}^2$$

Observação: É aconselhável efetuar primeiro os cálculos auxiliares; podemos, assim, calcular, primeiramente, os logaritmos de todos os números e, após, os das linhas trigonométricas.

5. Segundo caso.

Dados $\begin{cases} b \\ B \end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases} C,\ a,\ c \\ S \end{cases}$

Fórmulas: $\begin{cases} C = 90^\circ - B \\ a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad S = \dfrac{b\,c}{2} = \dfrac{1}{2}\,b^2 \operatorname{cotg} B \\ c = b \operatorname{cotg} B \end{cases}$

Donde: $\begin{cases} \log a = \log b - \log \operatorname{sen} B \\ \log c = \log b + \log \operatorname{cotg} B \\ \log S = 2\log b + \log \operatorname{cotg} B + \operatorname{colog} 2 \end{cases}$

Exemplo: Resolver o triângulo, dados:

$A = 90^\circ \qquad b = 184{,}523\text{m} \qquad B = 27^\circ\ 48'\ 15'',2$

Cálculos auxiliares

$\log 184{,}5$	$= 2{,}2659964$		
0,23	$= 541$		
$\log b$	$= 2{,}2660505$	$\log 2$	$= 0{,}3010300$
$\log \operatorname{sen} 27^\circ\ 48'$	$= \bar{1}{,}6687461$	$\log \operatorname{cotg} 27^\circ\ 48'$	$= 0{,}2779915$
$15'',2$	607	$15'',2$	-776
$\log \operatorname{sen} B$	$= \bar{1}{,}6688068$	$\log \operatorname{cotg} B$	$= 0{,}2779139$

Cálculos definitivos

Cálculo de C: $C = 90^\circ - 27^\circ\ 48'\ 15'',2 = 62^\circ\ 11'\ 44'',8$

Cálculo de a		Cálculo de c	
$\log b$	$= 2{,}2660505$	$\log b$	$= 2{,}2660505$
$-\log \operatorname{sen} B$	$= \bar{1}{,}6688068$	$\log \operatorname{cotg} B$	$= 0{,}2779139$
$\log a$	$= 2{,}5972437$	$\log c$	$= 2{,}5439644$
3955	1465	3499	9439
	972		205
$\therefore\ a = 395{,}588\text{m}$		$\therefore\ c = 349{,}916$	

Cálculo de S

$$\begin{array}{rr} 2\log b = & 4{,}5321010 \\ \log \operatorname{cotg} B = & 0{,}2779139 \\ \operatorname{colog} 2 = & \bar{1}{,}6989700 \\ \log S = & 4{,}5089849 \\ 3228 & 9335 \\ & 514 \end{array} \qquad d = 1345$$

$$\therefore\ S = 32283{,}82\text{m}^2$$

6. Terceiro caso.

Dados $\begin{cases} b \\ c \end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases} a,\ B,\ C \\ S \end{cases}$

Fórmulas: $\begin{cases} \operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c} \qquad C = 90^\circ - B \\ a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad S = \dfrac{b\,c}{2} \end{cases}$

Observação: Aqui o cálculo de a não foi feito diretamente com os dados, todavia, a expressão $a = \sqrt{b^2+c^2}$, que dá diretamente a, não é calculável por logaritmos e, para torná-la logarítmica lançaríamos mão de um ângulo auxiliar, que é, exatamente, o ângulo B.

Daí se justificar o cálculo de a pela fórmula $a = \frac{b}{\text{sen } B}$.

Temos ainda $\begin{cases} \log \text{tg } B = \log b - \log c \\ \log a = \log b - \log \text{sen } B \\ \log S = \log b + \log c + \text{colog } 2 \end{cases}$

Exemplo: Resolver o triângulo, dados:

$b = 286\text{m}$ e $c = 321\text{m}$

Cálculos auxiliares

$\log b = 2{,}4563660$
$\log c = 2{,}5065050$

$\log 2 = 0{,}3010300$

Cálculos definitivos

Cálculo de B

$\log b = 2{,}4563660$
$\log c = 2{,}5065050$
$\log \text{tg } B = \overline{1}{,}9498610$
$41° 41'$ 6075
2535

$\therefore B = 41° 41' 59'',8$

Cálculo de a

$\log b = 2{,}4563660$
$-\log \text{sen } B = \overline{1}{,}8229716$
$\log a = 2{,}6333944$
$4299 =$ 3674
270

$\therefore a = 429{,}927\text{m}$

Cálculo de log sen B

$\log \text{sen } 41° 41' = \overline{1}{,}8228302$
$59'',8$ 1414
$\log \text{sen } B = \overline{1}{,}8229716$

Cálculo de C

$C = 90 - B = 48° 18' 0'',2$

Cálculo de S

$\log b = 2{,}4563660$
$\log c = 2{,}5065050$
$\text{colog } 2 = \overline{1}{,}6989700$
$\log S = 4{,}6618410$
4590 8127
283

$\therefore S = 45902{,}99\text{m}^2$

7. Quarto caso.

Dados $\begin{cases} a \\ \blacksquare \end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases} c,\ B,\ C \\ S \end{cases}$

Fórmulas: $\begin{cases} \text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad C = 90° - B \\ c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{(a+b)\ (a-b)} \\ S = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2}\, b\, \sqrt{(a+b)\,(a-b)} \end{cases}$

Observação: Não há vantagem em calcular C diretamente, mediante a fórmula $\cos C = \frac{b}{a}$.

Só empregaríamos esta fórmula, se fosse pedido para calcular, apenas, o ângulo C.

Temos ainda: $\begin{cases} \log \text{sen } B = \log b - \log a \\ \log c = \frac{1}{2}\,[\log (a+b) + \log (a-b) \\ \log S = \log b + \log c + \text{colog } 2 \end{cases}$

Exemplo: Resolver o triângulo, dados:

$a = 490\text{m}$ $\quad b = 382{,}5\text{m}$

Cálculos auxiliares

$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log a = 2{,}6901961$
$\log b = 2{,}5826314$

$a - b = 107{,}5$ e $a+b = 872{,}5$
$\log (a+b) = 2{,}9407654$
$\log (a-b) = 2{,}0314085$

Cálculos definitivos

Cálculo de B

$\log b = 2{,}5826314$
$-\log a = 2{,}6901961$
$\log \text{sen } B = \overline{1}{,}8924353$

$\therefore B = 51° 19'$

Cálculo de C

$C = 90° - 51° 19' = 38° 41'$

Cálculo de c

$\log (a+b) = 2{,}9407654$
$\log (a-b) = 2{,}0314085$
$2 \log c = 4{,}921739$

$\therefore \log c = 2{,}4860869$

3062 052
817

$\therefore c = 306{,}25\text{m}$

Observação: O log c, já calculado, vai ser útil no cálculo de S.

Cálculo de S

$\log b = 2{,}5826314$
$\log c = 2{,}4860869$
$\text{colog } 2 = \overline{1}{,}6989700$
$\log S = 4{,}7676883$
5857 752
131

$\therefore S = 58571{,}76\text{m}^2$

8. Aplicações.

1) Um engenheiro situado com um teodolito (aparelho que permite a medida de ângulos) a 100m de distância de um edifício, o vê sob um ângulo de 22°. Qual a altura desse edifício?

Temos, pela segunda relação dos triângulos retângulos,

$$h = d \text{ tg } 22°$$

na tábua de valores naturais vemos que $\text{tg } 22° = 0{,}4040$

$$\therefore\ h = 40{,}40\text{m}$$

2) Um engenheiro sabia que o maior lado de um terreno triangular media 1718,4m, e desejava saber do comprimento dos outros dois lados, sabendo que o maior ângulo e o menor mediam, respectivamente, 90° e 17°. Como procederia o engenheiro, sem ir ao terreno?

Temos: $a = 1718{,}4\text{m}$ $B = 17°$. Precisamos calcular b e c. Com as fórmulas do *Primeiro caso*, ele teria:

Cálculos auxiliares

$\log 1718{,}4 = 3{,}2351243$	$\log \cos 17° = 1{,}9805963$
$\log \text{sen } 17° = \overline{1},4654353$	
Cálculo de b	Cálculo de c
$\log a = 3{,}2351243$	$\log a = 3{,}2351243$
$\log \text{sen } B = \overline{1},4654353$	$\log \cos B = \overline{1},9805963$
$\log b = 2{,}7010596$	$\log c = 3{,}2157206$
$\therefore\ b = 502{,}41\text{m}$	$\therefore\ c = 1643{,}31\text{m}$

3) Num triângulo retângulo ABC, a hipotenusa mede 28m e a diferença entre os ângulos agudos é de 17° 28'.

Calcular o volume gerado pela rotação completa desse triângulo em torno do cateto maior. (F. N. Arquitetura – 1949).

Temos: $B - C = 17° 28'$

$B + C = 90°$

$B = 107° 28'$ $\quad\therefore\ B = 53° 44'$ e $a = 28\text{m}$

O volume do cone é $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Fazendo $h = b$ e $R = c$, temos:

$$h = a \text{ sen } B \quad \text{e} \quad R = a \cos B$$

$$\therefore\ V = \frac{\pi a^2 \cos^2 B \,.\, a \text{ sen } B}{3} = \frac{\pi a^3 \cos^2 B \text{ sen } B}{3}$$

$$\therefore\ \log V = \log \pi + 3 \log a + 2 \log \cos B + \log \text{sen } B + \text{colog } 3$$

ou,

$\log \pi = 0{,}4970679$

$3 \log a = 4{,}3414740$

$\text{colog } 3 = \overline{1},5228787$

$2 \log \cos B = \overline{1},5439744$

$\log \text{sen } B = \overline{1},9064819$

$\log V = 3{,}8118769$

6484 — 8430 — 339 $\qquad d = 670$

$$\therefore\ V = 6484{,}506\text{m}^3$$

9. Exercícios para resolver.

Resolver um triângulo retângulo, dados:

1) $\begin{cases} a = 378{,}92\text{m} \\ B = 31° 23' 17'',8 \end{cases}$ $\qquad$ 3) $\begin{cases} b = 43{,}18\text{m} \\ c = 84{,}64\text{m} \end{cases}$

2) $\begin{cases} b = 265\text{m} \\ B = 48° 18' \end{cases}$ $\qquad$ 4) $\begin{cases} a = 5\,724{,}19\text{m} \\ b = 3\,518{,}45\text{m} \end{cases}$

Calcular as áreas dos triângulos retângulos, conhecidos:

5) $\begin{cases} a = 48{,}645\text{m} \\ b = 29{,}513\text{m} \end{cases}$ $\qquad$ 7) $\begin{cases} a = 2\,625{,}56\text{m} \\ B = 42° 26' 37'' \end{cases}$

6) $\begin{cases} b = 234{,}8\text{m} \\ c = 4\,672{,}5\text{m} \end{cases}$ $\qquad$ 8) $\begin{cases} b = 265\text{m} \\ C = 43° 42' \end{cases}$

9) Resolver o triângulo retângulo, dados:

$a = 496{,}738$ e $b = 305{,}624$

(Escola Militar – 1934).

10) Resolver um triângulo retângulo, dados:

$a = 3\,499{,}735\text{m}$ e $c = 1\,485{,}524\text{m}$

(Esc. N. Engenharia – 1933).

11) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10m. Um dos ângulos é a metade do outro. Calcular (trigonometricamente) o cateto menor. (E. Aeronáutica – 1958).

12) Num triângulo retângulo um ângulo mede 60° e a hipotenusa $20\sqrt{3}$ metros. Achar os catetos, sem o auxílio das tábuas.

13) De um navio vê-se, sob um ângulo de 13° 52' o vértice de um farol distante de 300m. Qual a altura do farol?

14) Sem o auxílio das tábuas, calcular os lados b e c de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede $\sqrt{5}$ metros, sabendo-se que:

$$\text{sen } B = 2 \text{ sen } C$$

15) Calcular com o auxílio das tábuas, os ângulos de um triângulo retângulo cuja razão entre os catetos é $2 + \sqrt{3}$.

(Escola Militar – 1941).

16) Qual é o ângulo de elevação do sol quando a sombra de um poste de iluminação é $\frac{3}{2}$ da sua altura?

17) Num triângulo retângulo a diferença entre os ângulos agudos é 13° 30' e a área mede 150m². Calcular a hipotenusa e os catetos.

(F. N. Arquitetura – 1947).

18) Resolver (trigonometricamente) o triângulo retângulo, sabendo-se que

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b \times c = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(Esc. Aeronáutica – 1952-1953).

19) Em um triângulo retângulo dá-se $c = 348\,228{,}43$m e $B = 48° 35' 27''$. Calcular b. Calcular, em seguida, de que quantidade se deve aumentar B para que c, conservando-se constante, b seja aumentado de 20m.

(Esc. N. Engenharia – 1946).

Respostas:

1) $\begin{cases} C = 58° 36' 42'' \\ b = 457{,}722\text{m} \\ c = 750{,}296\text{m} \end{cases}$

2) $\begin{cases} C = 43° 42' \\ a = 366{,}53\text{m} \\ c = 253{,}24\text{m} \end{cases}$

3) $\begin{cases} B = 51° 15' 45'' \\ C = 38° 44' 15'' \\ a = 55{,}357\text{m} \end{cases}$

4) $\begin{cases} a = 4\,515{,}18\text{m} \\ C = 52° 4' 21'',2 \\ B = 37° 55' 38'',8 \end{cases}$

5) 571,46m²

6) 548 550,60m²

7) 1 716 533m²

8) 33 554,26m²

9) $B = 37° 58' 15'',2 \quad C = 52° 1' 44'',8 \quad c = 391{,}591$

10) $a = 3\,168{,}8\text{m} \quad C = 25° 7' 1'' \quad B = 64° 52' 59''$

11) 5m

12) 30m e $10\sqrt{3}$ m

13) 74,057m

14) $b = 2$m e $c = 1$m

15) 90°, 75° e 15°

16) 33° 41' 24''

17) $a = 24{,}84$m, $b = 15{,}37$m e $c = 19{,}50$m

18) $A = 90°$, $B = 30°$, $C = 60°$, $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad c = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

19) $b = 394\,852{,}63$m e 8''

10. Relações entre os elementos de um triângulo qualquer (obliquângulo).

1.º) Teorema dos senos: Muito conhecido como "lei dos senos", enuncia-se assim:

> Em qualquer triângulo, os lados e os senos de seus ângulos opostos estão numa mesma razão, igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Seja um triângulo ABC inscrito em círculo O, de raio R (fig. 26).

Tracemos o diâmetro $\overline{AD}$ e unamos a sua extremidade D ao vértice B.

O triângulo ABD é retângulo em B, por estar inscrito em um semicírculo.

$$\therefore\ c = AD \text{ sen } \widehat{ADB}$$

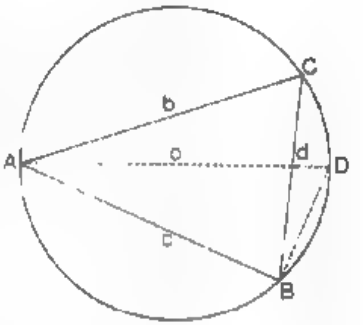


FIG. 26

Mas, $\overline{AD} = 2R$ e $\widehat{ADB} = \hat{C}$, como ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco. Então,

$$c = 2R \text{ sen } C \ \therefore\ \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

De modo análogo obteríamos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = 2R \qquad \frac{b}{\text{sen } B} = 2R$$

Logo: $$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

2.º) Teorema dos co-senos:

> O quadrado de um lado de qualquer triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

a) Se o lado a de um triângulo ABC está oposto a um ângulo agudo (fig. 27) e $\overline{CD}$ é a altura de ABC, então, da Geometria Elementar, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \overline{AD}$$

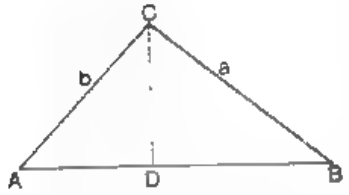


FIG. 27

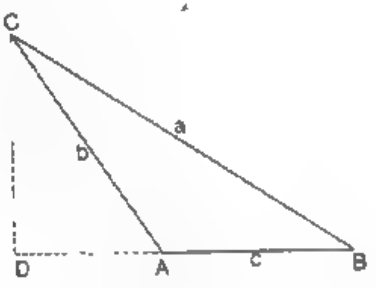


FIG. 28

Mas, do triângulo retângulo ADC, temos (n.º 2):

$$\overline{AD} = b \cos A$$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

b) Se o lado a de um triângulo ABC está oposto a um ângulo obtuso (fig. 28) e CD é a altura de ABC, também da Geometria Elementar, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c\,\overline{AD}$$

Mas, do triângulo retângulo ADC vem:

$$\overline{AD} = b \cos (180^\circ - A) = b\,(-\cos A) = -b \cos A$$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De modo análogo provaríamos que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

3.º) Expressão trigonométrica da área:

> A área de um triângulo qualquer é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo por eles formado.

Seja um triângulo ABC e tracemos sua altura $\overline{CD}$.

Da Geometria Elementar sabemos que a área de ABC é:

$$S = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{c}.\overline{CD}}{2}$$

Se o ponto D está no interior de AB (Fig. 27), do ADC temos $\overline{CD} = b \operatorname{sen} A$ $\therefore$ $S = \dfrac{bc \operatorname{sen} A}{2}$.

Se o ponto D não está no interior de AB (fig. 28), do triângulo CDA obtemos

$$\overline{CD} = b \operatorname{sen} \widehat{DAC} = b \operatorname{sen} (180^\circ - A) = b \operatorname{sen} A$$

$$\therefore\ S = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}$$

Analogamente, achamos:

$$S = \frac{ac \operatorname{sen} B}{2} \quad \text{e} \quad S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$$

4.º) Do *Teorema angular de Thales*, temos:

$$A + B + C = 180^\circ$$

11. Casos clássicos da resolução de triângulo quaisquer. Estudaremos os quatro seguintes casos clássicos:

1.º) são dados um lado e dois ângulos;
2.º) são dados dois lados e o ângulo por eles formado;
3.º) são dados os três lados;
4.º) são dados dois lados e o ângulo oposto a um deles.

12. Primeiro caso.

$$\text{Dados} \begin{cases} A \\ B \\ a \end{cases} \qquad \text{Pedem-se} \begin{cases} C,\ a,\ b \\ \\ S \end{cases}$$

Sabemos $C = 180^\circ - (A + B)$

Da 1.ª relação dos triângulos obliquângulos (n.º 10), temos:

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} \quad \text{e} \quad a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

e pela 3.ª relação (n.º 10):

$$S = \frac{1}{2}\, ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \cdot c \operatorname{sen} B = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$$

FÓRMULAS:

$$C = 180° - (A + B)$$

$$\log a = \log c + \log \operatorname{sen} A + \operatorname{colog} \operatorname{sen} C$$
$$\log b = \log c + \log \operatorname{sen} B + \operatorname{colog} \operatorname{sen} C$$
$$\log S = 2 \log c + \log \operatorname{sen} A + \log \operatorname{sen} B + \operatorname{colog} \operatorname{sen} C + \operatorname{colog} 2$$

Exemplo: Resolver o triângulo, dados:

$A = 56° 19' 40''$ $\quad B = 65° 20' 20''$ $\quad c = 13{,}56\text{m}$

Cálculos auxiliares

$\log c = 1{,}1322597$	$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log \operatorname{sen} A = \bar{1}{,}9202397$	$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}{,}9299891$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}9584643$	$\operatorname{colog} \operatorname{sen} C = 0{,}0700109$
$A + B = 121° 40'$	

Cálculos definitivos

Cálculo de C: $C = 180° - (A+B) = 180° - 121° 40' = 58° 20'$

Cálculo de a

$$\begin{array}{rr} \log c = & 1{,}1322597 \\ \log \operatorname{sen} A = & \bar{1}{,}9202397 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} C = & 0{,}0700109 \\ \hline \log a = & \bar{1}{,}1225103 \end{array}$$

1325 — 2159 — 2944

$\therefore\ a = 13{,}258\text{m}$

Cálculo de S

$$\begin{array}{rr} 2 \log c = & 2{,}2645194 \\ \log \operatorname{sen} A = & \bar{1}{,}9202393 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}9584643 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} C = & 0{,}0700109 \\ \operatorname{colog} 2 = & \bar{1}{,}6989700 \\ \hline \log S = & 1{,}9122043 \end{array}$$

8169 — 1689 — 354

$\therefore\ S = 81{,}6966\text{m}^2$

Cálculo de b

$$\begin{array}{rr} \log c = & 1{,}1322597 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}9584643 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} C = & 0{,}0700109 \\ \hline \log b = & 1{,}1607349 \end{array}$$

1447 — 4685 — 2664

$\therefore\ b = 14{,}478\text{m}$

13. Segundo caso.

Dados $\begin{cases} a \\ b \\ C \end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases} A,\ B \text{ e } c \\ S \end{cases}$

Cálculos de B e C

Temos: $A + B = 180° - C \therefore \dfrac{A+B}{2} = 90° - \dfrac{C}{2}$ (1)

Da 1.ª relação (n.º 10), obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

Ou, por uma propriedade das proporções:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$$

Transformando a expressão do 2.º membro, de acordo com as expressões (XXVII, pág. 532):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}} \therefore \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \quad (2)$$

Mas, de (1): $\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2} = \operatorname{cotg} \dfrac{C}{2}$ e a (2) ficará:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \quad (3)$$

como conhecemos a, b e C então podemos, por meio de (1) e (3), calcular os valores:

$$\frac{A+B}{2} = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{A-B}{2} = \beta$$

e, finalmente, achar $\begin{cases} A = \alpha + \beta \\ B = \alpha - \beta \end{cases}$

Cálculo de c: Da 1.ª relação (n.º 10) obtemos:

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

Cálculo de S: De acordo com a 3.ª relação (n.º 10), vem:

$$S = \frac{1}{2}\,ab \operatorname{sen} C$$

Exemplo: Resolver o triângulo, dados:

$a = 217{,}2\text{m} \qquad b = 154{,}9\text{m} \qquad C = 47°$

Cálculos auxiliares

$a - b = 62{,}3$	$a + b = 372{,}1$
$\log (a - b) = 1{,}7944880$	$\log (a + b) = 2{,}5706597$
$\log a = 2{,}3368598$	$\log b = 2{,}1900514$
$\log \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 0{,}3616981$	$\log \operatorname{sen} C = \overline{1}{,}8641275$

Cálculos definitivos

Cálculo de A e B

$\log (a - b) = 1{,}7944880$
$\operatorname{colog} (a + b) = \overline{3}{,}4293408$
$\log \operatorname{cot} \frac{C}{2} = \underline{0{,}3616981}$

$\therefore \log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \overline{1}{,}5855264$

$\frac{A-B}{2} = 21° 3' 34'',4 = \beta$

$\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2} = 66° 30' = \alpha$

Como $A = \alpha + \beta$ e $B = \alpha - \beta$
$A = 87° 33' 34'',4$
$B = 45° 26' 25'',6$

$\log \operatorname{sen} B = \overline{1}{,}8527980$

Cálculo de c

$\log b = 2{,}1900514$
$\log \operatorname{sen} C = \overline{1}{,}8641275$
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0{,}1472020$
$\log c = 2{,}2013809$

$\therefore c = 158{,}96\text{m}$

Cálculo de S

$\log a = 2{,}3368598$
$\log b = 2{,}1900514$
$\log \operatorname{sen} C = \overline{1}{,}8641275$
$\operatorname{colog} 2 = \overline{1}{,}6989700$
$\log S = 4{,}0900087$

$\therefore S = 12302{,}93\text{m}^2$

14. Terceiro caso.

Dados $\begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases} A,\ B,\ C \\ S \end{cases}$

Cálculos de A, B e C.

Da 2.ª relação (n.º 10), achamos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},\quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - a^2}{2\,ac} \text{ e } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

Como essas fórmulas não são calculáveis por logaritmos, efetuemos essa transformação.

Seja: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$.

Calculemos separadamente $1 - \cos A$ e $1 + \cos A$ e, a seguir, mediante a fórmula $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$, achamos $\frac{A}{2}$ e portanto A.

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,bc} =$$

$$= \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2\,bc}$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,bc} =$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2\,bc}$$

Fazendo: $a + b + c = 2p$ e subtraindo a ambos os membros $2a$, $2b$ e $2c$, teríamos, respectivamente:

$$a + b - c = 2\,(p - c)$$
$$a + c - b = 2\,(p - b)$$
$$b + c - a = 2\,(p - a)$$

Temos, então:

$$1-\cos A=\frac{2\,(p-c)\,2\,(p-b)}{2\,bc}\quad\text{e}\quad 1+\cos A=\frac{2p\,.\,2\,(p-a)}{2\,bc}$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

ou, ainda $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{p-a}\sqrt{\dfrac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}$

e fazendo: $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}$ (r raio círculo inscrito no triângulo)

Temos: $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a}$.

Procedendo de modo análogo com as expressões de cos B e cos C, teríamos:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}\quad\text{e}\quad\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

Essas três expressões permitem calcular A, B e C.

Cálculo de S; como da Geometria Elementar:

$$S=pr$$

então, $S=p\sqrt{\dfrac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}=\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$

Exemplo: Resolver o triângulo, sendo dados:

$a=50\text{m}\qquad b=40\text{m}\qquad c=25\text{m}$

Cálculos auxiliares

$p=57{,}5;\ \ p-a=7{,}5$
$\log(p-a)=0{,}8750613$
$\log(p-b)=1{,}2430380$
$\log(p-c)=1{,}5118834$
$\operatorname{colog} p=\underline{2{,}2403322}$
$2\log r=1{,}8703149$
$\therefore\ \log r=0{,}9351574$

$p-b=17{,}5;\ \ p-c=32{,}5$
$\log p=1{,}7596678$

Cálculos definitivos

Cálculo de A

$\log r=0{,}9351574$
$-\log(p-a)=\underline{0{,}8750613}$
$\log\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=0{,}0600961$

$48°\,57'\ \ldots\ldots\ 716$

$\therefore\ \dfrac{A}{2}=40°\,57'\,6''$

$\therefore\ A=97°\,54'\,12''$

Cálculo de B

$\log r=0{,}9351574$
$-\log(p-b)=\underline{1{,}2430380}$
$\log\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=1{,}6921194$

$26°\,12'\qquad 0189$

$\therefore\ \dfrac{B}{2}=26°\,12'\,19''$

$\therefore\ B=52°\,24'\,38''$

Cálculo de C

$\log r=0{,}9351574$
$-\log(p-c)=\underline{1{,}5118834}$
$\log\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=1{,}4232740$

$\dfrac{C}{2}=14°\,50'\,34''$

$\therefore\ C=29°\,41'\,8''$

Cálculo de S

$\log p=1{,}7596678$
$\log r=\underline{0{,}9351574}$
$\log S=2{,}6948252$
$4952\qquad 7806\qquad d=877$
$\qquad\quad\ \ 446$

$\therefore\ S=495{,}2508\text{m}^2$

15. Quarto caso (caso duvidoso).

Dados $\begin{cases}a\\b\\A\end{cases}$ Pedem-se $\begin{cases}B,\ C,\ c\\S\end{cases}$

Cálculo de B. Da 1.ª relação (n.º 10), tiramos:

$$\operatorname{sen} B=\frac{b\operatorname{sen} A}{a}$$

Cálculo de C. Da 4.ª relação:

$$C=180°-(A+B)$$

Cálculo de c. Da 1.ª relação, vem:

$$c=\frac{a\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Cálculo de S: $\qquad S=\dfrac{a\,b\operatorname{sen} C}{2}$

16. Discussão. Como B é calculado pela expressão $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}$, para que a resolução do triângulo seja possível é necessário que:

$$\operatorname{sen} B \leq 1 \quad \text{ou} \quad b \operatorname{sen} A \leq a\,,$$

ou, ainda:

$$\log \operatorname{sen} B \leq 0$$

Suposto, então, $b \operatorname{sen} A \leq a$, o problema é possível e procurando na tábua encontraremos para B um ângulo menor do que 90°. Mas sabemos que o ângulo $180° - B$ tem o mesmo seno de B:

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(180° - B) = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

então pode haver dois ângulos, que podem ser ângulos de um triângulo, pois são menores do que 180°.

Façamos, então, um estudo das várias hipóteses que podemos ter, e apresentemos um esquema dessa discussão.

$b \operatorname{sen} A > a$ ——— Impossível

$b \operatorname{sen} A = a$ $\left\{\begin{array}{l} A > 90° \text{ — Impossível} \\ A = 90° \text{ — Impossível} \\ A < 90° \text{ — Uma solução (triângulo retângulo)} \end{array}\right.$

$\therefore \operatorname{sen} B = 1$

$\therefore B = 90°$

$b \operatorname{sen} A < a$ e $\operatorname{sen} B < 1$

- $A < 90°$
  - $a > b$, $B < 90°$ — 1 solução
  - $a = b$, $B < 90°$ — 1 solução
  - $a < b$, $B < 90°$ ou $B > 90°$ — 2 soluções
- $A = 90°$ Se $a > b$, 1 solução (triângulo retângulo)
- $A > 90°$
  - $a > b$ — 1 solução
  - $a = b$ — Impossível
  - $a < b$ — Impossível

Exemplos:

1) Resolver o triângulo, sendo dados:

$$a = 628\text{m} \qquad b = 538\text{m} \qquad A = 36°$$

Cálculo de B

$\log b$	$= 2{,}7307823$
$\log \operatorname{sen} A$	$= \bar{1}{,}7692187$
$\operatorname{colog} a$	$= \bar{3}{,}2020404$
$\log \operatorname{sen} B$	$= \bar{1}{,}7020414$

$\therefore B = 30° 14' 6''$

Como $\log \operatorname{sen} B < 0$, $\operatorname{sen} B < 1$ (Se $\log \operatorname{sen} B > 0$, impossível)

Se $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} B < 1 \\ a < 90° \\ a > b \end{array}\right.$

então, o problema tem 1 só solução e, só após esse raciocínio, achamos B.

Cálculo de C: $C = 180° - (A + B) = 113° 45' 54''$

Cálculo de c

$\log a$	$= 2{,}7979596$
$\log \operatorname{sen} C$	$= \bar{1}{,}9615189$
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A$	$= 0{,}2307813$

$\therefore c = 997{,}8\text{m}$

Cálculo de S

$\log a$	$= 2{,}7979596$
$\log b$	$= 2{,}7307823$
$\log \operatorname{sen} C$	$= \bar{1}{,}9615189$
$\operatorname{colog} 2$	$= \bar{1}{,}6989700$
$\log S$	$= 5{,}1892308$

$\therefore S = 154607{,}58\text{m}$

2) Resolver o triângulo, dados:

$$a = 120\text{m} \qquad b = 150\text{m} \qquad A = 52° 16'$$

Cálculo de B

$\log b$	$= 2{,}1760913$
$\log \operatorname{sen} A$	$= \bar{1}{,}8981038$
$\operatorname{colog} a$	$= 3{,}9208188$
$\log \operatorname{sen} B$	$= \bar{1}{,}9950139$

$B = 81° 20' 3'',8$

$B = 180° - B = 98° 39' 56'',2$

$\log \operatorname{sen} B < 0 \therefore \operatorname{sen} B < 1$

Como $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} B < 1 \\ B < 90° \\ a < b \end{array}\right.$

então o problema tem 2 *soluções*.

Calculamos agora B e o seu suplemento.

E, daqui para diante, temos dois triângulos que resolver, com as mesmas fórmulas apresentadas para esse caso, e com a mesma disposição de cálculos usada no exemplo 1.

17. Aplicações.

1.ª) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 2, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3} + 1$ metros. Achar os ângulos.

Temos pela 2.ª relação (n.º 10):

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{6 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4}{2\sqrt{6}\,.\,(\sqrt{3} + 1)} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} = \frac{4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 6}{2 \times 2\,(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4\,(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = 45°, \quad B = 60°$$

e

$$C = 180° - (A + B) = 75°$$

2.º) Resolver um triângulo que tem por lados y, $y+1$ e $y+2$, sendo que o ângulo oposto ao menor lado é igual à metade do ângulo oposto ao maior lado.

(Faculdade Engenharia Paraná – 1947)

Seja A o menor ângulo, o maior é $2A$.

$\therefore A+B+2A=180^\circ \therefore B=180^\circ-3A$ e $\operatorname{sen} B=\operatorname{sen} 3A$

$$\frac{y}{\operatorname{sen} A}=\frac{y+1}{\operatorname{sen} 3A}=\frac{y+2}{\operatorname{sen} 2A} \qquad (1)$$

ou, $$\frac{y+1}{\operatorname{sen} 3A}=\frac{y}{\operatorname{sen} A}=\frac{2y+1}{\operatorname{sen} 3A+\operatorname{sen} A}=\frac{2y+1}{2\operatorname{sen} 2A\cos A} \qquad (2)$$

Comparando a última fração de (1) com a última de (2) temos:

$$\frac{2y+1}{2\operatorname{sen} 2A\cos A}=\frac{y+2}{\operatorname{sen} 2A}$$

$$\therefore 2y+1=2\cos A\,.\,(y+2) \text{ ou } \cos A=\frac{2y+1}{2y+4} \qquad (3)$$

e comparando a primeira com a última fração de (1), vem:

$$\frac{y}{\operatorname{sen} A}=\frac{y+2}{2\operatorname{sen} A\cos A} \therefore y=\frac{y+2}{2\cos A} \therefore \cos A=\frac{y+2}{2y} \qquad (4)$$

Comparando (3) e (4), temos:

$$\frac{2y+1}{2(y+2)}=\frac{y+2}{2y} \therefore 2y^2+y=y^2+4y+4$$

ou $$y^2-3y-4=0 \therefore y_1=4 \text{ e } y_2=-1$$

Logo, $y=4$, e os lados do triângulo são 4, 5 e 6.

Cálculo dos ângulos

De (4) vem: $\cos A=\frac{4+2}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75$

$$\log\cos A=\bar{1},8750613$$

$$\therefore A=41^\circ 25' \quad 2A=82^\circ 50'$$

e $$B=180^\circ-(A+2A)=55^\circ 45'$$

18. Exercícios para resolver.

Resolver os triângulos, sendo dados:

1) $A=26^\circ 18' 43''$, $B=72^\circ 53' 14''$, $c=484{,}12$m
2) $a=228{,}49$m, $b=218{,}68$m, $C=85^\circ 41' 57''$
3) $a=375{,}219$m, $B=35^\circ 42' 17'',86$, $C=72^\circ 12' 37'',47$
4) $a=229$m, $b=61$m, $c=232$m
5) $a=628{,}2$m, $b=543{,}6$m, $A=38^\circ 23' 11''$
6) $a=17{,}7$m, $b=21{,}6$m, $A=35^\circ 36'$
7) $a=42$m, $b=48$m, $A=98^\circ 43'$

Calcular as áreas dos triângulos, sendo dados:

8) $a=375{,}219$m, $B=35^\circ 42' 17'',86$, $C=72^\circ 12' 37'',47$
9) $a=428$m, $b=255$m, $c=350$m
10) $a=1\,585$m, $b=1\,206{,}5$m, $C=56^\circ 37'$
11) $a=180$m, $b=125$m, $A=25^\circ 15'$
12) O raio do círculo circunscrito a um triângulo em que um lado mede a e o ângulo oposto A tem para expressão .....

(E. Politécnica U. Cat. – Rio – 1957).

13) São dados:

$$A=30^\circ 20' 15'', \quad B=70^\circ 05' 30'', \quad a=1\,230\text{m}$$

calcule o lado b. (Escola Naval – 1952).

14) Dá-se de um triângulo:

$$A=31^\circ 43' \quad b=2\,512{,}0\text{m} \quad c=507{,}2\text{m}$$

Pede-se determinar B, C e a.

(Esc. Naval – Seleção. 2.º Ano – 1961).

15) Um observador vê uma torre sob um ângulo de $4^\circ 35' 10''$. Aproximando-se dela 500m passa a vê-la sob um ângulo de $9^\circ 7' 20''$. Calcular a altura da torre em dm e a distância do observador à torre, em dam, aquele na primeira posição.

(Esc. N. Engenharia – 1947).

16) Dois dos lados de um triângulo são $b=4$ e $c=\sqrt{2}$ e o ângulo por eles formado é $A=45^\circ$. Calcular, sem o auxílio das tábuas, o seno, e co-seno dos ângulos B e C.

17) Os lados de um triângulo medem 5m, 6m e 9m. Determinar: a) a área do triângulo; b) a área do círculo inscrito; c) as tangentes dos ângulos. (Esc. Técnica Exército – 1945).

18) Resolver o triângulo, conhecidos:

$$A,\ B,\ C \ \text{e}\ 2p$$

19) Em um triângulo de vértices A, B e C, opostos respectivamente aos lados a, b e c, no qual $\hat{B} = 3\hat{C}$ e $b = 2c$, o ângulo $\hat{C}$ mede

(COMCITEC - 72 - GB).

Responda

20) Em algum caso de resolução de triângulos é possível haver duas soluções? Quais os elementos dados?

(Escola Naval - 1952).

21) Nos triângulos obliquângulos, que relação existe entre os lados e os senos dos ângulos?

(Esc. Aeronáutica - 1952).

22) Qual a expressão da área de um triângulo em função de dois lados quaisquer e do ângulo por eles formado?

(Esc. Aeronáutica - 1952)

23) Qual o raio do círculo circunscrito a um triângulo que tem $a = 5$m e $A = 30°$?

(Esc. Aeronáutica - 1952)

24) A razão entre 2 lados de um triângulo é $2 + \sqrt{3}$ e o ângulo por eles formado é de 60°. Calcule os outros dois ângulos.

(E. N. E. - 1958)

25) Dê o valor numérico da área no triângulo que tem um ângulo de 15° formado por dois lados que medem 10m e 12m.

(Fac. Eng. UEG - 1964)

26) Dê a área de um triângulo ABC em função de a, A e C.

(ENE - 1963).

27) Quais são os ângulos B e C de um triângulo ABC para o qual

$$A = 15°,\ \text{sen}\, B = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{e}\ \text{sen}\, C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(EPUSP - 1961)

28) Um triângulo tem um ângulo de 60°, formado por lados cujos comprimentos são 2 e 3. O comprimento do terceiro lado é:

A) $\sqrt{6}$ *B)* $\sqrt{7}$ *C)* $\sqrt{8}$ *D)* 3 *E)* $\sqrt{10}$

(CICE - 1968).

RESPOSTAS

1) $C = 80° 48' 3''$, $a = 217{,}39$m, $b = 468{,}72$m
2) $A = 48° 30' 22''$ $B = 45° 47' 41''$, $c = 304{,}2$m
3) $A = 72° 5' 4''{,}67$, $b = 230{,}141\,1$m, $c = 375{,}484\,3$m
4) $A = 79° 36' 40''$, $B = 15° 11' 20''$, $C = 85° 12'$

5) $c = 345{,}2$m, $B = 58° 17' 36''$, $C = 33° 19' 13''$
6) $B = 45° 15' 55''$, $C = 90° 8' 5''$, $c = 30{,}02$m
$B' = 134° 44' 15''$, $C' = 9° 39' 55''$, $c' = 5{,}09$m
7) Impossível
8) 41 112,17m²
9) 44 783,58m²
10) 798 392,73m²
11) 7 597,66m²
12) $R = \dfrac{a}{2\,\text{sen}\,A}$
13) 1 861,1m
14) $B = 140° 58' 48''{,}2$ $C = 7° 18' 11''{,}8$; $a = 2\,097{,}56$m
15) $h = 801{,}424$dm; $d = 99\,910$ 6dam
16) $\text{sen}\, B = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen}\, C = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$
17) $10\sqrt{2}$, $2r$, $\dfrac{10\sqrt{2}}{23}$, $\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$ e $-2\sqrt{2}$
18) $a = p\,\dfrac{\text{sen}\,\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$, $b = p\,\dfrac{\text{sen}\,\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$, $c = p\,\dfrac{\text{sen}\,\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$
19) 30°
20) Sim. Dados a, b, A
21) $\dfrac{a}{\text{sen}\,A} = \dfrac{b}{\text{sen}\,B} = \dfrac{c}{\text{sen}\,C}$
22) $S = \dfrac{ab\,\text{sen}C}{2}$
23) 5m
24) 105° e 15°
25) $15(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ m²
26) $\dfrac{a^2}{2} \cdot \dfrac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A} \cdot \text{sen}\,B$
27) $B = 120°$ e $C = 45°$
28) $\sqrt{7}$

GEOMETRIA ANALÍTICA

(Terceiro Ano)

CAPÍTULO I

Coordenadas cartesianas

1. Introdução. Credita-se a Descartes (*) a primazia em introduzir a Álgebra no estudo da Geometria, criando, dessa forma, um vigoroso método que permitiu aos matemáticos tratarem, com real proveito, de assuntos tais como: traçado de tangentes a uma curva, lugares geométricos, etc.

A este novo ramo da matemática dá-se o nome de Geometria Analítica, cujos problemas fundamentais são:

1) Dada uma equação representá-la por uma linha.
2) Dada uma linha, definida geometricamente, obter a equação correspondente a essa linha.

2. Abscissa de um ponto de uma reta. Seja uma reta $X'X$ e sobre ela um ponto 0 chamado origem (fig. 1).

FIG. 1

Adotemos uma unidade de medida e suponhamos que os comprimentos medidos, a partir de 0, sejam *positivos* à direita e *negativos* à esquerda.

Não é difícil de concluir que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta $X'X$ e o conjunto dos números reais relativos.

O número zero é representado pela *origem*, os *números positivos* pelos pontos de $X'X$ à direita de 0 e os números negativos pelos pontos à esquerda.

(*) René Descartes, filósofo e matemático francês (1596-1650)

Os números são chamados *abscissas* dos pontos e a reta *X'X eixo das abscissas.*

Assim os pontos *M*, *P*, *Q* e *R* marcados na fig. 1, representam respectivamente os números:

$$(+3);\ (-1);\ (+1,\ 5)\ \text{e}\ (-4)$$

3. Coordenadas cartesianas. Acabamos de ver (N.º 2) um modo simples de representar graficamente um número relativo; agora, todavia, o nosso problema é representar um par ordenado de números x e y; é evidente que a primeira idéia que ocorreria ao aluno era tomar duas retas, uma para representar os números x e outra os números y.

Poderão surgir diversas maneiras de considerar essas retas ou eixos, porém a melhor será considerar os eixos perpendiculares e com suas origens coincidindo (fig. 2).

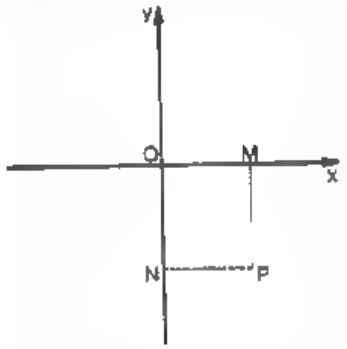


FIG. 2

E, então, traçando pelos pontos correspondentes aos números x e y retas paralelas, respectivamente, ao outro eixo, essas retas se interceptam em pontos que representam graficamente os pares de números x e y.

Usamos comumente considerar o eixo dos x como horizontal, com o sentido positivo para a direita, e o eixo dos y como o eixo vertical, com o sentido positivo para cima.

Os dois eixos chamam-se *eixos coordenados*; o seu ponto de interseção é a *origem* e, em conjunto, é chamado de *sistema de coordenadas retangulares* no plano ou *sistema de coordenadas cartesianas*, em homenagem a René Descartes.

Se temos um par ordenado de valores de x e y, por exemplo 2 e –3, respectivamente, para determinar o ponto que representa esse par de números basta traçar pelos pontos 2 e –3, dos eixos, paralelas aos eixos; o ponto de interseção dessas paralelas é o ponto *P* pedido (fig. 2). (Com papel milimetrado evita-se o traçado dessas paralelas).

O par de valores (2, –3) chama-se *coordenadas* do ponto *P*; a primeira 2 é a *abscissa* e a segunda –3 a *ordenada*.

E podemos dizer que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares de números reais relativos.

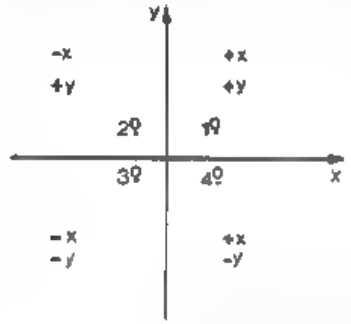


FIG. 3

Os eixos coordenados dividem o plano em *quatro quadrantes*, em cada um dos quais cada uma das coordenadas tem um determinado sinal, conforme indica a fig. 3.

A origem tem coordenadas nulas 0 (0, 0).

Um ponto *M* do eixo dos x tem $y=0$ (fig. 2). Exemplo:

$$M\ (2,\ 0)$$

Um ponto *N* do eixo dos y tem $x=0$ (fig. 2). Exemplo:

$$N\ (0,\ -3)$$

4. Exercícios.

Representar graficamente os pontos:

1) *A* (3, 2); *B* (5, –2); *C* (–1, 3); *D* (–2, –1).
2) *E* (5, 0); *F* (0, 3); *G* (–2, 0); *H* (0, –4).
3) *M* (3, 3); *N* (–2, –2); 0 (0, 0).

CAPÍTULO II

Problemas importantes

1. Distância entre dois pontos de um eixo. Do teorema de Chasles "Trigonometria" – pág. 484, podemos concluir que a *medida algébrica* de um segmento AB, de origem A (x_1) e extremidade B (x_2), é dada pelo número $x_2 - x_1$.

Chama-se *distância entre dois pontos* A (x_1) e B (x_2), de um eixo, ao módulo de sua medida algébrica, isto é, $|x_2 - x_1|$.

2. Distância entre dois pontos de um plano. A distância $d = AB$ em função das coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de A e B, respectivamente, pode ser obtida aplicando no triângulo ABC, da figura 4, o teorema de Pitágoras.

Temos: $$d^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Mas $$\overline{AC} = x_2 - x_1 \quad \text{e} \quad \overline{BC} = y_2 - y_1$$

$$\therefore \quad \boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Observações:

1.ª) Embora a demonstração tenha sido feita para A e B no 1.º quadrante, poderá ser obtida qualquer que seja a posição dos pontos A e B, bastando para isso que projetemos AB sobre os dois eixos e tomemos em consideração a definição de distância.

2.ª) Fazendo na (I), $y_1 = y_2$ vem $d = |x_2 - x_1|$ que coincide com a definição do N.º 1.

3.ª Se o ponto A é a origem (0, 0), temos:

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Exemplos:

1.º) Achar a distância entre os pontos (2, 3) e (0, 1).

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

2.º) Qual a distância do ponto (3, 4) à origem?

$$d = \sqrt{9+16} = 5$$

3. Exercícios.

1) Qual a distância da origem ao ponto (6, −8)?
2) Qual a distância entre os pontos (2, 1) e (4, −1)?
3) Calcular o perímetro do triângulo cujos vértices são A (3, 4), B (−2, 4) e C (2, 2).
4) Provar que os pontos A (3, 3), B (−3, −3) e C $(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ são os vértices de um triângulo equilátero.
5) Empregando a fórmula da distância entre dois pontos, provar que os pontos A (7, 0), B (2, −1), C (−3, −2), estão em linha reta.

4. Ponto que divide um segmento em uma razão dada. Sejam $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ e M um ponto da reta AB.

Calculemos as coordenadas (x_0, y_0) de M de modo que $\dfrac{MA}{MB} = k$.

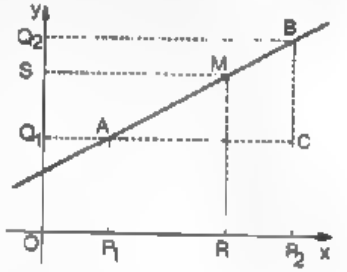


FIG. 4

Como um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais, temos (fig. 4):

$$\frac{\overline{MA}}{MB} = \frac{\overline{RP_1}}{RP_2} = k \quad \text{e} \quad \frac{\overline{MA}}{MB} = \frac{\overline{SQ_1}}{SQ_2} = k$$

$$\therefore \quad \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} = k \quad \text{e} \quad \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2} = k$$

$$\therefore \quad x_0 - x_1 = kx_0 - kx_2 \quad \text{e} \quad y_0 - y_1 = ky_0 - ky_2$$

ou, finalmente

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 - kx_2}{1-k} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}} \qquad \text{(II)}$$

As expressões (II) são as coordenadas do ponto M que divide o segmento AB na razão k.

Observações:

1.ª) Se $k<0$ o ponto M está compreendido entre A e B; se $k>0$ M é exterior ao segmento AB.

2.ª) Se $k=-1$, $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-1$, $|\overline{MA}|=|\overline{MB}|$ e M é o ponto médio de AB.

As fórmulas (II) ficarão:

Exemplos:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad e \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

Exemplos:

1.º) Sendo $A\,(2, 3)$ e $B\,(1, -2)$ dividir o segmento AB na razão $k=-2$.

Temos: $x_0=\frac{2+2}{1+2}=\frac{4}{3}$ e $y_0=\frac{3-4}{1+2}=-\frac{1}{3}$

$\overline{AB}$ fica dividido, na razão $k=-2$, pelo ponto $M\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

2.º) Determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, sendo $A\,(2, -3)$ e $B\,(4, 5)$.

Temos: $M\,(3, 1)$

5. Exercícios para resolver.

1) Determinar o ponto que divide o segmento cujos extremos são $A\,(-3, -5)$ e $B\,(6, 9)$ na razão $-\frac{2}{5}$.

2) Achar os pontos médios dos lados de um triângulo cujos vértices são $(-2, 1)$, $(4, 3)$ e $(0, 1)$.

3) Achar as coordenadas dos pontos que dividem em 3 partes iguais o segmento, cujos extremos são $(-2, -1)$ e $(3, 2)$.

4) As coordenadas do ponto médio de um segmento AB são $(-1, 2)$. Calcular as coordenadas de B sabendo que as de ponto A são $(2, 5)$.

5) Provar que as coordenadas do baricentro (ponto de interseção das medianas) de um triângulo, cujos vértices são $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ e $C\,(x_3, y_3)$ são:

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad e \quad y_0=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Isto pode ser verificado determinando o ponto médio M do lado BC de um triângulo e, a seguir, dividindo o segmento MA, onde A é o vértice oposto a BC, na razão $k=-\frac{1}{2}$, pois, da Geometria elementar sabemos que as medianas se interceptam a $\frac{2}{3}$ do vértice.

Respostas:

1) $(-9/7, -1)$

2) $(1, 2)$, $(2, 2)$ e $(-1, 1)$

3) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ e $(4/3, 1)$

4) $(-4, -1)$

6. Área de um triângulo. Seja um triângulo cujos vértices são $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ e $C\,(x_3, y_3)$ (fig. 5).

É fácil de verificar, observando a figura 5 que

$$\text{Área}\,(ABC)=\text{Área}\,(ACED)+\text{Área}\,(CBFE)-\text{Área}\,(ABFD), \qquad (1)$$

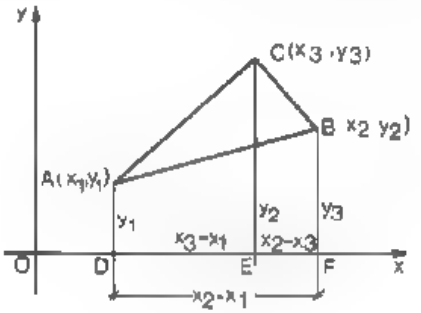


FIG. 5

Mas $ACED$, $CBFE$ e $ABFD$ são trapézios e suas áreas são iguais à metade da soma de suas bases multiplicada pela sua altura, então a (1) ficará:

$$\text{Área}\,(ABC)=\tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)+\tfrac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3)-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

Efetuando os produtos indicados no segundo membro e simplificando, obtemos

$$\text{Área}\,(ABC)=\tfrac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3) \qquad (2)$$

Esta última expressão pode ser escrita de modo mais simples e mais fácil de fixar assim:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

pois é fácil de notar que a expressão entre parênteses, em (2), é igual à que se obtém, na matriz retangular do 2.º membro de (3), somando os produtos de cada um dos 3 primeiros elementos da linha de cima, pelo elemento da linha de baixo, pertencente à coluna imediatamente à direita, e subtraindo a soma dos produtos de cada um dos 3 últimos elementos da linha de cima, pelo elemento da linha de baixo, pertencente à coluna imediatamente à esquerda.

A (2) poderia também ser escrita sob a forma clássica:

$$S = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

que não apresenta a mesma facilidade de cálculo de (3).

Observações:

1.ª) Se em (3) $S<0$ toma-se o valor absoluto.

2.ª) A área será sempre um número positivo, apenas quando ordenamos os vértices de modo que ao percorrermos seu perímetro nesta ordem a superfície do triângulo fique sempre à esquerda do sentido de percurso.

Exemplo:

Calcular a área do triângulo de vértices $A(2, 1)$, $B(3, 1)$ e $C(-1, 2$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(2+6-1)-(3-1+4)] = \frac{1}{2} \text{ un área}$$

7. Exercícios para resolver.

1) Qual a área do triângulo cujos vértices são: $A(1, 1)$, $B(4\ 1)$ e $C(2, 2)$?

2) Calcular a área do triângulo cujos vértices são: $(0, 0)$ $3, 0)$ e $(0, -5)$. (U.E.G - 1972).

3) Dois vértices de um triângulo, cuja área é 38, são: $(7, 5)$ e $(3, -4)$. Qual a abscissa do outro vértice se sua ordenada é 6?

Respostas:

1) 1,5 unidades de área 2) $-\frac{15}{2}$ 3) -1 ou $^{143}/_{5}$

8. Condição para que 3 pontos estejam alinhados.

Basta que a área do triângulo, cujos vértices são esses 3 pontos, seja nula.

Isto é:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

CAPÍTULO III

A função linear e a linha reta

1. Teorema.

> As coordenadas dos pontos de uma reta, não paralela aos eixos coordenados, são soluções de uma equação da forma $y=ax+b$.

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos fixos de uma reta r (fig. 6) e $P(x, y)$ um ponto genérico de r.

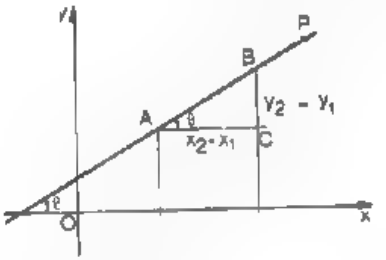


FIG. 6

Então, pela condição de alinhamento temos:

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x \\ y & y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (y_1 - y_2)\,x + (x_2 - x_1)\,y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

$$y = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}\,x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

ou, ainda

$$\boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}} \qquad (I)$$

pondo $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ e $\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = b$

temos a equação $\boxed{y = ax + b}$

2. Teorema recíproco.

> As soluções de uma equação da forma $y = ax + b$ são coordenadas dos pontos de uma reta.

Realmente, sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) três soluções quaisquer da equação $y = ax + b$, tais que $x_2 - x_1$ e $x_3 - x_1$ sejam diferentes de zero.

Temos:
$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 = ax_3 + b$$

Subtraindo da 2.ª e 3.ª equações a 1.ª e eliminando a, vem:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$$\therefore\ x_3y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 - x_2y_3 - x_1y_2 - x_3y_1 = 0$$

equação que pode ser escrita assim:

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_3 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

que é a condição de alinhamento e, portanto, as soluções da equação são pontos de uma reta.

3. Representação gráfica da função linear. Denominamos de *função linear* a toda função da forma

$$\boxed{y = ax + b}$$

onde a e b são constantes.

Chamamos de função linear, porque sua representação gráfica é uma linha reta (Nºs 1 e 2).

4. Inclinação de uma reta. A *inclinação* de uma reta, que intercepta o eixo dos x, é, dos quatro ângulos convexos formados pela reta com aquele eixo, o particular ângulo que fica à direita da reta e acima do eixo.

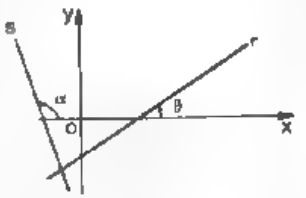


FIG. 7

A inclinação de uma reta, paralela ao eixo dos x, é nula.

Na fig. 7, θ e α são as inclinações das retas r e s, respectivamente.

5. Parâmetro angular e parâmetro linear. Na equação

$$y = ax + b$$

a denomina-se *parâmetro* ou *coeficiente angular* e b *parâmetro* ou *coeficiente linear.*

Como vimos (n.º 1): $\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

e observando a fig. 6 vemos que $a = tg\ \theta$; portanto, podemos definir *coeficiente angular* de uma reta como a tangente trigonométrica de sua inclinação.

a chama-se também *declividade* da reta.

Fazendo na equação $y = ax + b$, $x = 0$ temos $y = b$, portanto, o *coeficiente linear* pode ser definido como a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos y.

FORMAS DIVERSAS DE EQUAÇÃO DA RETA

6. Equação geral e reduzida da reta. A equação

$$\boxed{y = ax + b} \qquad (1)$$

estudada nos Nºs 1 e 2, chama-se *equação reduzida da reta.* Exemplo:

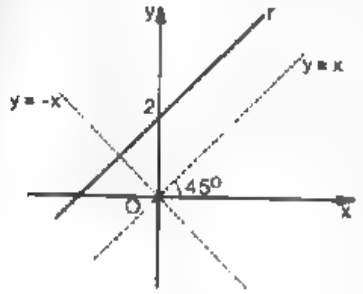


FIG. 8

A reta $y=x+2$, tem coeficiente angular 1 e linear 2 (fig. 8).

A (I) pode ser escrita assim: $ax - y + b = 0$

pondo

$$a = A,\ -1 = B \text{ e } b = C$$

obtemos a equação

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad \text{(II)}$$

que denominamos de *equação geral da reta.*

OBSERVAÇÃO: Se a reta é perpendicular ao eixo dos x não pode ser escrita sob a forma (I).

7. Estudo completo da equação geral da reta. Em particular na equação (II), temos:

1.º) $A = 0, \quad B \neq 0 \text{ e } C \neq 0$

tem-se $By + C = 0 \ \therefore\ y = -\dfrac{C}{B}$ ou $\boxed{y = b}$

e representa uma *reta paralela ao eixo dos x.*

2.º) $A = 0, \quad B \neq 0 \text{ e } C = 0$

tem-se: $By = 0 \ \therefore\ \boxed{y = 0}$

e representa o próprio *eixo dos x.*

3.º) $A \neq 0, \quad B = 0 \text{ e } C \neq 0$

tem-se $Ax + C = 0 \ \therefore\ x = -\dfrac{C}{A}$ ou $\boxed{x = p}$

e representa uma *reta paralela ao eixo dos y.*

4.º) $A \neq 0, \quad B = 0 \text{ e } C = 0$

tem-se $Ax = 0 \ \therefore\ \boxed{x = 0}$

e representa o próprio *eixo dos y.*

5.º) $A \neq 0, \quad B \neq 0 \text{ e } C = 0$

tem-se $Ax + By = 0 \ \therefore\ y = -\dfrac{A}{B}x$ ou $\boxed{y = ax}$

e representa uma reta passando pela origem.

Em particular $\boxed{y = x}$ é a equação da 1.ª bissetriz e $\boxed{y = -x}$ a equação da 2.ª bissetriz (fig. 8).

6.º) $A \neq 0, \quad B \neq 0 \text{ e } C \neq 0$

A (II) representa uma reta que não passa pela origem e corta os 2 eixos.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Toda equação (II), que não possua termo em x, é uma reta paralela ao eixo dos x.

2.ª) Toda equação (II), que não possua termo em y, é uma reta paralela ao eixo dos y.

3.ª) Toda equação (II), que não possua termo independente é uma reta passando pela origem.

4.ª) Uma reta paralela ao eixo dos y não pode ser escrita sob a forma reduzida.

5.ª) A reta $y=ax+b$ representa uma paralela à reta $y=ax$ passando no ponto do eixo dos y da ordenada b, razão pela qual o coeficiente linear b é também chamado de ordenada na origem.

O ângulo α formado pela reta $y=ax+b$ com o semieixo positivo dos x é o mesmo formado pela reta $y=ax$, e tem-se:

$$0 < \alpha < \pi, \quad \alpha \text{ é a inclinação da reta.}$$

8. Traçado da reta, dada sua equação. Dada a equação da reta r sob a forma geral ou reduzida, para traçar r lançamos mão ou dos parâmetros ou, mais geralmente, de duas soluções da reta (x_1, y_1) e (x_2, y_2), coordenadas de 2 pontos da reta, que determinam bem a posição de r.

9. Equação da reta, em função das coordenadas na origem. Dados dois pontos A e B, interseção da reta com os eixos coordenados (fig. 9), se a e b forem as medidas dos segmentos OA e OB, então as coordenadas dos pontos A e B, são, respectivamente, (a, o) e (o, b).

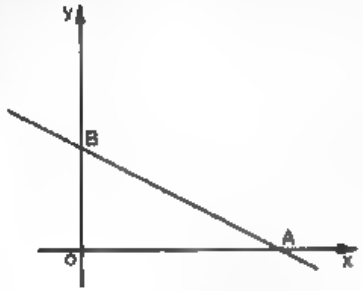


FIG. 9

Mas, se A e B são pontos de $Ax+By+C=0$, então suas coordenadas verificam a equação.

Temos então:

$$Aa + C = 0 \quad \therefore \quad A = -\frac{C}{a}$$

e

$$Bb + C = 0 \quad \therefore \quad B = -\frac{C}{b}$$

Substituindo em (II), obtemos:

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y = -C$$

Dividindo por $-C$, vem:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad \text{(III)}$$

que é a equação da reta em função dos segmentos que determina sobre os eixos, ou ainda, em função das coordenadas na origem. (Equação segmentária da reta).

10. Equação normal da reta. Uma reta pode ser determinada além de por 2 pontos e por um par de números

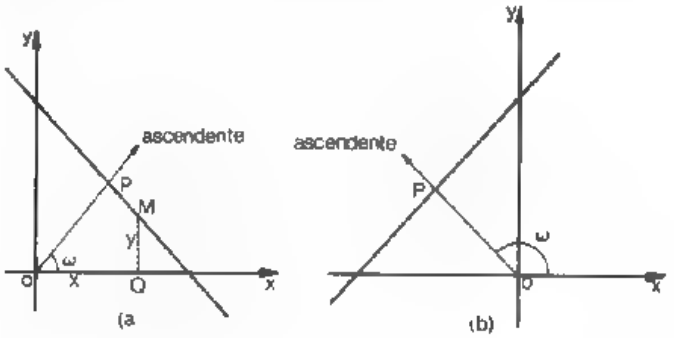


FIG. 10

(parâmetros da equação reduzida), também do seguinte modo (figs. 10 e 11).

Traçando uma semi-reta OP perpendicular à reta e orientada da origem para ela e, chamando de $p = OP$ a distância da origem à reta e de ω o ângulo que a semi-reta OP faz com o semi-eixo positivo dos x, é evidente que uma reta qualquer fica bem determinada por um par de números (p, ω), sendo $\omega < 2\pi$.

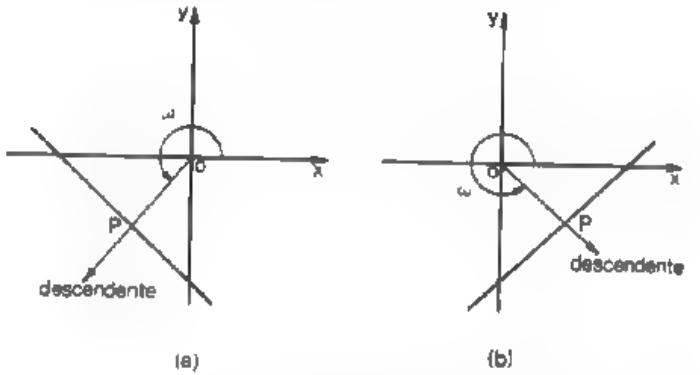


FIG. 11

Reciprocamente, toda reta determina um único valor positivo de p e um único valor positivo de $\omega < 2\pi$.

Isto é fácil de concluir observando as figuras 10 e 11, quando a reta não passa pela origem, isto é, quando $p \neq 0$.

Se $p=0$, a reta passa pela origem e a semi-reta OP é indeterminada.

Elimina-se essa dificuldade, supondo, quando $p=0$, $\omega<\pi$ e a semi-reta sempre ascendente.

Estabeleçamos agora a *equação normal da reta.*

Na figura 12 temos: $OB = a$, $OC = b$ e $OD = p$

$$\therefore \quad b = \frac{p}{\operatorname{sen} \omega} \quad \text{e} \quad a = \frac{p}{\cos \omega}$$

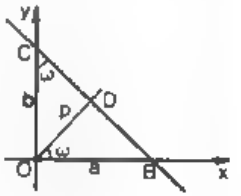


FIG. 12

Substituindo os valores de a e b em (III), obtemos a equação

$$\boxed{x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0} \qquad \text{(IV)}$$

que é a *equação normal da reta.*

Em particular, se a reta passa pela origem, temos:

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega = 0$$

11. Equações paramétricas da reta. Seja uma reta orientada PQ fazendo os ângulos α e β com os eixos coordenados (fig. 13).

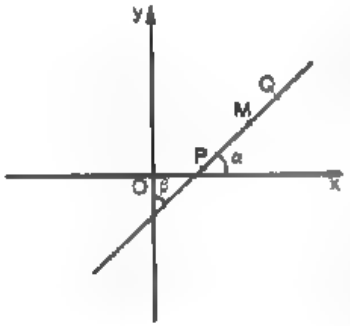


FIG. 13

Se $P\ (x_0, y_0)$ e $M\ (x, y)$ é um ponto qualquer da reta PM, projetando o segmento $\overline{PM} = t$ sobre os eixos temos:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \end{cases}} \qquad \text{(V)}$$

as equações chamam-se *equações paramétricas da reta* ($\cos \alpha$ e $\cos \beta$ são os co-senos diretores da reta e $\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$ e $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$).

Observação: Qualquer par de equações dando x e y em função de um parâmetro t, satisfazendo a condição de se tornar uma equação (I) mediante eliminação entre elas do parâmetro t, pode servir de equações paramétricas da reta.

12. Forma simétrica da equação da reta. De (V), temos:

$$t = \frac{x - x_0}{\cos \alpha} \quad \text{e} \quad t = \frac{y - y_0}{\cos \beta}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta}} \qquad \text{(VI)}$$

que é a forma simétrica da equação da reta.

13. Passagem da equação de uma reta para sua forma geral e vice-versa. Este problema consiste em, dada uma reta sob uma de suas formas de equação, *passar* a equação dada para a forma geral (I), ou vice-versa.

Estudaremos os casos mais importantes:

14. Passagem da forma geral para a normal e vice-versa. Suponhamos que conhecemos a equação de uma mesma reta sob a forma geral e sob a forma normal:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Essas duas equações têm então as mesmas soluções, logo o valor de y nas duas equações são iguais:

$$-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = -\frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}x + \frac{p}{\operatorname{sen} \omega}$$

ou

$$\left(\frac{A}{B} - \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}\right)x + \left(\frac{C}{B} + \frac{p}{\operatorname{sen} \omega}\right) = 0$$

esta equação deve se verificar qualquer que seja x, o que só é possível ocorrer se $\frac{A}{B} - \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} = 0$ e $\frac{C}{B} + \frac{p}{\operatorname{sen} \omega} = 0$

$$\therefore \quad \frac{A}{B} = \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} \quad \text{e} \quad \frac{C}{B} = \frac{-p}{\operatorname{sen} \omega}$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen} \omega}{B} = \frac{\cos \omega}{A} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} \omega}{B} = \frac{-p}{C}$$

Comparando temos:

$$\frac{\cos \omega}{A} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{B} = \frac{-p}{C} \qquad \text{(VII)}$$

Para obter a (IV) conhecida a equação (II) basta se conhecer os valores de $\cos \omega$, $\operatorname{sen} \omega$ e $-p$ em função de A, B e C.

Fazendo as razões (VII) iguais a k, obtemos:

$\cos \omega = Ak$, $\operatorname{sen} \omega = Bk$, $-p = Ck$ (ou $p = -Ck$)

Determinemos k:

$$\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$$

$$\therefore\ A^2 k^2 + B^2 k^2 = 1 \qquad \therefore\ k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

E a equação (IV), conhecida a (I), será

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Observação: O sinal do radical $\sqrt{A^2+B^2}$ é dado pela igualdade $p = -Ck$:

a) Se $p>0$, k e C devem ter sinais contrários a menos que $C=0$ (isto é, que a reta passe pela origem);

b) Se $C=0$, $p=0$ (a reta passa pela origem):

$$\therefore\ \omega < \pi \quad \therefore\ \operatorname{sen}\omega > 0$$

se da igualdade $\operatorname{sen}\omega = Bk$, concluímos que B e k devem ter o mesmo final.

Regra prática: Para passar da forma geral para a normal procede-se assim:

1) Determina-se $\sqrt{A^2+B^2}$
2) Dá-se ao radical o sinal contrário ao de C, se existe C, e o sinal de B, se C não existe.
3) Divide-se a equação por esse radical precedido do sinal adequado.

A passagem da forma normal para a geral não apresenta dificuldade. É só preparar a equação. Exemplo:

Reduzir à forma normal a equação $3x+4y-2=0$

1) $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{9+16} = 5$
2) Dá-se o sinal contrário ao de $C = -2$. Tem-se $+5$
3) Divide-se a equação dada por $+5$; vem $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0$

ou $x\cos 53°\,8' + y\operatorname{sen} 53°\,8' - \frac{2}{5}=0$ que é a equação normal da reta dada.

15. Passagem da forma geral para a simétrica e vice-versa. Para passar da forma $Ax + By + C = 0$ para a simétrica (VI), procede-se assim:

Considerando-se $(x_0\ y_0)$ um ponto de (II), vem:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

Subtraindo de (I), temos:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0 \quad \therefore\ B(y-y_0) = -A(x-x_0)$$

$$\therefore\ \frac{x-x_0}{B} = \frac{y-y_0}{-A} \qquad \text{(VIII)}$$

Mas (fig. 12), $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = a$ (coeficiente angular da reta)

$$\therefore\ \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = a = \frac{-A}{B}$$

E a (VIII) representa, pois, a equação simétrica da reta.

(Para passar da forma simétrica (VI) para a forma geral basta preparar a equação).

Exemplo:

Estabelecer sob a forma simétrica a equação da reta

$$4x - 3y - 12 = 0$$

Seja um ponto da reta $(0, -4)$; temos, de acordo com a (VIII),

$$\frac{x-0}{-3} = \frac{y+4}{-4} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+4}{4}$$

16. Passagem da forma geral para a paramétrica e vice-versa. Dada a equação $Ax+By+C=0$ para escrevê-la sob a forma paramétrica, deve-se primeiro colocá-la sob a forma simétrica (VIII) e a seguir igualar as razões a um parâmetro t; vem:

$$\frac{x-x_0}{B} = \frac{y-y_0}{-A} = t \quad \therefore\ \begin{cases} x = x_0 + Bt \\ y = y_0 - At \end{cases}$$

Para passar da forma paramétrica para a geral, coloca-se primeiro sob a forma simétrica e a seguir prepara-se a equação. Exemplos:

1) Estabelecer a equação geral da reta cujas equações paramétricas são:

$$x = 2 + 3t \quad \text{e} \quad y = 5 - 2t$$

Temos: $t = \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{-2} \quad \therefore \quad 2x + 3y - 19 = 0$

2) Estabelecer as equações paramétricas da reta cuja equação geral é:

$$2x - y = 3$$

Seja $(0, -3)$ um ponto da reta; a forma simétrica é

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-2} \text{ ou } x = \frac{y+3}{2}$$

igualando a t, obtemos as equações paramétricas:

$$x = t \quad \text{e} \quad y = -3 + 2t$$

17. Exercícios.

1) Que representa a equação $y = 3x$? (Escola Naval – 14/3/52).

2) Qual é a reta cujo coeficiente angular é 3 e cujo coeficiente linear é -5?

3) Que representa a equação $y = 2$?

4) Qual a equação da reta em que todos os pontos têm abcissa igual a 3?

5) Represente graficamente as retas cujas equações são:
$2x + 3y - 6 = 0$; $y = 3x - 2$; $y = 3$; $x = -2$ e $y = 2x$

6) Qual o coeficiente angular e o linear da reta: $2x - 3y + 1 = 0$?

7) Qual o parâmetro angular e o linear da reta $y = -2x + 15$?

8) Qual o valor da tangente do ângulo que a reta, cuja equação é $3x - 2y - 1 = 0$, faz com o semi-eixo positivo dos x?

9) Qual a equação da reta que faz com o semi-eixo positivo dos x um ângulo de 45°, e que corta o eixo dos y em um ponto de ordenada -2?

10) Qual a equação da reta que corta os 2 semi-eixos positivos em pontos que distam de 3 da origem?

11) Qual a equação da reta que corta um dos eixos no ponto $(0, -1)$ e é paralela à 1.ª bissetriz?

12) Sem usar a equação da reta que passa por dois pontos, escreva a equação da reta que passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(0, -4)$.

13) Em que ponto a reta $9x - 4y + 12 = 0$ corta o eixo dos y?

14) A equação normal de uma reta é:

$$x \cos 37° + y \operatorname{sen} 37° - 2 = 0$$

Calcule a distância da origem a essa reta.

15) Escreva a equação $3x - 5y - 2 = 0$ sob a forma reduzida.

16) Calcule as coordenadas do ponto simétrico do ponto $(1, 2)$ em relação à reta $4x + 3y - 5 = 0$.
(Engenharia – 1958 – GB).

17) A normal da origem a uma reta mede 5 e forma com o semi-eixo positivo dos x um ângulo de 60°. Qual a equação da reta?

18) Qual a equação da reta que forma com o semi-eixo positivo x um ângulo de 60° e cuja normal da origem a essa reta é 6?

19) A normal da origem a uma reta mede 2 e forma com o semi-eixo positivo dos y um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos. Escrever a equação da reta.

20) Escrever sob a forma normal a equação $3x + 4y + 10 = 0$.

21) Qual a distância da origem à reta

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 12 = 0?$$

22) A equação normal da reta que passa pelo ponto $(-4, 3)$ é

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - 5 = 0$$

Qual a inclinação dessa reta?

23) Estabelecer as equações das retas cuja distância à origem é 10 e passam pelo ponto $P\,(5, 10)$.

24) Escrever sob a forma normal a equação

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 8 = 0$$

25) Escrever a equação geral da reta cujas equações paramétricas são

$$x = 3 - \frac{4}{5}t \quad \text{e} \quad y = 2 + \frac{3}{5}t$$

26) Escrever as equações paramétricas da reta cuja equação reduzida é

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$$

27) Escrever a equação da reta, cuja equação geral é $3x - 4y - 15 = 0$, sob a forma simétrica.

28) A forma simétrica da equação de uma reta é $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{4}$.
Qual a equação geral dessa reta?

29) Qual a forma simétrica de uma reta cujas equações paramétricas são:

$$x = -2 + 3t \quad \text{e} \quad y = -7 - 2t$$

RESPOSTAS:

1) Reta passando pela origem
2) $y = 2x - 5$
3) Uma reta paralela ao eixo dos x passando no ponto $(0, 2)$
4) $x = 3$
6) $^3/_2$ e $^1/_2$
7) -2 e 15
8) $1, 5$
9) $y = x - 2$
10) $y = -x + 3$
11) $y = x - 1$
12) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ (Ver N.º 9)
13) $(0, 3)$
14) 2
15) $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$
16) $-(^3/_5, ^6/_5)$
17) $x + y\sqrt{3} - 10 = 0$
18) $\sqrt{3}x - y - 12 = 0$
ou $\sqrt{3}x - y + 12 = 0$
19) $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 4 = 0$
20) $x \cos 233°8 + y \operatorname{sen} 233°8 - 2 = 0$
21) 6
22) $53°8'$
23) $y - 10 = 0$ e $4x + 3y - 50 = 0$
24) $x \cos 45° + y \operatorname{sen} 45° - 4 = 0$
25) $3x + 4y - 17 = 0$
26) $x = 4 + \frac{3}{5}t$ e $y = 1 + \frac{4}{5}t$
27) $\frac{x - 5}{4} = \frac{y}{3}$
28) $4x - 3y - 12 = 0$
29) $\frac{x + 2}{3} = \frac{y + 7}{-2}$

CAPÍTULO IV

Problemas clássicos da reta

1. Equação das retas que passam por um ponto. Seja a reta $Ax + By + C = 0$ e $M(x_1, y_1)$ um ponto dessa reta.

Se a reta passa por M, temos:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

Subtraindo membro a membro essas duas equações obtemos:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

que é a equação das retas que passam por M.

Se $B \neq 0$, podemos escrevê-la

$$y - y_1 = \frac{-A}{B}(x - x_1)$$

ou

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)} \qquad \text{(IX)}$$

que é a equação comumente usada. Exemplos:

1.º) Escrever a equação do feixe de retas que passam pelo ponto $(2, 1)$.

Temos:

$$y - 1 = a(x - 2)$$

2.º) Escrever a equação da reta que passa no ponto $M(-1, 2)$ e forma um ângulo de $45°$ com o semi-eixo positivo dos x.

A equação do feixe de retas passando por M é

$$y - 2 = a(x + 1)$$

se a inclinação é de $45°$, $a = tg\, 45° = 1$, e a reta pedida será:

$$y - 2 = x + 1 \quad \text{ou} \quad y = x + 3$$

2. Equação das retas que passam por dois pontos. Seja a equação geral da reta

$$Ax + By + C = 0 \qquad (I)$$

e $M_1(x_1, y_1)$ e $M_2(x_2, y_2)$

A equação das retas que passam por M_1 é:

$$y - y_1 = a(x - x_1) \qquad (1)$$

Se a reta passa também por M_2, as coordenadas (x_2, y_2) devem satisfazer a equação (1)

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \therefore \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

substituindo esse valor de a em (1), temos:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \qquad (X)$$

Exemplo:

Qual a equação da reta que passa pelos pontos (2, 3) e (−1, 1)?

De acordo com a (X):

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{-1 - 2}(x - 2)$$

ou

$$2x - 3y + 5 = 0$$

3. Observação. A equação (X) pode ser escrita assim:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ou colocando sob a forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha)$$

que é equivalente a (X) e é, pois, a equação da reta que passa por dois pontos. Exemplo:

A reta que passa pelos pontos (2, 3) e (−1, 1) é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad 2x - 3y + 5 = 0$$

4. Regra prática. A (X) pode ainda ser escrita assim:

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x \\ y & y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0 \qquad (\beta)$$

cujo primeiro membro é calculado como foi ensinado no estudo da área do triângulo.

Exemplo:

Achar a reta que passa pelos pontos (2, 3) e (−1, 1).

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 & x \\ y & 3 & 1 & y \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3x + 2 - y) - (2y - 3 + x) = 2x - 3y + 5 = 0$$

5. Exercícios. (Sobre os Nºs 1 e 2).

1) Qual a equação da reta que passa pelo ponto (2, 1) e tem coeficiente angular igual a −1?
2) Qual a equação do feixe de retas que passam pelo ponto (5, 1)?
3) Qual a equação da reta passando pelo ponto (−2, 2) e paralela à 1.ª bissetriz?
4) Qual a equação da reta passando pelo ponto (2, −3) e perpendicular à 2.ª bissetriz?
5) Achar a equação da reta que passa pelos pontos (2, 1) e (7, −1).
6) Achar as equações dos lados de um triângulo cujos vértices são (−3, 2), (3, −2) e (0, −1).
7) Determinar m de modo que a reta $2x - 3y + m = 0$ passe pelo ponto (−2, 1).
8) Determinar m de modo que a reta $2mx - 5y + 1 = 0$ tenha um coeficiente angular igual a 4.
9) Achar a equação da reta paralela à reta $3x + y + 1 = 0$ e passando pelo ponto (−1, 4).
10) Escrever a equação do feixe de retas cuja ordenada na origem é −3.
11) Escrever a equação representando todas as retas cujo coeficiente angular é $-\frac{2}{3}$.

RESPOSTAS:

1) $x+y-3=0$ 3) $y=x+4$ 5) $2x+5y-9=0$
2) $y-1=a(x-5)$ 4) $x-y-5=0$
6) $2x+3y=0$, $x+y+1=0$ e $x+3y+3=0$ 7) $m=7$
8) $m=10$ 10) $y=ax-3$
9) $3x+y-1=0$ 11) $y=-{}^2/_3 x+b$

6. Posição relativa de duas retas. Ponto de interseção. Sejam duas retas representadas por suas equações

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases} \quad (1)$$

As coordenadas do *ponto de interseção* dessas retas devem satisfazer, simultaneamente, as duas equações, logo é uma solução de (1).

Se $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, o sistema (1) é *determinado*; e, se tem uma só solução, as retas dadas têm um só ponto em comum — são *incidentes* ou *concorrentes*.

Se $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, o sistema (1) é *indeterminado* e as retas dadas têm uma infinidade de pontos em comum — são *coincidentes*.

Se $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$, o sistema (1) é *impossível* e, se não tem solução, as retas dadas não têm ponto em comum — são *paralelas*.

7. Condição para que três retas sejam concorrentes. Sejam as 3 retas apresentadas pelas equações

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \quad (2)$$

se elas forem concorrentes têm um ponto em comum e, portanto, o sistema (2) deve ter solução; logo, pelo teorema de Rouché (*), temos que

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

(*) Eugenio Rouché, matemático (1832-1910).

8. Exercícios (Sobre Nºs 6 e 7).

Diga a posição relativa das retas representadas pelos pares de equações abaixo:

1) $2x-3y+5=0$ e $4x+6y+10=0$
2) $3x-2y-1=0$ e $6x-4y-2=0$
3) $3x+5y-2=0$ e $9x+15y-5=0$

Achar m para que:

4) as retas $3x+2my-5=0$ e $y=x+1$ sejam incidentes.
5) as retas $mx+12y=6$ e $3x+my=3$ sejam paralelas.
6) as retas $mx+12y=6$ e $3x+my+3=0$ sejam coincidentes.
7) As retas $2x-5y+7=0$, $7x-6y+15=0$ e $3x+4y+1=0$ são concorrentes?

RESPOSTAS:

1) Incidentes 3) paralelas 5) $m=-6$ 7) Sim
2) coincidentes 4) $m\neq -{}^3/_2$ 6) $m=-6$

ÂNGULO DE DUAS RETAS

9. Definição. Chama-se ângulo de duas retas oblíquas r e s, de r para s, ao menor dos ângulos, medido no sentido anti-horário, tendo r como lado inicial e s como lado terminal. Para dar maior destaque à definição indicaremos o ângulo por θ_{rs}.

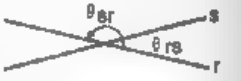


FIG. 14

O ângulo, dessas retas, de s para r será:

$$\theta_{sr} = 180^\circ - \theta_{rs} \text{ (fig. 14)}$$

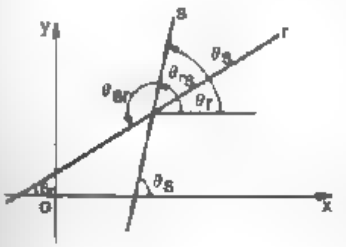


FIG. 15

Se as retas são paralelas seu ângulo é nulo, e se são perpendiculares seu ângulo é um dos quatro ângulos iguais (retos).

10. Tangente do ângulo de 2 retas. Sejam duas retas oblíquas r e s cujas inclinações são θ_r e θ_s (fig. 15) e que não são perpendiculares ao eixo dos x.

O ângulo $\theta_{rs} = \theta_s - \theta_r$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} \theta_{rs} = \operatorname{tg} (\theta_s - \theta_r) = \frac{\operatorname{tg} \theta_s - \operatorname{tg} \theta_r}{1 + \operatorname{tg} \theta_s \operatorname{tg} \theta_r}$$

Mas, $\operatorname{tg} \theta_s = m_s$ e $\operatorname{tg} \theta_r = m_r$, sendo m_r e m_s, respectivamente, os coeficientes angulares de r e s.

Então,

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_{rs} = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}}$$

é a expressão da tangente do ângulo de duas retas em função de seus coeficientes angulares.

Se quisermos calcular o ângulo θ_{sr} (fig. 15), teremos:

$$\operatorname{tg} \theta_{sr} = \operatorname{tg} (180^\circ - \theta_{rs}) = - \operatorname{tg} \theta_{rs}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} \theta_{sr} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_s m_r}$$

11. Condição de paralelismo de 2 retas. É fácil de concluir que duas retas r e s são paralelas, quando $\theta_{rs} = 0$ ou $\operatorname{tg} \theta_{rs} = 0$. E, da fórmula do N.º 10, concluímos que

$$m_s - m_r = 0 \quad \therefore \quad \boxed{m_s = m_r}$$

> Então, 2 retas são paralelas quando seus coeficientes angulares são iguais.

12. Condição de perpendicularismo de 2 retas. Se as retas r e s são perpendiculares (fig. 15)

$$\theta_{rs} = \theta_s - \theta_r \quad \therefore \quad \theta_s = 90^\circ + \theta_r$$

Então, $\operatorname{tg} \theta_s = \operatorname{tg} (90^\circ + \theta_r) = - \operatorname{cot} \theta_r = - \dfrac{1}{\operatorname{tg} \theta_r}$

ou

$$\boxed{m_s = - \frac{1}{m_r}}$$

> Então, 2 retas são perpendiculares quando o coeficiente angular de uma delas for o simétrico do inverso da outra.

13. Exercícios resolvidos (Sobre os N.os 9 a 12).

1) Achar os ângulos formados pelas retas

$$2x - y + 7 = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y + 1 = 0$$

Temos: $y = 2x + 7$ e $y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$

O coeficiente angular da primeira reta é $m = 2$, e o da segunda é $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

E pelas tábuas $\varphi \cong 36^\circ 52'$ ou $\varphi \cong 143^\circ 8'$

2) Achar o ângulo agudo das retas $y = x + 7$ e $x = 3$

Temos que o coeficiente da 1.ª reta é $m = 1$ e o da segunda reta não existe, pois ela é paralela ao eixo dos y. Então, o ângulo formado pelas 2 retas é o complemento do ângulo α, formado pela primeira reta com o semi-eixo positivo dos x.

Como $m = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$ e $\alpha = 45^\circ$, logo, o ângulo pedido será

$$\varphi = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

3) Achar o ângulo agudo formado pelas retas

$$2x - 4y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad y - 1 = 0$$

Temos: $y = \frac{2}{4} x + \frac{1}{4}$ e $y = 1$

Como a 2.ª reta é paralela ao eixo dos x, o ângulo φ das retas é igual ao ângulo α da primeira reta com $0x$. Então:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha = m = \frac{2}{4} \quad \therefore \quad \varphi = 26^\circ 52'$$

4) Calcular o ângulo de r para s das retas r e s representadas, respectivamente, por

$$y = -3x - 2 \quad \text{e} \quad y = 2x + 1$$

$$\operatorname{tg} \theta_{rs} = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s}$$

Mas, $m_s = 2$ e $m_r = -3$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} \theta_{rs} = \frac{2 + 3}{1 - 6} = -1$$

$$\theta_{rs} = 135^\circ$$

5) Verificar se os pares de retas seguintes são paralelas, perpendiculares ou oblíquas.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = -\frac{2}{3} x + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$

a) Paralelas. Mesmo coeficiente angular.
b) Perpendiculares. Coeficientes angulares respectivamente iguais a $\frac{3}{5}$ e $-\frac{5}{3}$.
c) Oblíquas.

6) Escrever a equação da reta que passa pelo ponto (2, −1) e é paralela à reta $2x + y + 1 = 0$

$$y + 1 = m(x - 2) \quad \text{mas} \quad m = -2$$
$$\therefore\ y + 1 = -2(x - 2) \quad \text{ou} \quad 2x + y - 3 = 0$$

7) Achar a equação da reta passando pelo ponto (2, −2) e perpendicular à reta $2x - y + 1 = 0$.

Reta passando por (2, −2)

$$y + 2 = a(x - 2)$$

Coeficiente angular m da reta dada:

$$y = 2x + 1 \quad \therefore\ m = 2$$

Então: $a = -\frac{1}{2}$, e a reta pedida será: $x + 2y + 2 = 0$

8) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto (−2, 7) e que faça um ângulo de 45° com a reta determinada pelos pontos $A(5, -1)$ e $B(-8, 4)$. (E. N. Engenharia, 1946).

Temos:

a) Reta que passa por (−2, 7): $y - 7 = a(x + 2)$
b) Reta que passa por A e B: $5x + 13y - 12 = 0$
c) Cálculo de a:

$$m = -\frac{5}{13} \quad \therefore\ \operatorname{tg} 45° = \frac{m - a}{1 + ma} = 1 \quad \therefore\ a = -\frac{9}{4}$$

d) Reta pedida: $9x + 4y - 10 = 0$

9) Achar a equação da reta passando pelo ponto (2, 3) e formando com a reta $y = -x + 7$ um ângulo de 45°.

Temos: $y - 3 = a(x - 2)$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$ e $m = -1$

$$\therefore\ 1 = \frac{-1 - a}{1 - a} \quad \therefore\ 1 - a = -1 - a \quad \therefore\ 0 = -2 \text{ (absurdo)}$$

A reta pedida é, pois, paralela ao eixo dos y.

14. Exercícios para resolver. (Sobre Nºs 9 a 12).

1) Qual o ângulo agudo das retas $3x - 5y + 3 = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$?
2) Qual o ângulo obtuso das retas $2x - y - 3 = 0$ e $3x + y - 1 = 0$?
3) Quais os dois ângulos formados pelas retas $3x - y - 10 = 0$ e $2x + y - 5 = 0$?
4) Quanto mede cada ângulo do triângulo cujos lados tem para equações:
$$2x - y - 3 = 0,\ y = -3x + 1 \text{ e } x - 3y + 9 = 0$$
5) Verificar se as retas $2x - 3y + 1 = 0$ e $3x + 2y - 5 = 0$ são perpendiculares.
6) Provar que o quadrilátero $ABCD$, cujos suportes dos lados AB, BC, CD e DA são, respectivamente, $2x + 3y + 5 = 0$, $y = 5x - 1$, $4x + 6y - 9 = 0$ e $y = 5x + 7$, é um paralelogramo.

Sugestão: Usar o N.º 11.

Respostas:

1) 4° 24′ 2) 135° 3) 45° e 135° 4) 90°, 45° e 45° 5) Sim

15. Exercícios (Sobre os Nºs 1 a 13).

1) Qual a equação da reta passando pelo ponto (3, 1) e paralela à reta $2x - 3y + 5 = 0$?
2) Qual a equação da reta passando pelo ponto (−1, 2) e perpendicular à reta $3x - 4y + 7 = 0$?
3) Achar as equações das três alturas do triângulo cujas equações de seus lados são:
$$y = 6x,\ x - 5y = 0 \text{ e } 5x + 4y - 29 = 0$$
4) Achar as equações das retas passando pelo ponto (2, 1) e fazendo um ângulo de 45° com a reta $2x - 3y + 2 = 0$.
5) Qual a equação de uma reta passando pelo ponto (2, −5) e fazendo um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos com a reta $x + 3y - 3 = 0$?
6) Achar a equação da reta paralela à reta determinada pelos pontos $A(-2, 6)$ e $B(2, 1)$ e passando pelo ponto $P(-1, -1)$.
7) Qual a equação da mediatriz do segmento, cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados?

Respostas:

1) $2x - 3y - 3 = 0$
2) $4x + 3y - 2 = 0$
3) $5x + y - 11 = 0$, $4x - 5y = 0$ e $x + 6y - 11 = 0$
4) $5x - y - 9 = 0$ ou $x + 5y - 7 = 0$
5) $x - 2y - 12 = 0$
6) $5x + 4y + 9 = 0$
7) $36x + 24y + 35 = 0$

16. Distância de um ponto a uma reta. Seja uma reta r, cuja equação é

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

e um ponto $P(x_1, y_1)$, não pertencente a r, e calculemos a fórmula que nos dá a distância d de P a r.

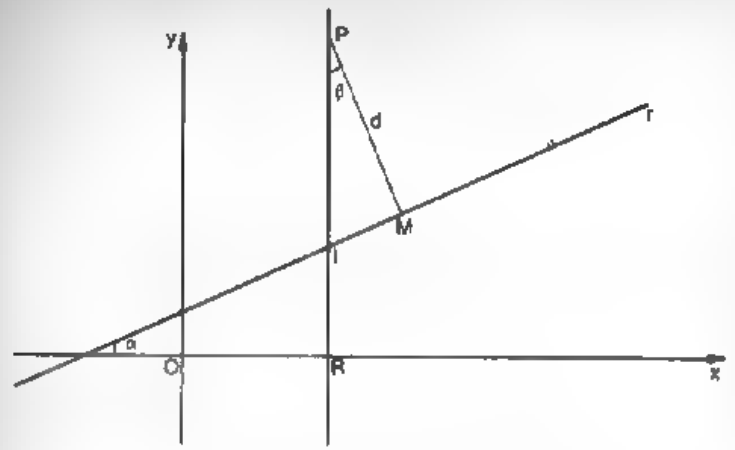


FIG. 16

Seja, na figura 16, a reta PR, paralela ao eixo dos y e interceptando r, em I (x_1, y_2).

Temos: $d = PI \cdot \cos\beta$

e como $\beta = \alpha$ (ângulos agudos de lados perpendiculares),

$$d = PI \cdot \cos\alpha = \frac{PI}{\sec\alpha} = \frac{y_1 - y_2}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad (2)$$

Mas, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$ e, sendo I um ponto de r,

$$Ax_1 + By_2 + C = 0 \;\therefore\; y_2 = -\frac{Ax_1 + C}{B},$$

substituindo esses valores, em (2), temos:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3)$$

e sendo d uma distância

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \qquad (4)$$

Observação: O duplo sinal do denominador de (3), pode ser explicado pelo deslocamento de P, sobre RI. É fácil de ver que como

x_1 permanece constante e y_1 varia, d variará com y_1; porém, quando P coincide com I, $d=0$, portanto d será positivo ou negativo, conforme P esteja acima ou abaixo de r, e o sinal do radical será o mesmo de B.

Se $B=0$, r é paralela a y, e d será positivo ou negativo conforme P esteja, respectivamente, à direita ou à esquerda de r.

Se a reta r é dada por sua equação normal

$$x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega - p = 0$$

demonstra-se que a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta r é

$$d = |x_0\cos\omega + y_0\operatorname{sen}\omega - p|$$

Exemplo:

Calcular a distância do ponto $P(2, -3)$ à reta $3x - 4y + 2 = 0$

$$d = \frac{|3\times 2 - 4(-3) + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6+12+2|}{5} = 4$$

17. Exercícios para resolver.

1) Qual a distância da origem à reta
$x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 12 = 0$? (U.E.G. – 1972).

2) Qual a distância do ponto (6, 3) à reta $3x - 5y = 7$?
(E. Engenharia Mackenzie – 1940).

3) Calcula a distância da origem das coordenadas à reta
$m(x - m) + p(y - p) = 0$
(F. Eng. da Un. Rio – 29/5/61).

4) Achar a distância da reta $x\cos 45° + y\operatorname{sen} 45° - 3\sqrt{2} = 0$ ao ponto $P(10, -2)$.

5) Calcular a distância do ponto (2, 4) à reta que passa pelos pontos (–3, 1) e (5, –1).

6) Achar a distância entre as paralelas $3x+4y=0$ e $3x+4y-1=0$.

Respostas:

1) 6 2) $^9/_{17}\sqrt{34}$ 3) $\sqrt{m^2+p^2}$ 4) $\sqrt{2}$ 5) $\sqrt{17}$ 6) $^1/_5$

18. Verificação analítica da posição de um ponto, em relação a uma reta. Demonstra-se que se $Ax+By+C=0$ é a equação de uma reta r $(B>0)$, e $P(x_1, y_1)$ é um ponto não pertencente a r, tem-se:

a) se $Ax_1+By_1+C>0$ P está acima de r
b) se $Ax_1+By_1+C<0$ P está abaixo de r
c) se $Ax_1+By_1+C=0$ P pertencente a r

(A noção de ponto abaixo ou acima de uma reta pode ser apreendida no N.º 16 — Obs.).

Exemplos:

Sejam a reta r de equação $x+2y-1=0$ e os pontos $A(-1, 1)$, $B(3, 2)$ e $C(-2, -1)$.

O ponto A pertence a r pois: $-1+2(1)-1=0$

O ponto B está acima de r, sobre a vertical traçada por B, pois: $3+2(2)-1>0$

O ponto C está abaixo de r, sobre a vertical traçada por C, pois: $-2+2(-1)-1<0$.

19. Bissetrizes dos ângulos de 2 retas. Sejam as retas $Ax+By+C=0$ e $A_1x+B_1y+C_1=0$.

Como (C. Ginasial) a bissetriz do ângulo dessas retas é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados, então tomando um ponto $P(x, y)$ qualquer da bissetriz, temos, de acordo com a (4) do N.º 16:

$$\boxed{\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}} \qquad (1)$$

Observação — Demonstra-se que:

1.º) Se $AA'+BB'>0$, a bissetriz do ângulo agudo será obtida considerando, no segundo membro de (1), o sinal *menos*, e a do ângulo obtuso o sinal *mais*;

2.º) Se $AA'+BB'<0$, a bissetriz do ângulo agudo será obtida considerando, no segundo membro de (1), o sinal *mais*, e a do ângulo obtuso o sinal *menos*;

3.º) Se $AA'+BB'=0$, as retas são perpendiculares e os ângulos formados são retos. Exemplos:

1) Nas retas $4x-3y+3=0$ e $3x-4y+6=0$, como $AA'+BB'>0$, a bissetriz do ângulo agudo é:

$$\frac{4x-3y+3}{5}=-\frac{3x-4y+6}{5} \quad \text{ou} \quad 7x-7y+9=0$$

2) Nas retas $3x+4y-6=0$ e $3x-4y-2=0$, como $AA'+BB'<0$, a bissetriz do ângulo obtuso é:

$$\frac{3x+4y-6}{5}=-\frac{3x-4y-2}{5} \quad \text{ou} \quad 3x-4=0$$

3) Nas retas $4x+3y+5=0$ e $3x-4y-2=0$, como $AA'+BB'=0$, as bissetrizes dos ângulos retos são:

$$x+7y+7=0 \quad \text{e} \quad 7x-y+3=0$$

20. Bissetrizes dos ângulos de um triângulo. Seja, por exemplo, um triângulo ABC, onde uma das bissetrizes do ângulo A é $ax+by+c=0$ $(b>0)$ e $B(x_1, y_1)$ e $C(x_2, y_2)$.

Se ax_1+by_1+c e ax_2+by_2+c tiverem sinais contrários, $ax+by+c=0$ é bissetriz interna; se tiverem mesmo sinal, é bissetriz externa.

Conclusão fácil tendo em vista o N.º 18 e o fato de que B e C estão em semi-planos contrários, em relação à bissetriz interna, e no mesmo semi-plano em relação à bissetriz externa.

Exemplo:

Num triângulo de vértices $A(-5,5)$, $B(0, -5)$ e $C(3,1)$, a reta AB é $2x+y+5=0$ e a reta AC é $x+2y-5=0$.

As bissetrizes de A são: $x-y+10=0$ e $x+y=0$.

Substituindo as coordenadas de B e C nas equações das bissetrizes de A, concluímos que $x-y+10=0$ é a bissetriz externa e $x+y=0$ a bissetriz interna.

21. Exercícios (Ns. 19 e 20).

1) Quais as equações das bissetrizes das retas
$$3x+4y-12=0 \quad \text{e} \quad 4x-3y+9=0$$

2) Achar as bissetrizes dos ângulos das retas cujas equações são:
$$4x-3y-1=0 \quad \text{e} \quad 3x-4y+2=0$$

3) Achar as bissetrizes do triângulo cujas equações de seus lados são:
$$4x-3y-12=0, \quad 5x-12y-4=0 \quad \text{e} \quad 12x-5y-13=0$$

4) Calcular as coordenadas do incentro (centro da circunferência inscrita) do triângulo cujos suportes dos lados são:
$$3x+4y-12=0, \quad 4x-3y+9=0 \quad \text{e} \quad 3x-15y-34=0$$

Sugestão: Calcular duas bissetrizes internas e após resolver o sistema formado pelas suas equações.

Respostas:

1) $7x+y-3=0$ e $x-7y+21=0$

2) $y=x+\frac{1}{7}$ e $y=-x+3$

3) $7x-9y-16=0$, $7x+7y+9=0$ e $112x-64y-221=0$

4) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

CAPÍTULO V

Circunferência

1. Equação representativa da circunferência. Sabemos que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano eqüidistantes de um ponto dado.

Seja $C(x_0, y_0)$ o ponto dado, *centro* da circunferência, e seja $MC = R$ a distância de um ponto $M(x, y)$ qualquer da circunferência ao centro, isto é, o *raio*.

Nós desejamos achar a equação da circunferência, isto é, a equação que seja satisfeita para cada ponto $M(x, y)$ a uma distância R do centro $C(x_0, y_0)$.

Mas, a distância MC é dada por

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Então a equação procurada é:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

ou

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2} \qquad (1)$$

que é a equação da circunferência de centro (x_0, y_0) e raio R em coordenadas cartesianas.

Observações:

1.ª) Se o centro está na origem dos eixos coordenados, a equação da circunferência é:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \qquad (2)$$

2.ª) Se o centro está sobre o eixo dos x e a circunferência passa pela origem, temos: $x_0 = R$ e $y_0 = 0$

e a (1) ficará:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2Rx = 0} \qquad (3)$$

3.ª) Se o centro está sobre o eixo dos y e a circunferência passa pela origem, temos: $y_0 = R$ e $x_0 = 0$

e a (1) ficará:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2Ry = 0}$$

4.ª) Se $R = 0$, diz-se que a circunferência se reduziu a um ponto. Exemplo: $x^2 + y^2 = 0$ se reduziu à origem.

5.ª) Se R é um número imaginário, a circunferência diz-se imaginária.

2. A equação geral do 2.º grau com duas variáveis e a equação da circunferência. Desenvolvendo a equação (1), temos:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

e a equação da circunferência pode ser escrita assim:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0 \qquad (1)$$

que é uma equação do 2.º grau com duas incógnitas.

Comparando essa equação com a equação do 2.º grau com duas variáveis

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (2)$$

vemos que a (2) se transformará na (1) se

$$(3)\quad \begin{cases} A = 1 \text{ e } B = 1 & \therefore\ A = B \\ C = 0 & \\ 2D = -2x_0 & \therefore\ x_0 = -D \\ 2E = -2y_0 & \therefore\ y_0 = -E \\ F = x_0^2 + y_0^2 - R^2 & \therefore\ R^2 = x_0^2 + y_0^2 - F = D^2 + E^2 - F \end{cases}$$

Podemos então dizer que as condições necessárias e suficientes para que uma equação do 2.º grau, com duas variáveis, seja a equação de uma circunferência, em coordenadas cartesianas retangulares, são:

a) $A = B$ (coeficiente de x^2 e y^2 iguais)

b) $C = 0$ (não possua termo em xy)

c) $R^2 = D^2 + E^2 - F > 0$

(Quando $A = B \neq 1$, deve-se dividir primeiro a equação por esse valor)

3. Aplicações.

I) Escrever a equação de uma circunferência dados o seu centro e o seu raio.

Basta substituir esses valores na fórmula (1) do N.° 1.

Exemplo:

Qual a equação da circunferência de centro (3, 1) e raio 2?

Temos: $(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0$$

II) Determinar o raio e o centro de uma circunferência conhecida sua equação.

Basta concluir das três últimas relações de (3) que:

$x_0=-D$ (simétrico da metade do coeficiente de x)

$y_0=-E$ (simétrico da metade do coeficiente de y)

$R=\sqrt{D^2+E^2-F}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-F}$

Exemplo:

Calcular o raio e o centro da circunferência cuja equação é:

$$x^2+y^2-6x-10y+25=0$$

$$x_0=\frac{6}{2}=3; \qquad y_0=\frac{10}{2}=5$$

$$R=\sqrt{9+25-25}=3$$

4. Intereseção de retas e circunferências. Sejam as equações de uma reta r e de uma circunferência C, respectivamente:

$$(1)\ \begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \end{cases}$$

Os pontos de interseção da reta r com a circunferência C são as soluções do sistema do 2.° grau (1).

Como um sistema do 2.° grau tem duas soluções, distintas ou iguais, ou é impossível, concluímos que a reta r tem dois, um ou nenhum ponto em comum com C, respectivamente. Isto é, conforme o sistema (1) tenha *duas soluções distintas, duas iguais* ou *nenhuma solução*, a reta r será, respectivamente, *secante, tangente* ou *externa* à circunferência C.

5. Observação. Quando no sistema (1) do N.° 4 eliminamos uma das incógnitas pelo método de substituição, obtemos uma equação do 2.° grau com uma só incógnita, que nos fornece os valores de uma das coordenadas.

Se nessa equação o discriminante for:

a) $\Delta > 0$, as raízes são reais e distintas e a reta é *secante*;

b) $\Delta = 0$, as raízes são reais e iguais, e a reta é *tangente*;

c) $\Delta < 0$, raízes complexas conjugadas, a reta é *externa*.

6. Exercícios sobre circunferência.

1) Qual a equação da circunferência de centro na origem e raio um?

2) O centro de uma circunferência é $C(2, 5)$ e o seu raio é 2. Qual a equação dessa circunferência?

3) Qual a equação da circunferência de círculo de centro no ponto (1, 0) e tangente ao eixo dos y?

4) Qual a equação da circunferência de centro no ponto (0, −2) e tangente ao eixo dos x?

5) Qual a equação da circunferência tangente aos dois semieixos negativos e de raio igual a 1?

6) Qual a equação da circunferência tangente aos semieixos positivos e de raio igual a 2?

7) As extremidades do diâmetro de uma circunferência são $A(2, 3)$ e $B(4, -5)$. Qual a equação dessa circunferência?

8) Qual a equação da circunferência de centro (3, 1) e que passa pelo ponto (6, 5)?

9) Determinar o centro e o raio da circunferência $x^2+y^2=36$.

10) Determinar em grandeza e posição o centro e o raio da circunferência

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

(E. Engenharia Mackenzie – 1961).

11) $2x^2+2y^2-10x+2y+5=0$ é a equação de uma circunferência. Qual o seu centro e o seu raio?

12) A equação $x^2-y^2+4x-6y+5=0$ é a equação de uma circunferência?

13) Qual é a equação da circunferência de raio igual a 5, concêntrica à circunferência $x^2+y^2+6x+10y-15=0$?

14) Qual a equação da circunferência de centro (3, 1) e tangente à reta $3x+4y+7=0$?

(Esc. Aeronáutica – 1956).

15) Quais os pontos de intersecção da reta $x+y=3$ com a circunferência $x^2+y^2=5$?

16) Qual o comprimento da corda, da circunferência $x^2+y^2-4x-2y+3=0$, cujo suporte é a reta $y=x+1$?

17) Verifique se a reta $y=2x-1$ é tangente à circunferência

$$x^2+y^2+2x-4y=0$$

18) Para que valores de m a reta $y = -x - m$ é tangente à circunferência
$$x^2 + y^2 = 25$$
(E. Fluss. Engenharia – 1950).

19) Calcular o comprimento da corda da circunferência $x^2+y^2-x-4y-2=0$ situada sobre a secante determinada pelos pontos $A(-7,-3)$ e $B(11,16)$
E. N. Engenharia – 1947).

RESPOSTAS:

1) $x^2+y^2=1$
2) $x^2+y^2-4x-10y+25=0$
3) $x^2+y^2-2x=0$
4) $x^2+y^2+4y=0$
5) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$
6) $x^2+y^2-4x-4y+4=0$
7) $x^2+y^2-6x+2y-7=0$
8) $x^2+y^2-6x-2y-15=0$
9) (0, 0) e 6
10) (2, −3) e 5
11) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e 2
12) Não. Ver N.º 2
13) $x^2+y^2+6x+10y+9=0$
14) $x^2+y^2-6x-2y-6=0$
15) (1, 2) e (2, 1)
16) A reta é tangente
17) Sim
18) $\pm 5\sqrt{2}$
19) 5

7. Questões de concursos resolvidas.

1) Provar que o quadrilátero cujos vértices são: $A(1, 2)$; $B(3, -2)$; $C(-1, -3)$; $D(-3, 1)$ é um paralelogramo. Determinar a área do mesmo. (E. Engenharia Mackenzie – 1947).

a) Cálculo do comprimento dos lados:
$$\overline{AB} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \qquad \overline{CD} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \qquad \overline{AD} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

O quadrilátero é pois um paralelogramo, pois seus lados opostos são iguais.

b) Cálculo da área:
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = 2S_{ABC}$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -9$$
$\therefore\ S_{ABCD} = 18$ unidades de área

2) Determinar a equação da uma reta que passa pelo centro do círculo cuja equação é $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ e é perpendicular à reta $3x - 2y + 7 = 0$. (Escola Naval – 14/8/52).

a) Centro da circunferência
$$x_0 = -\frac{-2}{2} = 1 \qquad y_0 = -\frac{4}{2} = -2 \quad \therefore\ C(1, -2)$$

b) Reta passando por C: $y + 2 = a(x - 1)$

c) Coeficiente angular de $3x - 2y + 6 = 0$ $\qquad m = \frac{3}{2}$

d) Condição perpendicularismo: $a = -\frac{1}{m} = -\frac{2}{3}$

e) Reta pedida: $2x + 3y + 4 = 0$

3) Dar as coordenadas do ponto simétrico de $M(3, 4)$ em relação à reta que une os pontos $A(-1, 3)$ e $B(4, -2)$
(E. N. Engenharia – 1951).

a) Reta AB $\qquad x + y - 2 = 0$

b) Distância de M à reta AB $\qquad d = \frac{|3+4-2|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

c) Reta r passando por M perpendicular a AB
$$y - 4 = a(x - 3)$$
coeficiente angular de AB:
$$m = -1 \quad \therefore\ a = 1$$
$$\therefore\ y - 4 = x - 3 \quad \text{ou} \quad x - y + 1 = 0$$

d) Ponto $N(x_0, y_0)$ pertencente à reta r e distando de d da reta AB.
Se N pertence a r: $x_0 - y_0 = -1 \quad \therefore\ x_0 = y_0 - 1$
Se N dista de d da reta AB:
$$\frac{|x_0 + y_0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \therefore\ |x_0 + y_0 - 2| = 5$$
ou $\qquad |y_0 - 1 + y_0 - 2| = 5 \quad \therefore\ |2y_0 - 3| = 5$

Elevando ao quadrado: $4y_0^2 - 12y_0 - 16 = 0$
Simplificando e resolvendo temos: $y_0 = 4$ ou $y_0 = -1$
Se $y_0 = 4$, $x_0 = 4 - 1 = 3$ tem-se o ponto $M(3, 4)$
Se $y_0 = -1$, $x_0 = -1 - 1 = -2 \quad \therefore\ N(-2, -1)$

4) Os pontos de intersecção da reta $7x + y + 5 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ constituem, com outro ponto da circunferência, os vértices de um triângulo retângulo. Dar esse outro ponto. (E. N. Engenharia – 1946).

a) Pontos A e B de interseção.

Resolvendo o sistema formado pelas equações da reta e da circunferência, temos: $\qquad A(0, -5)$ e $B(-1, 2)$

b) Determinação do centro 0.
$$x_0 = -\frac{-6}{2} = 3 \quad \text{e} \quad y_0 = -\frac{2}{2} = -1 \qquad 0(3, -1)$$

c) Equação da reta r que passa por A e O.

Temos: $4x - 3y - 15 = 0$

d) Ponto C pedido, que é a interseção de r com a circunferência.

As soluções do sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

são: $(6, 3)$ e $(0, -5)$

que são respectivamente o ponto C e o ponto A.

Resposta: $C(6, 3)$

(O problema admite também a solução $C(7, -4)$)

5) Determinar a distância do baricentro do triângulo, cujos lados tem para equações $2x - y + 1 = 0$; $3x + y - 2 = 0$ e $x + y - 1 = 0$, à reta $3x + 7y + 11 = 0$. (E. Eng. Univ. Recife – 1948).

a) Determinação dos vértices.

Combinando às equações das retas 2 a 2 obtemos para soluções dos sistemas formados os vértices:

$$A\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad C(0, 1)$$

b) Cálculo do baricentro G (centro de gravidade do triângulo ABC).

As coordenadas do baricentro de um triângulo são a média aritmética das coordenadas dos seus vértices.

$$x_g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Então $$G\left(\frac{7}{30}, \frac{29}{30}\right)$$

c) Distância de G à reta dada.

$$d = \frac{58}{15\sqrt{58}}$$

8. Questões de Revisão e de Exames Vestibulares sobre Geometria Analítica (para resolver).

1) Escrever a equação da reta que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 5 = 0$ e que é perpendicular à reta $x - 2y + 1 = 0$. (F. Engenharia Univ. Paraná – 12/2/55).

2) Calcule as equações das circunferências de círculo cujo centro é o ponto $M(3, 4)$ e que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$ (E. Flum. Engenharia – 1957).

3) Determinar as coordenadas dos vértices de um triângulo, cujas equações dos lados são: $x + y = 1$, $x - 2y = 3$ e $3y - 5x = 15$. (E. Aeronáutica – 1956).

4) Dê a equação do círculo no qual as extremidades de um diâmetro são os pontos $A(0, -3)$ e $B(6, 0)$. (ENE – 1951).

5) Determine as equações das retas que, passando pelos pontos que dividem o segmento de reta AB em três partes iguais, são perpendiculares a este mesmo segmento.

$A(4, 0)$; $B(0, 2)$ (F. Fil. UEG – 1965).

6) Dê a equação da circunferência que passa pelo ponto $(-2, 4)$ e é concêntrica com a circunferência $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$. (F. Eng. U. Rio – 20/5/51).

7) Dada a circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 8 = 0$ pede-se a equação da reta que passa pelo centro e pelo ponto $(8, -5)$. (E. N. Química – 16/2/48).

8) São dados os vértices de um triângulo $A(0, 4)$, $B(6, 0)$ e $C(4, 6)$. Pedem-se:

a) A equação do lado BC;

b) A equação da altura traçada pelo vértice A;

c) O comprimento da mediana traçada pelo vértice A. (E. Aeronáutica – 1957).

9) Achar a equação da circunferência que tem para centro o ponto $(8, 1)$ e que é tangente à reta $3x + 4y + 7 = 0$. (E. N. Química – 1946).

10) Determinar o ângulo entre as retas que passam por $(-3, 4)$, $(6, 1)$ e $(7, 2)$, $(5, 6/3)$. (E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1948).

11) Dado o ponto $P(2,3)$, o ponto simétrico de P com relação à reta $y = x - 3$ é ... (FGV – 73 – SP).

12) Dados os pontos $A(-5, 4)$, B 8, 2) e $C(7, 1)$ sobre uma reta, calcular as coordenadas do ponto $M(x, y)$ tal que

$$\frac{MA}{MC} = -\frac{BA}{BC}$$

(E. N. Engenharia – 1950).

13) Um quadrado tem um dos seus vértices na origem e outro vértice, oposto ao primeiro, no ponto $(-6, -2)$. Determinar: 1) a diagonal do quadrado; 2) as coordenadas dos outros dois vértices. (E. Politécnica U. Católica – 1948).

14) Provar que o quadrilátero cujos vértices são: $A(1, 2)$; $B(3, -2)$; $C(-1, -3)$ e $D(-3, 1)$ é um paralelogramo. Determinar a área do mesmo. (E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1947).

15) Achar a distância do ponto $(4, 1)$ à reta $3x - 4y + 1 = 0$, sem aplicação direta da fórmula da distância. (E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1949).

16) Dar as coodernadas do ponto simétrico de $M(3, 4)$, em relação à reta que une os pontos $A(-1, 3)$ e $B(4, -2)$. (E. N. Engenharia – 1951).

17) Determinar a equação da reta que passa pela interseção das retas cujas equações são: $4x - 5y - 5 = 0$ e $13x - 15y = 1$ e é perpendicular à primeira.. (E. Superior Agronomia – Pernambuco).

18) Dois vértices de um quadrado são $A\ (4, 0)$ e $B\ (0, 6)$. Calcular as coordenadas dos dois outros vértices.
(E. N. Agronomia).

19) Sendo dada a equação da reta $2x - 3y + 6 = 0$, determinar:

1.º) os segmentos à origem;
2.º) o coeficiente angular;
3.º) os co-senos diretores;
4.º) a equação da reta que lhe é paralela e passe pelo ponto $(1, 1)$;
5.º) o ângulo da reta dada com a reta $3x + 4y - 5 = 0$.
(E. N. Química – 1945).

20) Calcular a distância do centro da circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$ às bissetrizes dos ângulos formados pelas retas de equações:

$$y - 3 = \sqrt{3}\,(x + 4)$$

$$y - 3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(x + 4)$$

(E. Engenharia de Pernambuco – 1940).

21) Calcule a equação da circunferência de círculo que passa pela origem e pelos pontos de interseção da reta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ com os eixos coordenados. (Engenharia – 1965 – GB).

22) Achar a equação da circunferência que passa pelos pontos $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. (F. N. Filosofia – 1948).

23) Dê os pontos B e C da reta $y = x - 3$ que formam com o ponto $A\ (2,4)$ os vértices de um triângulo retângulo em A e isósceles.
(F. Eng. Univ. Rio – 20/5/61).

24) Dados os vértices $A\ (0, 10)$, $B\ (5, 5)$ e $C\ (-5, -10)$, do triângulo ABC, determinar as equações de suas alturas e verificar se elas concorrem em um mesmo ponto. Determinar esse ponto.
(F. N. Filosofia – 1.ª época – 1947).

25) As retas $x + 2y - 3 = 0$ e $x + 2y + 5 = 0$ são paralelas. A equação da reta paralela eqüidistante dessas duas é
(CESCEM – 73 – SP)

26) Determinar a equação da circunferência que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, -2)$ e que é tangente à reta $y + 4 = 0$.
(E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1951).

27) Qual a equação do círculo cujo raio é 10 e que tangencia a reta $4x + 3y - 70 = 0$ no ponto $(10, 10)$?
(E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1953).

28) A equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$, traçada pelo ponto $(3, 4)$ é ...
(Economia – UFRJ 1971).

29) Dados os pontos $A\ (3, 0)$, $B\ (0, 4)$ e $C\ (1, -1)$ referidos a um sistema cartesiano ortogonal, determinar o ponto eqüidistante dos pontos A, B e C. (F. Eng. Ind. U. Católica – S. Paulo – 16/5/51).

30) Achar a equação da reta paralela à reta $3x - y = 4$ e que passa pelo ponto $(-2, 3)$. (F. N. Filosofia – 2.ª época – 1947).

31) Sendo P um ponto cuja ordenada é o dobro da abscissa calcule as suas coordenadas, sabendo que P eqüidista do ponto $A\ (1, -3)$ e da reta $x + 2y - 1 = 0$. Calcule, também, as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre a reta $3x + 6y - 5 = 0$.
(ENE – 1961).

32) Instituir a equação da circunferência de círculo que passa pelos pontos $M_1\ (9, 5)$, $M_2\ (7, 1)$ e $M_3\ (3, 5)$ e determinar a distância do ponto $P\ (-5, 3)$ à tangente à circunferência no ponto em que a ordenada é 7, as coordenadas sendo retilíneas retangulares.
(E. N. Engenharia – 1941).

33) O ponto M é eqüidistante dos pontos $(3, 2)$ e $(-3, 4)$. Sabendo que o coeficiente angular da reta que liga a origem das coordenadas ao ponto M é $\frac{3}{5}$, então o ponto M tem coordenadas . .
(Economia – UFRJ – 1971).

Sejam: 1.º) paralelas; 2.º) perpendiculares; 3.º) concorrentes
(E. N. Química).

34) Determinar a equação da circunferência de círculo que tem raio 2, passa pela origem e tem o centro sobre a bissetriz formada pelas direções positivas dos eixos coordenados.
(F. N. Filosofia – 1950).

35) A distância da reta AB à origem é igual a 5. Sabe-se que ela passa pela interseção das retas $3x - 2y + 11 = 0$ e $6x + 7y - 55 = 0$. Achar a equação da reta AB.
(E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1950).

36) Sendo os eixos retangulares, dois dos vértices de um quadrado são as interseções dos eixos com a reta $3x + 4y - 8 = 0$. Pedem-se as coordenadas dos quatro vértices e as equações dos outros três lados, sabendo-se que a origem das coordenadas está situada no interior do quadrado.
(E. N. Engenharia – 1946).

37) Um círculo tem um diâmetro cujo suporte passa pelo ponto $(-2, -3)$. A equação da tangente em um dos extremos desse diâmetro é $3x + 4y - 57 = 0$ e a tangente no outro extremo corta o eixo dos x no ponto de abscissa $2\frac{1}{3}$. Achar a equação da circunferência neste círculo.
F. N. Filosofia – 26/2/46).

38) Dada uma circunferência definida pela equação $x^2+y^2-6x-10y+30=0$ e uma reta definida pela equação $7x+5y-91=0$, sendo os eixos retilíneos retangulares, determinar a menor distância da reta à circunferência e as coordenadas do ponto da reta mais próximo da circunferência. (E. N. Engenharia – 1942).

39) A equação da reta suporte de um dos diâmetros de um círculo referido a eixos ortogonais é $3y-4x+10=0$. A tangente ao círculo por um dos extremos desse diâmetro corta o eixo dos x no ponto de abscissa 15.

1.º) Calcular o raio do círculo sabendo-se que o suporte do diâmetro paralelo à tangente considerada corta o eixo dos y no ponto de ordenada $-\frac{5}{4}$.

2.º) Escrever a equação da circunferência do referido círculo. (F. N. Filosofia – 1949).

40) As equações de duas retas são: $3y-4x-4=0$ e $x-6=0$.

Determinar a equação do círculo tangente a essas retas e ao eixo dos x. (E. Engenharia Mackenzie – S. Paulo – 1955).

41) Achar a equação da mediatriz do segmento de reta cujas extremidades são os pontos:

$A\,(-2\,;\,-3)$ e $B\,(4\,;\,-5)$

(F. N. Ciências Econômicas – 1963)

42) Calcule as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $A(2;\,-1)$ sobre a reta $y=3x$. (ENE – 1964)

43) Escreva a equação da circunferência de círculo que passa pela origem das coordenadas, corta o eixo dos x no ponto de abscissa 6 e tem o centro na reta $y=4$. (Fac. Eng. UEG – 1964)

44) A circunferência $x^2+y^2+5x+4y-a=0$ possui no eixo dos X uma corda de comprimento 3.

Calcule o valor de a e depois determine as coordenadas do centro e o raio. (EPUSP – 1961)

45) Calcule as equações das tangentes à circunferência de círculo $x^2+y^2=4$ paralelas à reta $3x+4y-12=0$ (Fac. Eng. U. F. Est. Rio – 1963)

46) Dada a circunferência $(x-1)^2+y^2=4$ e a reta $x=k$, para que valores de k a reta encontra a circunferência? (EPUSP – 1960)

47) No trapézio $ABCD$ são dados os vértices

$A\,(2;\,3)$ $C\,(6;\,7)$ e $D\,(3;\,6)$

A base AB é o triplo da base CD.

Calcule a equação da reta suporte do lado BC. (Fac. Eng. U. F. Est. Rio – 1963)

48) Uma circunferência de círculo C tem raio igual a 6 e centro no ponto (6; 6). Outra circunferência de centro na origem é tangente exteriormente a C. Obtenha a equação da tangente interior comum às duas circunferências. (Fac. Eng. U. E. G. – 1963).

49) Dada a circunferência $x^2+y^2+3x+by+c=0$ estabeleça a relação que deve existir entre b e c para que a circunferência dada tangencia o eixo Oy (ENE – 1963).

50) São dados:

o ponto $A\,(-1;\,2)$

a reta $R \rightarrow x+2y=0$

a reta $R_1 \rightarrow x+y-1=0$

Os pontos B e C pertencem à reta R_1 e cada um deles é eqüidistante do ponto A e da reta R.

I é o ponto médio do segmento BC.

Calcule as coordenadas da projeção ortogonal do ponto I sobre a reta R. (ENE – 1963).

51) Escreva a equação da reta suporte da mediana que parte do vértice A do triângulo de vértices $A\,(-3,\,-3)$, $B\,(1,\,0)$ e $C\,(-4,\,3)$. (UEG – 1969).

52) Os pontos do círculo $x^2+y^2-2x-6y+2=0$ que são eqüidistantes dos eixos coordenados:

A) São 3, sendo dois no primeiro e um no segundo quadrante;

B) são 4, sendo um em cada quadrante;

C) são 2, ambos no primeiro quadrante;

D) não há ponto neste círculo que seja eqüidistante dos dois eixos;

E) são 2, um no primeiro quadrante e outro no segundo. (CICE – 1969).

53) A circunferência $x^2+y^2-4y+3=0$ e a parábola $3x^2-y+1=0$ tem:

A) Quatro pontos em comum *B*) Três pontos em comum

C) Dois pontos em comum *D*) Um ponto em comum

E) Nenhum ponto em comum (CICE – 1968).

RESPOSTAS:

1) $2x+y-3=0$

2) $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ e $x^2+y^2-6x-8y-11=0$

3) $(^3/_2,\,-^2/_2)$, $(-^{39}/_2,\,-^{30}/_7)$ e $(-^3/_2,\,^2/_2)$

4) $x^2+y^2-6x+8y=0$

5) $y = -4x+5$

6) $4x^2+4y^2+16x-32y+35=0$

7) $y=-5$

8) $3x+y-18=0$, $x-3y+12=0$; $\sqrt{26}$

9) $x^2+y^2-6x-2y-6=0$

10) zero graus

11) (6, -1)

12) M (19, -2)

13) $2\sqrt{10}$; (-4, 2) e (-2, -4)

14) Basta ver que as retas AB e CD e BC e AD são paralelas. A área é 18.

15) Achar a reta r passando pelo ponto e perpendicular a reta dada. Achar o ponto de interseção das retas. Calcular a distância deste ponto ao ponto dado. Dá $\frac{9}{5}$.

16) (-2, -1)

17) $25x+20y+594=0$

18) (6, 10) e (10, 4) ou (-6, 2) e (-2, -4)

19) $a=-3$ e $b=2$; $m=2/3$; $\frac{2}{\sqrt{13}}$ e $\frac{+3}{\sqrt{13}}$; $2x-3y+1=0$; $70^\circ 34'$

20) $1/2\sqrt{2}$ e $18/2\sqrt{2}$

21) $x^2+y^2-6x-8y=0$

22) $x^2+y^2-x-y=0$

23) (7,4) e (2, -1)

24) $x-y-5=0$; $2x+3y-30=0$; $x+4y-25=0$; (9, 4)

25) $x+2y+1=0$

26) $x^2+y^2-18x-12y=0$ e $x^2+y^2+4y=0$

27) $x^2+y^2-36x-32y+480=0$ ou $x^2+y^2-4x-8y-80=0$

28) $3x+4y-25=0$

29) $(21/22, 28/22)$

30) $3x-y+9=0$

31) $P\left(-\frac{49}{80}, -\frac{49}{30}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

32) $x^2+y^2-12x-8y+42=0$ e $d=0$, $2\sqrt{10}$

33) $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

34) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y=0$

35) $-3x+4y-25=0$ ou $4x+3y-25=0$

36) (0, 2); (8/3, 0); (-2, -8/3); $\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$; $9x+12y+26=0$; $12x-9y-32=0$ e $4x-3y+6=0$

37) $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

38) $\frac{45\sqrt{74}-148}{74}$; $\left(\frac{537}{74}, \frac{595}{74}\right)$

39) $R=10$ e $x^2+y^2-2x+4y-95=0$

40) $x^2+y^2-26x-14y+169=0$

41) $3x-y-7=0$

42) $\left(-\frac{1}{10}, -\frac{3}{10}\right)$

43) $x^2+y^2-6x-8y=0$

44) $a=-4$; $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$; $R=\frac{5}{2}$

45) $y=-\frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$

46) $-1 \leqslant x \leqslant 3$

47) $x+5y-41=0$

48) $x+y-6(2-\sqrt{2})=0$

49) $b^2=4c$

50) (-4, 2)

51) $3x-y+6=0$

52) A

53) B

Este livro foi impresso
nas oficinas da

SÃO PAULO EDITORA S. A.
03010 — Rua Barão de Ladário, 226
01000 — São Paulo, SP — Brasil

com filmes fornecidos pelo editor

São Paulo Editora S. A. imprimiu